# О КОНВЕРГЕНТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**Жуматов С.С.**
**Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан**, sailau.math@mail.ru

Рассмотрим задачу построения устойчивой системы управления следующей структуры, подверженной внешним воздействиям

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi - g(t), \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \quad t \in I = [0, \infty[\,, \tag{1}$$

по заданному $(n-s)$-мерным гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемым векторным уравнением

$$\omega(x,t) = 0\,, \tag{2}$$

где $B \in R^{n\times r}$, $P \in R^{s\times r}$ – матрицы, $x \in R^n$ – вектор состояния объекта, $f \in R^n$ – вектор-функция, $g \in R^s$ – вектор внешних возмущений, $\omega \in R^s$ -вектор $s \le n$, $\xi \in R^r$ – вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям локальной квадратичной связи и дифференцируемый по $\sigma$ в угле $[0, K]$, т.е.:

$$\begin{gathered}\varphi^T\theta\left(\sigma - K^{-1}\varphi\right) > 0, \theta = diag\|\theta_1,\ldots,\theta_r\|, K = K^T > 0,\\ K_1 \le \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} \le K_2, \quad K_i = diag\|k_1,\ldots,k_r\| \quad (i = 1,2), \quad K_2 >> 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Известно, что при построении систем программного движения, на программное многообразие накладываются дополнительные условия, как устойчивость, оптимальность, а также другие требование на качество переходного процесса. Вопросы построения систем дифференциальных уравнений по заданному многообразию в различной постановке исследовались в [1 – 7].

В пространстве $R^n$ выделим область $G(R)$:

$$G(R) = \{(t,x) : t \in I \wedge \|\omega(t,x)\| \le \rho < \infty\}. \tag{4}$$

Учитывая необходимое и достаточное условия того, что многообразие $\Omega$ будет интегральным для системы (1) имеем

$$\dot{\omega} = F(t,x,\omega) - HB\xi - Hg(t),\ \xi = \varphi(\sigma),\ \sigma = P^T\omega,\ H = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \tag{5}$$

Здесь $F(t,x,\omega)$ – функция Еругина [1], удовлетворяющая условию $F(t,x,0) \equiv 0$. Полагая в (5), что $F = -A\omega, -A \in R^{s\times s}$ -гурвицева матрица, получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi - Hg(t), \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega\,. \tag{6}$$

В [8 – 10] получены условия конвергентности нелинейных систем, В рассматриваемой работе мы исследуем условия конвергентности в окрестности программного многообразия.

**Определение 1.** Будем говорить, что программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством конвергенции относительно вектор-функции $\omega$, если в области (4) определены все $\omega(t,t_0,\omega_0)$ при $t \ge t_0$, существует единственное решение $\eta(t)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{t\to\infty}[\omega(t,t_0,\omega_0) - \eta(t)] = 0\,.$$

**Определение 2.** Будем говорить, что программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции $\omega$ при $t \to \infty$, если в области (4) существуют $N > 0, \alpha > 0$ такие, что выполняется

$$\|\omega_1(t) - \omega_2(t)\| \le N\|\omega_1(t_0) - \omega_1(t_0)\|\exp[-\alpha(t - t_0)] \quad (t \ge t_0) \tag{7}$$

*для любой* $\omega(t_0, x_0)$ *и* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяющей условиям* (3).

Вообще говоря [10], неравенство (7) не означает, что программное многообразие $\Omega(t)$ устойчиво относительно вектор-функции $\omega$ в практическом смысле, поскольку из него не следует даже, ограниченность решений системы (6).

**Ставится задача**: установить условия конвергентности программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $\omega$.

**Теорема 1.** Пусть $-A$ – гурвицева матрица, $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям локальной квадратичной связи, дифференцируема по $\sigma$ и существуют диагональные матрицы $K, \theta, \beta$, кроме того $\beta_i > 0$, такие что

$$\pi(\varpi) = \theta K^{-1} + \mathrm{Re}[(\theta + i\varpi\beta)W(i\varpi)] > 0 \tag{8}$$

и для любого $t \ge t_0$ выполняется (7).

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции $\omega$.

Здесь $W(i\varpi) = P^T(A + i\varpi E)^{-1}HB$ переходная матрица линейной части системы (6).

**Теорема 2.** Пусть линеаризованная система (6) асимптотически устойчива при нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ удовлетворяющей условию (3) и для $\varphi(\sigma) = \mu\sigma, \mu \in [0, K]$ существует положительно-определенная функция $V(\omega, \xi) > 0$, производная которой в силу системы (6) является отрицательно-определенной $\dot{V} = W(\omega, \xi) > 0$ и для произвольного $t \ge t_0$ выполняется соотношение (7).

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством экспоненциальной конвергентности относительно вектор-функции $\omega$.

**Идея доказательства.** Алгебраический и частотный условия асимптотической устойчивости в целом программного многообразия $\Omega(t)$ устанавливаются с помощью построения функции Ляпунова типа «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности»:

$$V(\omega, \xi) = \omega^T L\omega + \int_0^\sigma \varphi^T \beta d\sigma > 0, \tag{9}$$

где $L = L^T > 0, \beta = diag(\beta_1, \ldots, \beta_r) > 0$.

При вычислении производной применяется $S$-процедура:

$$S = \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1}\varphi) > 0. \tag{10}$$

Рассматриваются два произвольных решения системы (6) $\omega_1(t), \omega_2(t), \xi_1(t),$ и $\xi_2(t), \sigma_1(t), \quad \sigma_2(t).$

Введя

$$z = \omega_1(t) - \omega_2(t), \ \zeta = \xi_1(t) - \xi_2(t), \ \eta = \sigma_1(t) - \sigma_2(t) \tag{11}$$

систему (6) преобразуем к виду

$$\dot{z} = -Az - HB\zeta, \quad \eta = P^T z \tag{12}$$

Система (12) рассматривается как линейная часть некоторой системы, когда отношение входа и выхода нелинейной части удовлетворяют условиям

$$K_1 \le \frac{\zeta(t)}{\eta(t)} \le K_2 \quad при \quad \eta(t) \ne 0.$$

Можно показать, что при ограничении на внешнее воздействие и при выполнении условий теорем все решении рассматриваемых систем ограничены. Вместе с этим у системы (6) существует единственный предельный режим – решение $\omega^{(0)}(t)$, которое ограничено на $I$. Из соотношении (7) следует, что любое другое решение $\omega(t)$ экспоненциально приближается при $t \to \infty$ к решению $\omega^{(0)}(t)$.

Пусть нелинейный блок стационарен. При этом дополнительном предположении, можно показать, что при периодическом или почти периодическом внешнем воздействии предельный режим $\omega^{(0)}(t)$ будет соответственно также периодическим с тем же периодом или почти периодическом. Если внешнее воздействие случайный стационарный процесс, то предельный режим $\omega^{(0)}(t)$ будет также соответственно стационарным или эргодическим случайным процессом.

Для нестационарных нелинейностей справедливо следующее утверждение: если внешнее воздействие почти периодическая функция и нелинейность также почти периодическая функция (равномерная по $\sigma$ при $|\sigma| \le const$), то предельный режим $\omega^{(0)}(t)$ будет также почти периодической функцикй.

Пусть в системе (5) функция Еругина имеет следующую структуру $F(t,\omega)$ и для малого $m > 0$ выполняется

$$\sup_t F(t,0) = m. \tag{13}$$

Рассмотрим систему (6) в виде

$$\dot{\omega} = F(t,\omega) - HB\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega. \tag{14}$$

Для системы (14) строим функцию Ляпунова типа (9). А симметрическая матрица Якоби имеет вид

$$J = 1/2\left[\frac{\partial F}{\partial \omega} L + L\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)^T\right]. \tag{15}$$

При замене $\varphi(\sigma) = h\sigma, h \le K$, второе слагаемое функции (8) $S_1 = 1/2\sigma^T h\beta\sigma$. Продифференцировав эту функцию по времени в силу системы (14), после применения $s$-процедуры получим

$$-\dot{V} = \omega^T G + \varphi^T C_1 \varphi + S, \tag{16}$$

где

$$G = 2F(t,\omega), \quad LN = \Gamma, \quad C_1 = \beta P^T N + \theta K^{-1}, \quad \Gamma = 1/2\left(P\theta - F^T P\beta\right), \quad N = HB.$$

Пусть $l_1, l_2$ и $\gamma_1, \gamma_2$ наименьшие и наибольшие характеристические корни матриц (15) и $S_1$. Тогда преобразуя (16) и применяя лемму 2 [8, стр.284] получим

$$-\dot{V} \ge \mu\|\omega\|^2 - F(t,0)\omega + \nu_1\|\omega\|^2.$$

Отсюда , с учетом соотношения (13) имеем

$$-\dot{V} \ge \mu\|\omega\|^2 - m\|\omega\| + \nu_1\|\omega\|^2 \ge 0$$

при условии

$$\|\omega\| \ge \frac{m}{\mu + \upsilon_1} = \rho.$$

Следовательно, все решения $\omega(t, t_0, \omega_0)$ лежат в области (4) если $\|\omega\| = \rho$ и по лемме 3 [8, стр.284] существует решение $\eta = \eta(t)$ линеаризованной системы (14) $\varphi(\sigma) = h\sigma, h \le K$, определенное и ограниченное на $I$.

Пусть $\omega(t)$ любое решение системы (14), при $\varphi(\sigma) = h\sigma, h \le K$, определяемое начальным условием $\omega(t_0) = \omega_0$. Положим

$$z = \omega(t) - \eta(t)$$

и

$$V(\omega) = 1/2\omega^T \omega.$$

В силу того, что

$$\dot{x} = F(t, \omega) - F(t, \eta),$$

на основании леммы 2 [8, стр.284] будем иметь

$$-\dot{V} = [F(t, \omega) - F(t, \eta)]\omega \ge \mu\omega^T \omega = 2\mu V.$$

Откуда при $t \ge t_0$ получаем

$$V\|z(t)\| \le V\|z(t_0)\| \exp[-2\mu(t - t_0)]$$

или

$$\|\omega(t) - \eta(t)\| \le \|\omega(t_0) - \eta(t_0)\| \exp[-2\mu(t - t_0)] \text{ при } t \ge t_0.$$

Следовательно, $\eta(t)$ асимптотически устойчиво в целом и оно устойчиво экспоненциально. Из этого неравенства следует единственность ограниченного на оси $t \in I = [0, \infty[$ решения $\eta(t)$. Значит система (14) конвергентна.

Таким образом, справедлива:

**Теорема 3.** Пусть в системе (14) $F(t, \omega)$ удовлетворяет условию (13) и существует матрица $L = L^T > 0$ такая, что матрица Якоби (15) является симметрической и выполняется равенство $LN = \Gamma$. Если наибольший характеристический корень симметрической матрицы Якоби удовлетворяет неравенству

$$l_2(t, \omega) \le -\mu < 0,$$

то программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством конвергентности относительно вектор-фугкции $\omega$.

**Следствие 1.** Пусть линеаризованная система (6) асимптотически устойчива при $\varphi(\sigma) = \mu\sigma, \mu \in [0, K]$, вектор-функция $g_1(t)$ ограничена для всех $t \in I = [0, \infty[$:

$$\sup_t \|g_1(t)\| = C < \infty,$$

то программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством конвергентности относительно вектор-функции $\omega$, и единственное ограниченное на $I = [0, \infty[$ решение системы (6) представляется в виде:

$$\eta(t) = \int_0^t \exp[A_1(t - \tau)] g_1(t) d\tau > 0.$$

*Здесь* $A_1(t) = A + HB\mu P^T, \quad g_1(t) = Hg(t)$.

В силу теоремы о конвергентности [8, с.286] справедливо

**Следствие 2.** *Пусть в линеаризованной системе* (6)

$$\sup_t \|g_1(t)\| < \infty$$

и наибольший из характеристических корней $\lambda_s$ симметризованной матрицы

$$A_s(t) = \frac{1}{2}\left[A_1(t) + A_1^T(t)\right]$$

удовлетворяет неравенству

$$\lambda_s(t) \le -\alpha < 0 \quad (t \in I),$$

где $\alpha$ - положительная постоянная, то программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством конвергентности относительно вектор-функции $\omega$.

**Следствие 3.** *Пусть*

$$\dot{\omega} = F(t) + g(\omega), \tag{17}$$

где $F(t)$непрерывная функция, $J(\omega) = g(\omega)$-матрица Якоби.

Если

1) $\sup\limits_t \|F(t)\| < \infty$;

2) наибольший из характеристических корней $l_2(\omega)$ симметрической матрицы Якоби

$$J(\omega) = 1/2\left[\frac{\partial g}{\partial \omega} + \left(\frac{\partial g}{\partial \omega}\right)^T\right]$$

удовлетворяет неравенству

$$l_2(\omega) \le -\mu < 0,$$

где $\mu$ - положительная постоянная, то программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством конвергентности относительно вектор-функции $\omega$.

**Литература**


1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659-670.
2. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р.Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского ун-та Дружбы народов, 1994. № 1.– С.5–21.
3. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. I // Дифференц. уравнения, 1973. № 5. С.846–856.
4. *Мухаметзянов И.А.* Об устойчивости программного многообразия. II // Дифференц. уравнения, 1973. № 6. – С.1037–1048.
5. *Мухаметзянов И. А., Саакян А. О.* Некоторые достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных интегральных многообразий. В кн.: Проблемы механики управляемого движения. – Пермь,1979. С.137–144.
6. *Майгарин Б. Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата, 1980. 316 с.
7. *Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы. 1999. 228 с.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 472 с.
9. *Плисс В.А*. Нелокальные проблемы теории колебаний. М., Наука.1964.
10. *Якубович В.А.*Методы теории абсолютной устойчивости Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М.,Наука, (1975) –С. 74-180.