

УДК 517.9.92.942

ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА

Темиров Б.К., Баратова Б.Ш., Тукембаева Г.Ч.,

Жамшитбек кызы Айданек, Тургунбекова Ж.Н.

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына

Аннотация. В данной статье установлены достаточные условия осцилляции решений нелинейного дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа. Для иллюстрации теории получено численное решение.

Ключевые слова: осцилляция решений; нелинейные операторно-разностные уравнения; дифференциально-разностные уравнения; конечные разности третьего порядка; оператор Лапласа; условия осцилляции; положительные решения; неравенство Йенсена; краевая задача; усреднение по пространственным переменным; численное решение; моделирование и визуализация; веб-приложение; устойчивость решений.

Рассмотрим уравнение в виде

$$L_3[u(n, x)] + a(n) \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u[h(n), x]}{\partial x_k^2} + A_1(n, x)u[h(n), x] + f\{n, x, u[\delta(n), x]\} = 0. \quad (1)$$

Введем обозначения 1) QCR^m – открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q = \bar{Q} \setminus Q$; 2) n – натуральное число; 3) $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in Q$; 4) $h(n), \delta(n)$ – функции натурального аргумента, значения которых $\forall n \geq n_0$ являются натуральными числами $\forall n \geq n_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = \infty;$$

$$5) \Delta u(n, x) = u(n+1, x) - u(n, x); 6) L_0 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u[h(n), x]}{\partial x_k^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

Основные предположения: 1) $A(n, x)$ – заданная непрерывная функция по $x \in Q$ для каждого фиксированного натурального числа, n , $A(n, x) \in (S)$; 2) $\forall (n, x) \in D_0, \forall Z > 0, f(n, x, Z) > 0; f(n, x, -Z) < 0$.

Введем обозначения:

$$L_1[u(n, x)] = \Delta u(n, x) = u(n+1, x) - u(n, x); L_2[u(n, x)] = \Delta w_2(n), w_2(n) = P_1(n)L_2[u(n, x)]$$

$$L_3[u(n, x)] = \Delta w_2(n), w_2(n) = P_2(n)L_2[u(n, x)] \quad q_k(n) = \frac{1}{P_k(n)}, k = 1, 2.$$

Скажем, что выполнено:

1) условие (E_0) , если $P_k(n) > 0, \forall n \geq n_0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{P_k(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(n), k = 1, 2;$$

2) условие (E_1) , если $\forall (n, x) \in D_0$ выполняется неравенство

$$A_1(n, x) - \lambda_0 a(n) \geq a_1(n) \geq 0; \forall (n, x) \in D_0$$

3) $\forall z > 0$ выполнены условия (T_0) , если $f(n, x, z) \geq 0, f(n, x, -z) \leq 0$;

4) условие (T_1) , если $f(n, x, z) \geq g_0(n)z, f(n, x, -z) \leq -g_0(n)z, g_0(n) \geq 0$.

Теорема Йенсена. Пусть: 1) $f(z)$ – непрерывная выпуклая $(0, \infty)$ функция (дважды дифференцируемая на $(0, \infty)$). Функция $f(z)$ является выпуклой на этом интервале тогда и только тогда, когда $f(z) \geq 0, \forall z \in (0, \infty)$; 2) $\Phi(x)$ – непрерывная положительная функция $\forall x \in (0, \infty)$; 3) $\int_Q \Phi(x) dx = 1$; 4) $u(n, x)$ – неотрицательная функция, непрерывная по переменным группы x . Тогда имеет место неравенство

$$\int_Q \Phi(x) f[u(n, x)] dx \geq f \left\{ \int_Q \Phi(x) u(n, x) dx \right\}.$$

Это соотношение называют неравенством Йенсена. Доказательство теоремы приведено в работе [6]. А также известно [7], что все собственные значения краевой задачи

$$L_0 Y(x) + \lambda_0 Y(x) = 0, \quad Y(x)|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Положительна наименьшему собственному значению функция $\Phi(x) > 0; \forall x \in Q$ (нормированная в смысле $\int_Q \Phi(x) dx = 1$).

Лемма 1. Пусть 1) $\sum_{m=0}^{\infty} g_0(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ – непрерывно убывающая функция $\forall z > 0$. Тогда для положительного решения $y(n)$ неравенство

$$L_3[y(n)] + g_0(n)\varphi\{y(n)\} \leq 0 \quad (3)$$

имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Допустим, что неравенство (3) имеет положительное решение $y(n) > 0; \forall n \geq n_q$. Далее, рассуждая, как в работе [4], показывается, что $\forall n \geq n_1, \Delta W_2(n) \leq 0$. Отсюда вытекает следующее, что

1) $y(n)$ – неубывающая функция $\forall n \geq n_2$;

2) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = c > 0$.

Предположим, что $c \neq 0$. Тогда $\forall n \geq n_1, \varphi[y(n)] \geq \varphi(c) \equiv C_0 > 0$.

С учетом этого неравенства из (4) имеем

$$\Delta W_2(n) + C_0 C(n) \leq 0, \quad \forall n \geq n_1.$$

Так как $W_2(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$, то это неравенство противоречит условию 1) леммы 1. Следовательно, предположение $C \neq 0$ приводит к противоречию.

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Лемма 2. Пусть 1) $\sum_{m=0}^{\infty} C(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ – непрерывно убывающая функция $\forall z > 0$. Тогда для положительного решения $y(n) > 0, \forall n \geq n_1$ неравенство

$$L_3[y(n)] - C(n)\varphi[y(n)] \geq 0 \quad (4)$$

имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Допустим, что $L_3[y(n)] \geq 0, \forall n \geq n_1$. Тогда $W_2(n)$ – неубывающая функция $\forall n \geq n_1$. В этом случае логически возможны только следующие случаи: 1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W_2(n) \equiv C > 0, \forall n \geq n_2$; 2) либо $W_2(n) \leq 0, \forall n \geq n_2$.

В первом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \infty$. Поэтому рассмотрим второй случай

$$W_2(n) = P_2(n)\Delta W_1(n) \leq 0, \quad \forall n \geq n_1.$$

$W_1(n)$ – невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. Возможны только следующие случаи:

- 1) либо $\exists n_3 \geq n_2$ такое, что $W_1(n_3) = C < 0$;
- 2) либо $W_1(n) \leq 0, \forall n \geq n_3$.

Предположение 1) противоречит неравенству $y(n) > 0 \forall n \geq n_1$.

Следовательно,

$$W_1(n) = P_2(n)\Delta y(n) \quad \forall n \geq n_1,$$

отсюда вытекает, что неравенство

$$y(n) \geq y_1(n_3) \equiv C, \quad \varphi[y(n)] \geq \varphi(C) = C_0, \quad \forall n \geq n_3.$$

С учетом этого неравенства из неравенства (4) имеем

$$\Delta W_2(n) - C_0 C(n) \geq 0, \quad \forall n \geq n_3.$$

Далее, суммируя от n_3 до $n - 1$, получим

$$w_2(n) \geq w_2(n_3) + c_0 \sum_{m=n_3}^{n-1} c(m) \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

так как $w_2(n) \leq 0$, то это противоречиво.

Теорема 1. Если 1) выполнены условия (E_1) , (E_2) и (T_1) ; 2) $\sum_{m=0}^{\infty} g_0(m) = \infty$, тогда каждое решение уравнения (1) либо осциллирует либо $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $u(n, x) \geq 0$. Тогда имеет место либо $u(n, x) > 0$, либо $u(n, x) < 0$. Рассмотрим первый случай (а второй случай приводится к первому), что $u(n, x) > 0 \forall n \geq n_1$ положительное решение уравнения (1). Тогда по лемме 1 и лемме 2 имеет место $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$. Если $u(n, x) \leq 0, \forall n \geq n_1$ – отрицательное решение уравнения (1). Тогда $y(n) = -v(n)$ удовлетворяет неравенству (1).

Отсюда по лемме 1 имеем

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0.$$

Теорема 2. Если 1) выполнены условия (E_1) , (E_2) и T_1 . 2) $\sum_{m=0}^{\infty} g_0(m) = \infty$; 3) $\varphi(Z) \geq c = \text{const} > 0 \forall z \forall \epsilon > 0$. Тогда каждое решение уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $u(n, x)$, тогда $u(n, x)$ либо неотрицательное, либо неположительное. Рассмотрим первый случай (второй приводит к первому подстановкой) $u(n, x) > 0 \forall (n, x) \in D_1$. Зафиксируем число $n_2 \geq n_1$, такое, чтобы $\forall n \geq n_2$ выполнялись неравенства $h(n) \geq n_1, \delta(n) \geq n_1$. Тогда $\forall (n, x) \in D_2, u[h(n), x] \geq 0, u[\delta(n), x] \geq 0$. С учетом этих неравенств и условий теоремы из тождества (3) вытекает неравенство

$$L_3(y) + c_0 g_0(n) \leq 0, \quad c = c_0 \text{mes} Q.$$

По лемме 1 и лемме 2 имеет $\lim y(n) = 0$. Следовательно, предположение существования неосциллирующего решения уравнения (1) приводит к противоречию, поэтому решение уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Для иллюстрации теории находим численное решение для конечной разности третьего порядка

Разработка веб-приложения для моделирования и визуализации решений различных нелинейных разностных уравнений с возможностью задания произвольных начальных условий и формул. Как нам известно, что разностные уравнения — это уравнения, где значения функции на различных шагах времени связаны определенными правилами. Нелинейные разностные уравнения часто описывают сложную динамику в системах популяций, экономике, физике и других областях науки.

Решение таких уравнений требует учета порядка уравнения, начальных условий и вычисления по рекурсивной формуле.

Описание структуры приложения. Приложение включает в себя следующие основные блоки:

- **Интерфейс пользователя:**
 - Форма для ввода параметров моделирования.
 - Выпадающий список для выбора готовых шаблонов уравнений.
 - Кнопка запуска расчета и отображение формулы в LaTeX-формате.
- **Отображение результатов:**
 - Построение графика на элементе <canvas> с помощью библиотеки Chart.js.
 - Обновляемое текстовое представление формулы через MathJax.
- **Функциональные возможности:**
 - Переключение темы оформления (светлая/темная).
 - Динамическое обновление графика без перезагрузки страницы.

Выбор языков программирования и технологий

1. HTML5

HTML5 выбран для создания структуры веб-страницы благодаря своей универсальности и широкому распространению. Он поддерживается всеми современными браузерами и обеспечивает элементы, необходимые для построения форм и графических компонентов.

2. CSS3

CSS3 используется для стилизации интерфейса, добавления плавной анимации при смене темы и обеспечения адаптивности интерфейса для различных устройств.

3. JavaScript

JavaScript реализует основную логику приложения:

- Обработка ввода пользователя.
- Вычисление решений разностных уравнений.
- Динамическое построение графиков.

JavaScript был выбран за его способность работать нативно, в браузере, без установки дополнительных плагинов, что повышает доступность приложения.

4. MathJax

MathJax обеспечивает качественное отображение математических формул, что особенно важно для разностных уравнений, требующих использование сложной записи индексов и функций.

5. Chart.js

Chart.js выбран для построения графиков благодаря его простоте использования, поддержке анимации и широким возможностям кастомизации внешнего вида графиков.

Особенности реализации

- Поддержка пользовательских формул на JavaScript с обработкой ошибок ввода.
- Отображение математических формул через MathJax.
- Реализация плавной смены темы без перезагрузки страницы.
- Использование динамического построения функций через `new Function`, что позволяет интерпретировать текстовые формулы.

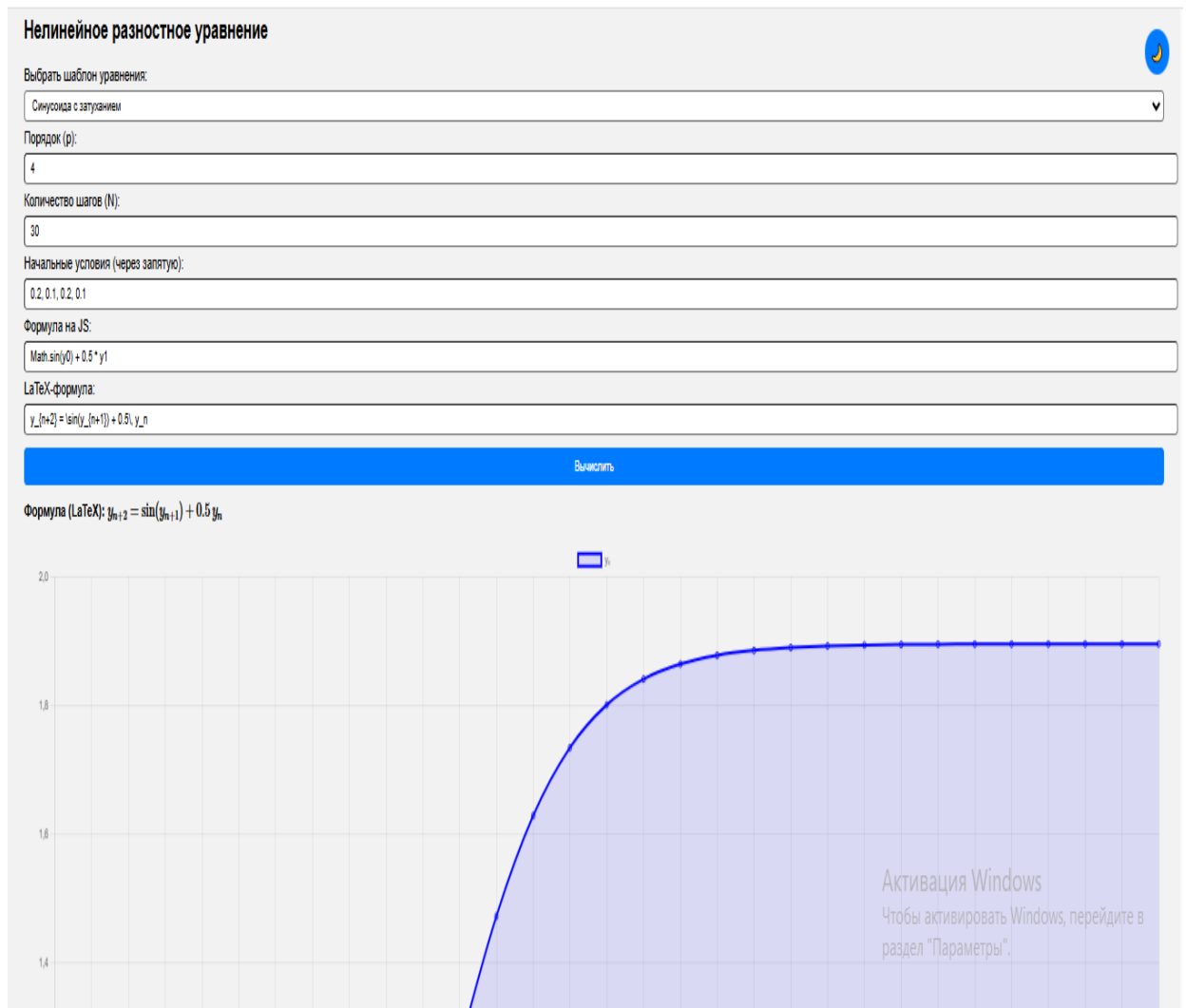


Рисунок 1 — Интерфейс приложения: форма ввода и график решения

Возможности расширения

- Добавление новых шаблонов нелинейных разностных уравнений.
- Расширение функциональности для систем уравнений (многомерных моделей).
- Поддержка сохранения и загрузки пользовательских настроек.
- Реализация анализа устойчивости решений.
- Анимация по шагам решения (динамическое отображение точек).

Выводы

Разработанное веб-приложение позволяет моделировать поведение нелинейных разностных уравнений с высокой наглядностью. Выбранные технологии обеспечивают высокую производительность, простоту распространения и кроссплатформенность решения.

Возможность динамической смены параметров, построения графиков и работы с формулами делает приложение эффективным инструментом для учебных и исследовательских целей.

Литература

1. Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. — Фрунзе: Илим, 1985.
2. Быков Я.В., Мерзлякова Г.Д., Шевцов Е.И. Об осциллируемости решений нелинейных разностных уравнений //Дифференциальные уравнения. — 1975. — Том II. — №8.
3. Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного четного порядков. — Фрунзе: Илим, 1990.
4. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольных нечетных порядков. — Бишкек: 214. — С.177.
5. Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. // Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения» Института программных систем РАН. — Переславль-Залесский, 2006. — Стр.379—387.
6. Харди Н.Г., Литтлвуд Дж.Е. и Поля Г. — Неравенство. —М.: ИИЛ, 1948. —456 с.
7. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: ГИФМ Л, 1962.