АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И ПРОЦЕССАМИ

ГРНТИ 27.29.17

УДК 517.925.42

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.М. Пашан,pmmakpal@gmail.com
С.А. Айсагалиев,Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Предлагается новый метод исследования периодических решений автономных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Получены необходимые и достаточные условия существования периодического решения, и разработан алгоритм построения периодического решения по предельным точкам минимизирующих последовательностей. Путем введения управляющей функции исходная задача приводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода построение периодического решения сводится к решению специальной начальной задачи оптимального управления.

Ключевые слова: периодическое решение, существование решения, интегральное уравнение, минимизирующие последовательности, оптимальное управление.

Введение

Основными методами исследования периодических решений процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются: метод малого параметра[1-3], асимптотические методы [4-6], метод фазового пространства [7-12], метод гармонической линеаризации [13].

В настоящее время наиболее полно изучены периодические движения в линейных и квазилинейных системах, а также особо нелинейные системы, содержащие малый параметр. К сожалению, проблема существования и методы построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений остаются малоизученной областью качественной теории. Поэтому разработка методов построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида является актуальной проблемой.

Результаты, полученные в статье, являются продолжением научных исследований по интегральному уравнению [14-16], качественной теории дифференциальных уравнений[17-22], по оптимальному управлению [23-28].

Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\dot{x} = Ax + Bf(x), \quad t \in I_* = [0, T_*] \tag{1}$$

$$x(0) = x_0 \in S \subset R^n, \tag{2}$$

здесь A, B – постоянные матрицы порядков $n \times n, n \times m$ соответственно, $m -$мерная вектор - функция $f(x)$ определена и непрерывна по переменной $x \in D$ и удовлетворяет условиям

$$|f(x) - f(y)| \le l|x - y|, \quad \forall x, y \in D, \ \ l = const > 0,$$

$$|f(x)| \le c_0, \ \ x \in D, \ \ c_0 = const > 0,$$

где $D \subset R^n$ – ограниченное замкнутое множество, $S -$ заданное выпуклое замкнутое множество.

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования периодического решения в системе (1), (2).

Задача 2. Построить периодическое решение в системе (1), (2). Найти период T_*.

Интегральное уравнение. Линейная управляемая система

Для решения задач 1,2 необходимы следующие теоремы о разрешимости и построению общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированным параметром из работ [14 -16].

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0\,,t)u(t)dt = a, \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{3}$$

где $K(t_0,t) = \left|\left|K_{ij}(t_0,T)\right|\right|, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, K_{ij}(t_0,t) \in L_2(I,R^1), u(t) \in L_2(I,R_m)$ искомая функция, $a \in R^n$ – заданный вектор, $t \in [t_0,t_1]$ – заданная точка.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (3) при любом векторе* $a \in R^n$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt \tag{4}$$

порядка $n \times n$ *является положительно определенной, где (*) – знак транспонирования,* $t_1 > t_0$.

Теорема 2. *Пусть матрица* $W(t_0,t_1)$, *определяемая по формуле (4), положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (3) при любом* $a \in R^n$ *определяется по формуле:*

$$u(t) = v(t) + K^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a - K^*(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,\eta)v(\eta)d\eta. \quad t \in I.$$

Наряду с дифференциальным уравнением (1) с условием (2) рассмотрим линейную управляемую систему:

$$\dot{y} = Ay + Bw(t), \ \ t \in I = [0,T], \tag{5}$$

$$(y(0) = x_0, \ \ y(T) = x_T) \in S, \tag{6}$$

$$w(t) \in L_2(I,R^m). \tag{7}$$

Заметим, что при $w(t) = f\big(x(t)\big), t \in I$, *функция* $x(t) = y(t), t \in I$. *Определим следующие векторы и матрицы*

$$a = e^{-AT}x_0 - x_1, \qquad W(0,T) = \int_0^T e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть матрица* $W(0,T)$, *определяемая по формуле (8), положительно определенная. Тогда управление* $w(t) \in L_2(I,R^m)$ *переводит траекторию системы (5)-(7) из любой заданной точки* $x_1 = x(t_0) \in S$ *в момент времени* t_0, *в любое желаемое конечное состояние* $x_1 = x(T) \in S$ *в момент времени* T *тогда и только тогда, когда*

$$w(t) \in U = \{w(t) = v(t) + \Lambda_1(t,x_0,x_1) + M_1(t)z(T,v), \ \ \forall v, v(t) \in L_2(I,R^m), t \in I\}, \tag{9}$$

где $v(t) \in L_2(I,R^m)$- *любая функция,* $\Lambda_1(t,x_0,x_1) = B^*\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,T)a, M_1(t) + -B^*\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,T)\Phi(t,\tau) = e^{a(t-\tau)}, t,\tau \in I, a$ *функция* $z(t,v), t \in I_*$ – *решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z} = Az + Bv(t), \ \ z(0) = 0, \ \ v(t) \in L_2(I,R^m)\,. \tag{10}$$

<u>Доказательство</u> теоремы следует из теоремы 2. В самом деле, решение дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$y(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)w(\tau)d\tau\,, \quad t \in I. \tag{11}$$

Отсюда с учетом того, что $y(T) = x_1$, имеем

$$\int_0^T e^{-At}Bw(t)dt = a. \tag{12}$$

Интегральное уравнение (12) совпадает с (3) при $t_0 = 0, t_1 = T, K(t_0,t) = e^{-At}B, t_0 = 0 \in I$.Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда решение дифференциального уравнения (5), соответствующее управлению* $w(t) \in U$, *определяется по формуле*

$$y(t) = z(t,\nu) + \Lambda_2(t,x_0,x_1) + M_2(t)z(t,\nu), t \in I_*, \tag{13}$$

где $\Lambda_2(t,x_0,x_1) = e^{At}W(t,T)W^{-1}(0,T)x_0 + e^{At}W(t,T)W^{-1}(0,T)e^{-At}x_1$,

$M_2(t) = -e^{At}W(0,t)W^{-1}(0,T)e^{-AT}, W(0,t) = \int_0^t e^{-A\tau}BB^*e^{-A_*\tau}d\tau, W(t,T) = W(0,T) - W(0,t), t \in I,$ *функция* $z(t,\nu), t \in I$ *– решение дифференциального уравнения (10).*

Доказательство теоремы следует из (11), где $w(t) \in U$определяется то формуле (9).

Существоваиие и построение периодического решения

Из теорем 3,4 следует, что существование периодического решения может быть найдено из решения следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(\nu,x_0,T) = \int_0^T |\nu(t) + \Lambda_1(t,x_{0,}x_0) + M_1(t)z(T,\nu) - f(y(t))|^2 dt \to inf \tag{14}$$

при условиях

$$\dot{z} = Az + B\nu(t), z(0) = 0, t \in I, \nu(t) \in L_2(I,R^m), I = [0,T], \tag{15}$$

$$x_0 \in S, T \in R^1, \tag{16}$$

где функция $y(t), t \in I$ – определяется по формуле (13). Обозначим через $\theta = (\nu,x_0,T) \in L_2(I,R^m) \times S \times R^1 = X \subset H = L_2(I,R^m) \times R^n \times R^1$.

Теорема 5. *Пусть матрица* $W(0,T_*) > 0$. *Для того чтобы краевая задача (1), (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(\theta_*) = J(\nu_*,x_{0*},T_*) = 0$, *где* $\theta_* = (\nu_*,x_{0*},T_*)$*– решение оптимизированной задачи (14) – (16).*

Доказательство. Значение $J(\theta_*) = 0$ тогда и только тогда, когда $\nu_*(t) + \Lambda_1(t,x_{0*},x_{1*}) + M_1(t)z(T_*,\nu_*) - f(y_*(t)) = 0, x_{0*} = x_{1*}, t \in I_* = [0,T_*]$.Тогда$x_*(t) = y_*(t) = z(t,\nu_*) + \Lambda_2(t,x_{0*},x_{1*}) + M_2(t)z(T_*,\nu_*), t \in I_*$.Теорема доказана

Построение периодического решения

Пусть функция

$F_0(q,t) = |\nu + \Lambda_1(t,x_{0*},x_{0*}) + M_1(t)z(T,\nu) - f(y)|^2, q = (\nu,x_0,T,z,z(T))$.

Тогда частные производные равны:

$$F_{o\nu}(q,t) = 2[w - f(y)],$$

$$F_{0z(T)}(q,t) = [2M_1^* - 2M_2^*f_x(y)][w - f(y)],$$

$$F_{0x_0}(q,t) = \left[2\overline{\Lambda_1^*}(t,x_0,T) - 2\overline{\Lambda_2^*}(t,x_0,T)f_x(y)\right][w - f(y)],$$

$$\overline{F_{0T}}(q,T) = F_0(q,T) + \int_0^T \frac{\partial}{\partial T}F_0(q,t)dt,$$

$$F_{0z}(q,t) = -2f_x(y)[w - f(y)],$$

где $\overline{\Lambda_1}(t,x_0,T) = B^*e^{-A^*t}W^{-1}(0,T)(e^{-AT} - I_n)$,

$\overline{\Lambda_2}(t,x_0,T) = e^{At}W(0,T)W^{-1}(0,T) + e^{At}W(0,T)W^{-1}(0,T)e^{-AT}$.

Теорема 6. *Пусть матрица* $W(0,T) > 0$, *функция* $f(x)$*определена и непрерывно дифференцируема по x. Тогда функционал (14) при условиях (15), (16) дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(\theta) = (J_\nu'(\theta), J_{x_0}'(\theta), J_T'(\theta)) \in H$$

в любой точке $\theta = (\nu,x_0,T) \in X$ *вычисляется по формуле*

$$J_\nu'(\theta) = F_{0\nu}(q,t) - B^*\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t}) \in L_2(I,R^m),$$

$$J_{x_0}'(\theta) = \int_0^T F_{0x_0}(q,t)dt \in R^n, \tag{17}$$

$$J_T'(\theta) = \overline{F_{0T}}(q,T) \in R^1,$$

где $q(t) = (\nu(t),x_0,T,z(t),z(T)), z(t,\nu), t\epsilon I$ *– решение дифференциального уравнения (15), а функция* $\psi(t), t \in I$ *– решение сопряженной системы*

$$\dot{\varphi} = F_{0z}(q(t),t) - A^*\psi(t), \psi(T) = -\int_0^T F_{0z(t)}(q(t),t)dt. \tag{18}$$

Кроме того, градиент $J'(\theta) \in H$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\left||J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|\right| \le l_0\left||\theta_1 - \theta_2|\right|, \forall\theta_1,\theta_2 \in X. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\theta = (\nu, x_0, T), \theta + \Delta\theta = (\nu + h, x_0 + \Delta x_0, T - \Delta T)$.Тогда приращение функционала

$\Delta J = J(\theta + \Delta\theta) - J(\theta) = \int_0^T [h^*(t)[F_{0\nu}(q(t), t) - B^*\psi(t)] + \Delta x_0^* F_{0,x_0}(q(t), t)]dt + \Delta T F_{0T}(q, T) + R,\ \ |R| \le C_1||\Delta\theta||^2$.

Отсюда следуют формулы (17), (18). Так как

$$||J'(\theta_1) - J'(\theta_2)||^2 = \int_0^T |J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2\, dt \le l_0^2 \left||\theta_1 - \theta_2|\right|^2, \forall\theta_1, \theta_2 \in X,$$

то верно неравенство (19). Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6, последовательность $\{\theta_n\} = \{\nu_n, x_{0n}, T_n\}$ определяется по алгоритму

$$\nu_{n+1} = \nu_n - \alpha_n J_T'(\theta_n), x_{0n+1} = P_s\left[x_{0n} - \alpha_n J_{x_0}'(\theta_n)\right], \tag{20}$$
$$T_{n+1} = T_n - \alpha_n J_T'(\theta_n), n = 0,1,2, \ldots,$$

где $\epsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l_0 + 2\epsilon_1}, \epsilon_0 > 0, \epsilon_1 > 0, l_0 = const > 0$ из (19).

Тогда:

1) числовая последовательность$\{J(\theta_n)\}$ строго убывает;

2) $||\theta_n - \theta_{n+1}|| \to 0$при $n \to \infty$.

Если, кроме того, выполнено неравенство $< F_{0q}(q_1, t) - F_{0q}(q_2, t), q_1 - q_2 >_{R^{m+n+1}} \ge 0, \forall q_1, q_2 \in R^{m+n+1}$, множество $M(\theta_0) = \{\theta \in X | J(\theta) \le J(\theta_0)\}$ ограничено, то:

3) последовательность $\{(\theta_n)\} \subset X$ является минимизирующей $\lim_{n\to\infty} j(\theta_n) = \lim_{\theta\in X} j(\theta)$;

4) множество $X_* = \{\theta_* \in X | J(\theta_*) = J_* = \inf J(\theta) = \min J(\theta)\}$ не пусто;

5) $\nu_n \to \nu_*, x_{0n} \to x_{0*}, T_n \to T_*$ при $n \to \infty, (\nu_*, x_{0*}, T_*) \in X_*$;

6) $0 \le J(\theta_n) - J_* \le m\backslash n$, $\quad n = 1,2, \ldots$. (скорость сходимости)

7) Система (1), (2) имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда значение $J(\theta_*) = 0$. Периодическое решение $x_*(t) = y_*(t) = z(t, \nu_*) + \Lambda_2(t, x_{0*}, x_{1*}) + M_2(t) z(T_*, \nu_*), t \in I_* = [0, T_*], x_{0*} = x_{1*}$.

Доказательство. Поскольку $\theta_{n+1} = P_X[\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)]$, то верно неравенство

$$< \theta_{n+1} - (\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)), \theta - \theta_{n+1} >_{L_2} \ge 0, \quad \forall\theta, \theta_n \in X,$$

в силу (20). Отсюда при $\theta = \theta_n$, имеем

$$< J'(\theta_n), \theta - \theta_{n+1} > \ge \frac{1}{\alpha_n}\left||\theta_n - \theta_{n+1}|\right|^2. \tag{21}$$

Так как $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$,то

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \ge < J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} > - \frac{l_0}{2}\left||\theta_n - \theta_{n+1}|\right|^2. \tag{22}$$

из (21), (22) получим

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \ge \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{l_0}{2}\right)\left||\theta_n - \theta_{n+1}|\right|^2 \ge \epsilon_1\left||\theta_n - \theta_{n+1}|\right|^2.$$

Отсюда следуют утверждения 1), 2) теоремы.

Далее, из выпуклости функционала (14) при условиях (15), (16) и слабой бикомпактности множества $M(\theta_0)$ следуют утверждения 3), 4), 5) теоремы.

Пусть $\alpha_n = J(\theta_n) - J(\theta_*)$. Тогда $\alpha_n - \alpha_{n+1} \ge \epsilon_1\left||\theta_n - \theta_{n+1}|\right|^2, \alpha_n \le \epsilon_1\left||\theta_n - \theta_{n+1}|\right|$.

Отсюда следует утверждение 6) теоремы. Утверждение 7) следует из теоремы 5. Теорема доказана.

Решение модельной задачи

В качестве примера рассмотрим периодическое решение уравнения Дюффинга следующего вида

$$\ddot{x} = w^2 x - \mu x^3 = 0. \tag{23}$$

Из (23) имеем

$$\dot{x_1} = x_2, \dot{x_2} = -w^2 x_1 + \mu x_3^1. \tag{24}$$

Уравнение (24) в векторной форме запишется так

$$\dot{x} = Ax + Bf(x), x(0) = x_0, t \in I_* = [0, T_*], \quad (25)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = x^3, x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Линейная управляемая система

$$\dot{y} = Ay + Bw(0), t \in I = [0, T], y(0) = y(T) = x_0 \in R^2,$$

где

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos wt & \frac{1}{w}\sin wt \\ -w\sin wt & \cos wt \end{pmatrix}, \ e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos wt & -\frac{1}{w}\sin wt \\ w\sin wt & \cos wt \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$W(0,T) = \int_0^T e^{-At}BB^*e^{-A^*t}\,dt = \frac{\mu^2}{w^3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sin 2w\,T & -\frac{\mu^2}{w^2}\frac{sin^2 wT}{2} \\ -\frac{\mu^2}{w^2}\frac{sin^2 wT}{2} & \frac{\mu^2}{w}\left(\frac{1}{4}\sin 2w\,T + \frac{1}{2}wT\right) \end{pmatrix} > 0.$$

Легко убедиться в том, что

$$\frac{\mu^2}{w^3}\left(-\frac{1}{4}\sin 2w\,T + \frac{1}{2}wT\right) > 0, \forall T, T > 0$$

$$|W(0,T)| = \frac{\mu^2}{w^4}\left(\frac{1}{4}w^2T^2 - \frac{1}{16}sin^2 2wT - \frac{sin^4 wT}{4}\right) > 0, \qquad \forall T, T > 0,$$

где$|W(0,T)|$ определитель матрицы $W(0,T)$. Обратная матрица

$$W^{-1}(0,T) = \frac{1}{|W(0,T)|}\begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{w}\left(\frac{1}{4}\sin 2w\,T + \frac{1}{2}wT\right) & \frac{\mu^2}{w^2}\frac{sin^2 wT}{2} \\ \frac{\mu^2}{w^2}\frac{sin^2 wT}{2} & \frac{\mu^2}{w^3}\left(-\frac{1}{4}\sin 2w\,T + \frac{1}{2}wT^2\right) \end{pmatrix} > 0.$$

Вектор

$$a = e^{-AT}x_0 - x_0 = \begin{pmatrix} x_{10}coswT + x_{20}wsinwT - x_{10} \\ \frac{x_{10}}{w}sinwT + x_{20}wcoswT - x_{20} \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$W(0,t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{w}\left(-\frac{1}{4}\sin 2w\,t + \frac{1}{2}wt\right) & -\frac{\mu^2}{w^2}\frac{sin^2 wt}{2} \\ -\frac{\mu^2}{w^2}\frac{sin^2 wt}{2} & \frac{\mu^2}{w^3}\left(-\frac{1}{4}\sin 2w\,t + \frac{1}{2}wt\right) \end{pmatrix}$$

$$W(t,T) = W(0,T) - W(0,t), t \in [0,T].$$

По известным матрицам $A, B, e^{At}, W(0,T), W(0,t), W^{-1}(0,T)$можно найти.

$$\Lambda_1(t, x_0, T) = B^*e^{-A^*t}W^{-1}(0,T)a = T_{11}(t,T)x_{10} + T_{12}(t,T)x_{20},$$

$$M_1(t,T) = B^*e^{-A^*t}W^{-1}(0,T)e^{-AT},$$

$$\Lambda_2(t, x_0, T) = e^{At}W(t,T)W^{-1}(0,T)x_0 + e^{At}W(0,t)W^{-1}(0,T)e^{-AT}x_0,$$

$$M_2(t,T) = -e^{AT}W(0,t)W^{-1}(0,T)e^{-A^*T}.$$

Тогда

$$w(t) = v(t) + T_{11}(t,T)x_{10} + T_{12}(0,T)x_{20} + M_{11}(t,T)z_1(T,v) + M_{12}(t,T)z_2(T,v), \quad (26)$$

$$y_1(t) = z_1(t,v) + \overline{\Lambda_{11}}(t,T)x_{10} + \overline{\Lambda_{12}}(t,T)x_{20} + \overline{M_{11}}(t,T)z_1(T,v) + \overline{M_{12}}(t,T)z_2(T,v),$$

$$y_2(t) = z_2(t,v) + \overline{\Lambda_{21}}(t,T)x_{10} + \overline{\Lambda_{22}}(t,T)x_{20} + \overline{M_{21}}(t,T)z_1(T,v) + \overline{M_{22}}(t,T)z_2(T,v), \quad (27)$$

где

$$M_1(t,T) = \left(M_{11}(t,T)M_{12}(t,T)\right),$$

$$\Lambda_2(t,T)=\begin{pmatrix}\overline{\Lambda_{11}}(t,T)x_{10}+\overline{\Lambda_{12}}(t,T)x_{20}\\ \overline{\Lambda_{21}}(t,T)x_{10}+\overline{\Lambda_{22}}(t,T)x_{20}\end{pmatrix},$$

$$M_2(t,T)=\begin{pmatrix}\overline{M_{11}}(t,T)x_{10}+\overline{M_{12}}(t,T)x_{20}\\ \overline{M_{21}}(t,T)x_{10}+\overline{M_{22}}(t,T)x_{20}\end{pmatrix}$$

функция $z(t,\boldsymbol{v})$решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}=Az+Bv, z(0)=0, v(t)\in L_2(I,R^1). \tag{28}$$

Оптимизационная задача

$$J(v,x_{10},x_{20},T)=\int_0^T |w(t)-y_1^3(t)|^2dt\rightarrow inf$$

при условиях (28), где $x_{10}\in R^1, x_{20}\in R^1$, функции $w(t), y_1(t), t\in I$ определяются формулами (26), (27) соответственно. Функция

$$F_0(q(t),t)=\Big|w\big(t,v,x_{10},x_{20},z_1(T,v),z_2(T,v)\big) \\ -y_1^3(z_1(t,v),z_2(t,v),x_{10},x_{20},z_1(T,v),z_2(T,v)\Big)|^2.$$

Решение исходной задачи (23)-(25)

$$x_{1*}(t)=z_1(t,v_*)+\overline{\Lambda_{11}}(t,T_*)x_{10}^*+\overline{\Lambda_{12}}(t,T_*)x_{20}^*+\overline{M_{11}}(t,T_*)z_1(T_*,v_*)+\overline{M_{12}}(t,T_*)z_2(T_*,v_*),$$
$$x_{2*}(t)=z_2(t,v_*)+\overline{\Lambda_{21}}(t,T_*)x_{10}^*+\overline{\Lambda_{22}}(t,T_*)x_{20}^*+\overline{M_{21}}(t,T_*)z_1(T_*,v_*)+\overline{M_{22}}(t,T_*)z_2(T_*,v_*),$$

где

$$v_n\overset{\text{сл}}{\rightarrow}v_*, x_{10}^n\rightarrow x_{10}^*, x_{20}^n\rightarrow x_{20}^*, T_n\rightarrow T_*\text{при } n\rightarrow\infty, J(v_*,x_{10}^*,x_{20}^*,T_*)=0.$$

Заключение

Основными результатами в данной работе являются:

1) Новый подход к исследованию периодического решения в автономных системах, основанный на сведении исходной задачи к задаче управляемости линейных систем (теоремы 1-3).

2) Решение задачи управляемости для линейных систем на основе построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (теорема 4).

3) Получено необходимое и достаточное условие существования периодического решения в автономной динамической системе (теорема 5).

4) Разработан алгоритм построения периодического решения путем сведения к специальной начальной задаче оптимального управления (теоремы 6,7).

5) Результаты теоретических исследований показаны на примере путем решения уравнения Дюффинга.

Литература

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальними уравнениями. − М.: Гостехиздат, 1947. −256с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. 4.2. −6 изд. −М.: Наука. 1981. −550с.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. −М.: Физматгиз,
4. 1959. − 403с.
5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. −М.: Наука, 1969. −305с.
6. Крылов Н.Н. Введение в нелинейную механику / Н.Н. Крылов, Н.Н. Боголюбов. − Киев, 1937. −280 с.
7. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний /Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митронольский. − М.: Наука, 1974. − 309с.
8. Биркгоф Г.Д. (Birhhoff G.D), furface Transformations and their Dinamicae Applications. Acta, Matt. V.43. −1920, p. 5−20.
9. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. −Изв.вузов. − Радиофизика. −Т.1. −1958. – Стр. 7−20.

10. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. − М.: Физматгиз, 1959. − 120с.
11. Нелепин Р.А. Об исследовании нелинейных автоматических систем высокого порядка точными математическими методами. Доклады АН СССР. − 1965. − Т.161, \textnumero 4. С. 111−116.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. − М.: Наука, 1964. − 320 с.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнение. −М.: Наука, 1970. −495с.
14. Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. − М. Наука, 1973. −500с.
15. Aisagaliev S.A. Constructive method for solvability of Fredholm equation of the first kind || Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations this (EJQTDE), 2017., No, 72, p. 1-11, DOI: 10.14232/ejqtde.2017.
16. Aisagaliev S.A. To the boundary value problem of ordinary differential Equations || Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equationsthis (EJQTDE), 2015, No. 57, p. 1-17 DOI: 10.14232/ejqtde.2015
17. Aisagaliev S.A. On Periodic solutions of Autonomous systems || Journal of Mathematical Sciences (United States), Volume 229, Issue 4, March, 2018, P. 335-353.
18. Aisagaliev S.A. Aizerman's problem in absolute seability theory for regulated systems || Sbornic Mathematics (SB MATH), 2018, 209, DOI: 10.1070/SM 8998, p. 780-801
19. Aisagaliev S.A. Controllability of differential equation systems || Differential Equations, vol. 27. No. 9. 1991. p. 1037-1047.
20. Aisagaliev S.A. Aisagalieva S.S. A constructive method for solving a controllability problem for ordinary differential equations || Differential Equations, vol. 29, \textnumero 4. 1993, p. 471-482.
21. Aisagaliev S.A., Belogurov A.P. Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control || Siberian Mathematical Journal, 2012. vol. 53, \textnumero 1, p. 13-28.
22. Aisagaliev S.A. Optimal control of linear systems with fixed trajectory end points and bounded control || Differential Equations, -1996. -Vol. 32, No.6, p. 1017−1023.
23. Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A. On the Optimal Control of linear systems with linear performance criterion and constraints || Differential Equations, 2012. - vol. 48, No. 6, p. 826−836.
24. Aisagaliev S.A. Certain problems of synchronization theory || Journal inverse III Posed Problems - \textnumero 21, 2013. p. 159−175.
25. Aisagaliev S.A., AipanovSh.A. A remark of the global asymptotic stability theory of phase system // Differential Equations (35), 8. 1999. p. 1019−1026.
26. Aisagaliev S.A. Absolute stadility in controlled systems // Differential Equations, vol. 80, \textnumero 5, 1994. p. 687-695.
27. Aisagaliev S.A. To the solution of a boundary value problem with a parameter for ordinary differential equations // ISSN 2074-1863. Ufa Mathematical Journal, vol. 8, No. 3 (2016). p. 3-13.
28. Айсагалиев С.А. Теория краевых задач динамических систем. – Алматы, 2021. −565с.
29. Айсагалиев С.А. Качественная теория интегро-дифференциальных уравнений. – Алматы, 2022. − 272с. Казахский национальный университет имени аль-Фараби \\ Поступила в редакцию