ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ С МГНОВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ И ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Сатыбаев А.Дж., Матисаков Ж.К.
Ошский технологический университет, Кыргызстан, abdu-satybaev@mail.ru

Эта статья является продолжением предыдущей статьи и здесь доказывается сходимости приближенного конечно-разностного решения к точному решению задачи.

Конечно-разностное решение.

При решении последней задачи (9.) конечно-разностным методом нам потребуются значения $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ при $t = |\alpha|$. Значение $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ при $t = |\alpha|$ находим из (9.), а остальные из (6.)

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial \vartheta(\alpha, y, t)}{\partial y}\right|_{|\alpha|=t} = S_y(t, y), t \in (0, T),\ y \in (-D, D), \\ &\left.\frac{\partial \vartheta(\alpha, y, t)}{\partial t}\right|_{|\alpha|=t-0} = S_t(t, y) + R(t, y),\ t \in (0, T), y \in (-D, D), \\ &\left.\frac{\partial \vartheta(\alpha, y, t)}{\partial \alpha}\right|_{|\alpha|=t} = -sign\alpha\ R(t, y),\ t \in (0, T), y \in (-D, D)\ . \end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

Приближенное решение задачи (9) будем строить, конечно-разностным методом и для этого введем равномерную сеточную область, разностные отношения и обозначения (см. список обозначения) и в дальнейшем, для сокращения в обозначениях (10) индексы i, j, k в решении разностной схемы будем опускать или частично опускать, например

$$V_{\bar{\alpha}}(i, j, k) = V_{\bar{\alpha}},\ V_{\bar{t}}(i, j),\ V_{\bar{y}}(k, j+1) = \frac{V_{ij+1}^k - V_{ij}^k}{h_2},$$

$$V(k, j-1) = V_{ij-1}^k,\ V_{\bar{y}}(i, k-1) = \frac{V_{ij}^{k-1} - V_{ij-1}^{k-1}}{h_2},$$

$$V_{\bar{t}}(i, j) = \frac{V_{ij}^k - V_{ij}^{k-1}}{\tau},\ V_\alpha(i, j, k+1) = \frac{V_{i+1j}^{k+1} - V_{ij}^{k+1}}{h_1} \text{ и т.д.}$$

Предположим, что решение задачи (9) – достаточно гладкая функция для применения разностной схемы .

Заменим дифференциальную задачу (9) разностной задачей, отбрасывая малые члены порядка $O\left(h_1^2, h_2^2, \tau^2\right)$:

$$\left.\begin{aligned} &V_{t\bar{t}} = V_{\alpha\bar{\alpha}} + LV_{ij}^k,\quad (ih_1, jh_2\tau k) \in \Omega_{ij}^k, \\ &V_{\pm i, j}^{|2i|} = S_j^{|2i|},\quad i = -\overline{N, N};\ j = -\overline{L, L}; \\ &V_{i,L}^k = V_{i,-L}^k = 0,\quad i = -\overline{N, N}; k = \overline{|2i|, 2N}; \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где

$$LV_{ij}^{k}=c_{ij}^{2}\left[V_{y\bar{y}}+\alpha_{ij}V_{\alpha\bar{y}}+\Delta\alpha_{ij}V_{\overset{0}{\alpha}}\right]-\frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{\alpha}}}{\rho_{ij}}V_{\overset{0}{\alpha}}-$$

$$-c_{ij}^{2}\left[\frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{\alpha}}}{\rho_{ij}}\alpha_{ij}V_{\overset{0}{y}}+\frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{y}}}{\rho_{ij}}\alpha_{ij}V_{\overset{0}{\alpha}}+\frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{y}}}{\rho_{ij}}V_{\overset{0}{y}}\right],$$

$c_{ij},\alpha_{ij,}\ \Delta\alpha_{ij},\ \rho_{ij},\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{\alpha}},\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{y}},\ S_{j}^{k}-$ разностные аналоги функции $c(\alpha,y),\alpha_{y,},\Delta\alpha,\rho(\alpha,y),\rho_{\alpha},\rho_{y,}S(t,y)-$ соответственно, а индекс $\pm i$ соответствует направлению координат.

Введем обозначение и норму

$$\Pi_{5}=\max_{i=\overline{-N,N}}\max_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|c_{ij}\right|,\left|\left(c_{ij}\right)_{\overset{0}{\alpha}}\right|,\left|\left(c_{ij}\right)_{\overset{0}{y}}\right|\right\},\quad \Pi_{6}=\max_{i=\overline{-N,N}}\max_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|\left(\alpha_{ij}\right)_{\bar{y}}\right|,\left|\Delta\alpha_{ij}\right|\right\},$$

$$\Pi_{7}=\min_{i=\overline{-N,N}}\min_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|c_{ij}\right|,\left|\left(c_{ij}\right)_{\overset{0}{\alpha}}\right|,\left|\left(c_{ij}\right)_{\overset{0}{y}}\right|\right\},\quad \Pi_{8}=\min_{i=\overline{-N,N}}\min_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|\left(\alpha_{ij}\right)_{\bar{y}}\right|,\left|\Delta\alpha_{ij}\right|\right\}$$

$$\Pi_{9}=\max_{i=\overline{-N,N}}\max_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|\rho_{ij}\right|,\left|\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{\alpha}}\right|,\left|\left(\rho_{ij}\right)_{\overset{0}{y}}\right|\right\},\quad \Pi_{10}=\min_{i=\overline{-N,N}}\min_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|\rho_{ij}\right|\right\},\quad \left\|V\right\|^{2}$$

$$\left(i,k\right)=h_{1}h_{2}\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}(V_{ij}^{k})^{2}.$$

Каждый член сеточного уравнения (14) умножим на $\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)$ и получим следующий дискретный аналог дифференциального произведения:

$$V_{t\bar{t}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)=\left[V_{\bar{t}}^{2}(k)\right]_{t},$$

$$V_{\alpha\bar{\alpha}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)=\left[V_{\alpha}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{\alpha}-\left[V_{t}+V_{\bar{t}}\right]_{\alpha}V_{\bar{\alpha}}(i+1)=$$

$$=\left[V_{\alpha}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{\alpha}-\left[V_{\alpha}^{2}\right]_{t}+\left[\left(V_{\alpha}V_{\bar{t}\alpha}\right)(k+1)-\left(V_{\alpha}V_{\bar{t}\alpha}\right)(k)\right],$$

$$c_{ij}^{2}V_{y\bar{y}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)=\left[c_{ij}^{2}V_{\bar{y}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{y}-c_{ij}^{\ 2}\left[V_{y}^{2}\right]_{t}+$$

$$+c_{ij}^{2}\left[\left(V_{y}V_{\bar{t}y}\right)(k+1)-\left(V_{y}V_{\bar{t}y}\right)(k)\right]-\left[\left(c_{ij}^{2}\right)_{\bar{y}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right](j+1)V_{y,}$$

$$c_{ij}^{2}\alpha_{j}V_{\alpha\bar{y}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)=\left[c_{ij}^{2}\alpha_{j}V_{\alpha}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{\bar{y}}-$$

$$-\left\{\left[c_{ij}^{2}\alpha_{j}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{y}V_{\alpha}\right\}(j-1)=\left[c_{ij}^{2}\alpha_{j}V_{\alpha}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{\bar{y}}-$$

$$-\left\{c_{ij}^{2}\alpha_{j}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)_{y}V_{\alpha}+\left[\left(c_{ij}^{2}\alpha_{j}\right)_{\bar{y}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right](j+1)V_{\alpha}\right\}(j-1)=$$

$$=\left[c_{ij}^{2}\alpha_{j}V_{\alpha}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right]_{\bar{y}}-\left\{c_{ij}^{2}\alpha_{j}V_{\alpha}\left[V_{y}(k+1)-V_{y}(k)\right]/\tau+\right.$$

$$\left.+\left[\left(c_{ij}^{2}\alpha_{j}\right)_{\bar{y}}\left(V_{t}+V_{\bar{t}}\right)\right](j+1)V_{\alpha}\right\}\cdot(j-1),$$

$$\Delta\alpha_{ij} V_{\underset{\alpha}{0}} \left[V_t + V_{\bar t}\right] = \Delta\alpha_{ij} V_{\underset{\alpha}{0}} \left[V_t + V_{\bar t}\right],$$

$$\frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_\alpha}{\rho_{ij}} V_{\underset{\alpha}{0}} \left(V_t + V_{\bar t}\right) = \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_\alpha}{\rho_{ij}} V_\alpha \left[V(k+1) - V(k-1)\right]/\tau,$$

$$c_{ij}^2 \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_\alpha}{\rho_{ij}} \alpha_j V_{\underset{y}{0}} \left[V_t + V_{\bar t}\right] = c_{ij}^2 \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_\alpha}{\rho_{ij}} \alpha_j V_{\underset{y}{0}} \left[V(k+1) - V(k-1)\right]/\tau,$$

$$c_{ij}^2 \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_y}{\rho_{ij}} \alpha_j V_{\underset{y}{0}} \left[V_t + V_{\bar t}\right] = c_{ij}^2 \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_y}{\rho_{ij}} \alpha_j V_{\underset{\alpha}{0}} \left[V(k+1) - V(k-1)\right]/\tau,$$

$$c_{ij}^2 \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_y}{\rho_{ij}} V_{\underset{y}{0}} \left[V_t + V_{\bar t}\right] = c_{ij}^2 \frac{\left(\rho_{ij}\right)^0_y}{\rho_{ij}} V_{\underset{y}{0}} \left[V(k+1) - V(k-1)\right]/\tau.$$

Умножая все выше полученные на $\tau h_1 h_2$, просуммировав по индексам $j = \overline{-L+1, L-1}$; $i = \overline{-N+2, N-2}$; $k = \overline{|2i|+3, 2N-1}$, и используя введенные обозначения имеем

$$\tau\ h_{11} h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left[V_{t\bar t}\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right] = \left\|V_{\bar t}\right\|^2 \left(i, 2N\right) - \left\|V_{\bar t}\right\|^2 \left(i, |2i|+3\right),$$

$$\tau\ h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left[V_\alpha^2\right]_t == \left\|V_\alpha\right\|^2 \left(i, 2N\right) - \left\|V_\alpha\right\|^2 \left(i, |2i|+3\right),$$

$$\tau\ h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left[V_y^2\right]_t = \left\|V_y\right\|^2 \left(i, 2N\right) - \left\|V_\alpha\right\|^2 \left(i, |2i|+3\right),$$

$$\tau\ h_{11} h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left\{\left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right]\left(i+1, k\right) - \right.$$

$$\left. - \left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right]\left(i, k\right)\right\} \Big/ h_1 = \frac{\tau}{h_1}\left[\ \rangle\sum_{i=0}^{-N+2} - \left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|\left(i, |2i|+3\right) - \right.$$

$$- \ \rangle\sum_{i=0}^{-N+3} \left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|\left(i, |2i|+4\right) + \ \rangle\sum_{i=-N+2}^{-1} \left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|\left(i, |2i|+1\right) +$$

$$\left. + \ \rangle\sum_{i=1}^{N-2} \left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|\left(i, |2i|+2\right)\right] \le \left\|\Gamma\right\|_1^2 \left(i, |2i|+3\right).$$

Символ $\rangle\sum\limits_{i=\nu_1}^{\nu_2}$ означает, что суммирование осуществляется по i от ν_1 до ν_2 на характеристиках и

$$\left\|\Gamma\right\|_1^2 \left(i, |2i|+3\right) = \frac{\tau}{h_1}\left\{\ \rangle\sum_{i=0}^{-N+2} \left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)\left(i, |2i|+2\right) + \right.$$

$$+ \ \rangle\sum_{i=0}^{-N+3} \left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)\left(i, |2i|+4\right) + \ \rangle\sum_{i=-N+2}^{-1} \left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)\left(i, 2i+1\right) +$$

$$+\ \rangle\sum_{i=1}^{N-2}\left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2+\left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)\left(i,|2i|+3\right)\Big\}\ .$$

Оценивая теперь остальные выражения по методике [6] имеем

$$\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\tau}{h_2}\Pi_5^2-\frac{\tau}{h_1}\Pi_7^2\Pi_8\right]\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,2N)+\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\Pi_7^2\Pi_8\right]\left\|V_\alpha\right\|^2(i,2N)+$$

$$+\left[\Pi_7^2-\frac{\tau\Pi_5^2}{h_2}-\Pi_7^2\Pi_8-\frac{\tau}{h_1}\Pi_7^2\Pi_8\right]\left\|V_y\right\|^2(i,2N)\le$$

$$\le\|\Gamma\|_1^2(i,/2i/+3)+\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\tau}{h_2}\Pi_5^2+\frac{\tau}{h_1}\Pi_5^2\Pi_6\right]\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,/2i/+3)+$$

$$+\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\Pi_5^2\Pi_6\right]\left\|V_\alpha\right\|^2(i,/2i/+3)+\left[\Pi_7^2+\frac{\tau\Pi_5^2}{h_2}+\right.$$

$$\left.+\Pi_5^2\Pi_6+\frac{\tau}{h_1}\Pi_5^2\Pi_6\right]*\left\|V_y\right\|^2(i,/2i/+3)+\left[2\tau\Pi_5^2+3\tau\Pi_5^2\Pi_6+\frac{\tau\Pi_9}{\Pi_{10}}+2\frac{\Pi_5^2\Pi_6\Pi_9\tau}{\Pi_{10}}+\right.\tag{15}$$

$$\left.+\frac{\Pi_5^2\Pi_9\tau}{\Pi_{10}}\right]\sum_{k=/2i/+3}^{2N}\|V\|_1^2(i,k)$$

где $\quad \|V\|_1^2(i,k)=\left(\left\|V_{\bar t}\right\|^2+\left\|V_\alpha\right\|^2+\left\|V_y\right\|^2\right)(i,k).$

Из (15) получим

$$\|V\|_1^2(i,2N)\le\frac{1}{P_2}\|\Gamma\|_1^2(i,|2i|+3)+\frac{P_3}{P_2}\|V\|_1^2(i,|2i|+3)+$$

$$+\frac{\tau p_4}{P_2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\|V\|_1^2(i,k),\tag{16}$$

здесь

$$p_3=\max\left\{\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\tau}{h_2}\prod\nolimits_5^2+\frac{\tau}{h_1}\prod\nolimits_5^2\prod\nolimits_6\right],\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\prod\nolimits_5^2\prod\nolimits_6\right],\right.$$

$$\left.\left[\prod\nolimits_7^2+\frac{\tau\prod_5^2}{h_2}+\prod\nolimits_5^2\prod\nolimits_6+\frac{\tau}{h_1}\prod\nolimits_5^2\prod\nolimits_6\right]\right\},$$

$$p_4=\left[2\prod\nolimits_5^2+3\prod\nolimits_5^2\prod\nolimits_6+\frac{\prod_9}{\prod_{10}}+\frac{\prod_5^2\prod_9}{\prod_{10}}+\frac{\prod_5^2\prod_6\prod_9}{\prod_{10}}\right].$$

В силу равенства $V(i,2N)=V(i,|2i|+3)+\tau\sum\limits_{k=|2i|+4}^{2N}V_{\bar t}(i,k)$ получим неравенства

$$\|V\|^2(i,2N)\le\|V\|^2(i,|2i|+3)+2\|V\|(i,|2i|+3)\tau\sum_{k=/2i/+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)+$$

$$+\left[\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)\right]^2\le 2\left\|V\right\|^2(t,|2i|+3)+4N\tau^2\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_t\right\|^2(i,k).$$

Таким образом, усиливая оценки, из последнего неравенства получим

$$\left\|V\right\|^2(i,2N)\le 2\left\|V\right\|^2(i,/2i/+3)+4N\tau^2\sum_{k=/2i/+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,k). \tag{17}$$

Из неравенств (1.36) и (1.37) имеем

$$\begin{gathered}\left\|V\right\|_2^2(i,2N)\le\frac{1}{P_2}\left\|\Gamma\right\|_1^2(i,|2i|+3)+\frac{P_3}{P_2}\left\|V\right\|_1^2(i,|2i|+3)+\\ +2\left\|V_t\right\|^2(i,|2i|+3)+\left[\frac{\tau\mathrm{P}_4}{\mathrm{P}_2}+4N\tau^2\right]\sum_{k=/2i/+3}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|_2^2(i,k),\end{gathered} \tag{18}$$

где $\left\|V\right\|_2^2(i,k)=\left\|V\right\|_1^2(i,k)+\left\|V\right\|^2(i,k).$

Используя дискретный аналог неравенства Гронуолла-Беллмана, из (18) имеем

$$\begin{gathered}\left\|V\right\|_2^2(i,2N)\le P_5\left[\left\|\Gamma\right\|_2^2(i,|2i|+3)+\left\|V\right\|_2^2(i,|2i|+3)\right]\exp\left[\left(\frac{\tau P_4}{P_2}+4N\tau^2\right)t\right],\\ P_5=\max\left\{2,\frac{P_3}{P_2},\frac{1}{P_2}\right\}.\end{gathered} \tag{19}$$

Если считать, что υ_{ij}^k – точное сеточное решение задачи (14), т.е. с малыми членами $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$, то и для υ_{ij}^k также можно получить оценку (19) но с малым членом $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$.

Следовательно

$$\begin{gathered}\left\|\vartheta-V\right\|(i,2N)\le P_6(5\tau^2+h_2^2),\qquad h_1=2\tau,\\ \textit{где}\qquad P_6=\exp\left\{P_4 T^2\big/P_2+2T^3\right\}\left\|\vartheta\right\|_{C^4}(\Omega(T,D))\big/12\,.\end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 3. Пусть выполнены (2)-(3), (4) и решение задачи (9.) существует и имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно в области $\Omega(T,D)$. Тогда существует $C_2>0$ такое, что при $\tau/h_2<C_2$ решение конечно – разностной задачи (14) сходится к точному решению (9) со скоростью порядка $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$ и справедлива оценка (20). Коэффициент C_2 зависит только от нормы коэффициентов уравнения.

Из эквивалентности задач (9) и (1) следует, что приближенное конечно-разностное решение задачи (14) также сходится к точному решению (1) со скоростью порядка $O(h^2+h_2^2+\tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$, где h – шаг по *z,* при выполнении условии теоремы 3.