МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.949.6

Ж.Н. Кутунаев, Н.К. Кадыркулова, Г.К. Ергешова
Ошский технологический университет им.акад. М.М.Адышева,
Ош, Кыргызстан
E-mail: zh.kutunaev@mail.ru, kadyrkulova74@mail.ru
gulshaan.ergeshova@gmail.com

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Технические, инженерные и модельные задачи могут быть решены с помощью дифференциальных уравнений гиперболического типа. Нам известно, что колебательный процесс стержня, струны и т.д. зависит от начальных и граничных условий для полуограниченной струны, и в данной статье разрабатывается математически сложная модель данной струны.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения гиперболического типа, модельные задачи, стержень, процесс колебаний струны, начальные и граничные условия, волны, постоянные коэффициенты.

Введение. Математическое моделирование колебательных процессов является очень актуальным в современной технике, механике, физике и т.д., так как большое количество реальных, а также технологических процессов носит колебательный характер. В частности, идеализацией процесса колебаний балок или длинных стержней является процесс колебаний длинной струны, на которую влияют различные условия на ее концах. В данной работе рассматриваются поперечные колебания длинной струны, которые описываются линейным уравнением в частных производных гиперболического типа с переменными коэффициентами. Предложен способ построения явного вида решения, определенный задачей [1].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geq 0$. Как известно, процесс колебаний полуограниченной струны зависит от граничного условия, от ее начальной формы $u(x,0)$ и распределения скорости $u_t(x,0)$ в начальный момент времени.

Если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных $u(x,0)$ и $u_t(x,0)$ с течением времени ослабевает, т.е. на практике в некоторых случаях заботиться о соблюдении начальных данных нет необходимости. В результате получаются важные классы задач о распространении граничного режима.

Если в начальный момент времени полуограниченная прямая занимает произвольное положение, а начальный импульс равен нулю, то ясно, что колебание осуществляется только за счет граничного режима.

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения колебаний [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{(Cx+D)^2}{AD-BC}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , 0 < x < \infty, t > 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$a_1 u_{tt}(0,t) + a_2 u_t(0,t) + a_3 u_x(0,t) + a_4 u(0,t) = M sin\omega t + N cos\omega t \tag{2}$$

и начальному условию

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 −постоянные коэффициенты.

В [3] показано, что уравнения (1) допускают общее решение вида

$$u(x,t) = (Cx + D)\left(f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D} + t\right) + g\left(\frac{Ax+B}{Cx+D} - t\right)\right), \tag{4}$$

где $A, B, C, D -$ произвольные постоянные, f и $g -$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Эта функция удовлетворяет начальному условию (3), если ее выберем в виде

$$u(x,t) = (Cx + D)\left(f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D} + t\right) + f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D} - t\right)\right). \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по t и по x и подставляя полученные результаты в (2), получаем:

$$a_1 D\left(f''\left(\frac{B}{D} + t\right) + f''\left(\frac{B}{D} - t\right)\right) + a_2 D\left(f'\left(\frac{B}{D} + t\right) + f'\left(\frac{B}{D} - t\right)\right) +$$
$$+a_3\left\{C\left[f\left(\frac{B}{D} + t\right) + f\left(\frac{B}{D} - t\right)\right] + \frac{AD - BC}{D}\left[f'\left(\frac{B}{D} + t\right) + f'\left(\frac{B}{D} - t\right)\right]\right\} +$$
$$+a_4\left[f\left(\frac{B}{D} + t\right) + f\left(\frac{B}{D} - t\right)\right] = M sin\omega t + N cos\omega t.$$

или

$$a_1 D f''\left(\frac{B}{D} + t\right) + \left(a_2 D + \frac{a_3(AD - BC)}{D}\right) f'\left(\frac{B}{D} + t\right) + (a_3 C + a_4 D) f\left(\frac{B}{D} + t\right) +$$
$$+a_1 D f''\left(\frac{B}{D} - t\right) + \left(\frac{a_3(AD - BC)}{D} - a_2 D\right) f'\left(\frac{B}{D} - t\right) +$$
$$+(a_3 C + a_4 D) f\left(\frac{B}{D} - t\right) = M sin\omega t + N cos\omega t.$$

Для краткости введем следующие обозначения:

$$p_1 = a_2 D + \frac{a_3(AD - BC)}{D}, \quad q_1 = \frac{a_3(AD - BC)}{D} - a_2 D, \qquad p_2 = q_2 = (a_3 C + a_4 D)$$

Тогда имеем следующее функционально-дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered} a_1 D f''\left(\frac{B}{D} + t\right) + p_1 f'\left(\frac{B}{D} + t\right) + p_2 f\left(\frac{B}{D} + t\right) + a_1 D f''\left(\frac{B}{D} - t\right) + \\ + q_1 f'\left(\frac{B}{D} - t\right) + q_2 f\left(\frac{B}{D} - t\right) = M sin\omega t + N cos\omega t. \end{gathered} \tag{6}$$

Как известно, общее решение вида (6) можно представить в виде [3]

$$f(t) = \bar{f}(t) + F(t),$$

где $\bar{f}(t) -$ общее решение однородного уравнения, $F(t) -$ какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (6).

Сначала решим однородное уравнение:

$$\begin{gathered} a_1 D f''\left(\frac{B}{D} + t\right) + p_1 f'\left(\frac{B}{D} + t\right) + p_2 f\left(\frac{B}{D} + t\right) + \\ + a_1 D f'' \ + q_1 f'\left(\frac{B}{D} - t\right) + q_2 f\left(\frac{B}{D} - t\right) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде [4]

$$f(t) = e^{mt} + ke^{nt}, \tag{8}$$

где m, n, k –постоянные числа, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7) и положив $m+n=0$, получаем

$$a_1D\left(m^2e^{m\left(\frac{B}{D}+t\right)}+kn^2e^{n\left(\frac{B}{D}+t\right)}\right)+p_1\left(me^{m\left(\frac{B}{D}+t\right)}+kne^{n\left(\frac{B}{D}+t\right)}\right)+p_2\left(e^{m\left(\frac{B}{D}+t\right)}+ke^{n\left(\frac{B}{D}+t\right)}\right)+$$
$$+\frac{1}{e^{(m+n)t}}\left[a_1D\left(m^2e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+kn^2e^{\frac{nB}{D}}e^{mt}\right)+q_1\left(me^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+kne^{\frac{nB}{D}}e^{mt}\right)+\right.$$
$$\left.+q_2\left(e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+ke^{\frac{nB}{D}}e^{mt}\right)\right]=0,$$

или

$$a_1Dm^2e^{\frac{mB}{D}}e^{mt}+a_1Dkn^2e^{\frac{nB}{D}}e^{nt}+p_1me^{\frac{mB}{D}}e^{mt}+p_1kne^{\frac{nB}{D}}e^{nt}+p_2e^{\frac{mB}{D}}e^{mt}+p_2ke^{\frac{nB}{D}}e^{nt}+$$
$$+a_1Dm^2e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+a_1Dkn^2e^{\frac{nB}{D}}e^{mt}+q_1me^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+$$
$$+q_1kne^{\frac{nB}{D}}e^{mt}+q_2e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+q_2ke^{\frac{nB}{D}}e^{mt}=0.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты e^{mt} и e^{nt} к нулю, получаем следующую систему уравнений относительно m, n и k:

$$\begin{cases} m+n=0, \\ e^{\frac{mB}{D}}(a_1Dm^2+p_1m+p_2)=-ke^{\frac{nB}{D}}(a_1Dn^2+q_1n+q_2), \\ e^{\frac{nB}{D}}(a_1Dn^2+p_1n+p_2)=-ke^{\frac{mB}{D}}(a_1Dm^2+q_1m+q_2). \end{cases}$$

Решая эту систему, убеждаемся, что $m=0, n=0, k=-1$ и следовательно [4],

$$\bar{f}(t)=e^{mt}+ke^{nt}=0.$$

Частное решение уравнения (6) будем искать в виде:

$$F(t)=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t.$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} F\left(\tfrac{B}{D}+t\right)&=\alpha\sin\omega\left(\tfrac{B}{D}+t\right)+\beta\cos\omega\left(\tfrac{B}{D}+t\right), \\ F'\left(\tfrac{B}{D}+t\right)&=\alpha\,\omega\cos\omega\left(\tfrac{B}{D}+t\right)-\beta\omega\sin\omega\left(\tfrac{B}{D}+t\right), \\ F''\left(\tfrac{B}{D}+t\right)&=-\alpha\,\omega^2\sin\omega\left(\tfrac{B}{D}+t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\tfrac{B}{D}+t\right), \\ F\left(\tfrac{B}{D}-t\right)&=-\alpha\sin\omega\left(\tfrac{B}{D}-t\right)+\beta\cos\omega\left(\tfrac{B}{D}-t\right), \\ F'\left(\tfrac{B}{D}-t\right)&=\alpha\,\omega\cos\omega\left(\tfrac{B}{D}-t\right)+\beta\omega\sin\omega\left(\tfrac{B}{D}-t\right), \\ F''\left(\tfrac{B}{D}-t\right)&=-\alpha\,\omega^2\sin\omega\left(\tfrac{B}{D}-t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\tfrac{B}{D}-t\right), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получаем

$$a_1\left[-\alpha\,\omega^2\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)\right]+p_1\left[\alpha\,\omega\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)-\beta\omega\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)\right]+$$
$$+p_2\left[\alpha\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)+\beta\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)\right]+a_1D\left[\alpha\,\omega^2\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]+$$
$$+q_1\left[\alpha\,\omega\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)+\beta\,\omega\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]+q_2\left[-\alpha\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)+\beta\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]=$$
$$=M sin\,\omega t+N cos\,\omega t.$$

После некоторых вычислений, сравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, получаем эта два уравнения для определения α и β:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\left(-2a_1D\omega^2cos\tfrac{\omega B}{D}-p_1\omega sin\tfrac{\omega B}{D}+p_2cos\tfrac{\omega B}{D}-q_1\omega sin\tfrac{\omega B}{D}+q_2cos\tfrac{\omega B}{D}\right)-\\&\quad-\beta\left(p_1\omega cos\tfrac{\omega B}{D}+p_2sin\tfrac{\omega B}{D}+q_1\omega cos\tfrac{\omega B}{D}-q_2sin\tfrac{\omega B}{D}\right)=M,\\&\beta\left(-2a_1D\omega^2cos\tfrac{\omega B}{D}-p_1\omega sin\tfrac{\omega B}{D}+p_2cos\tfrac{\omega B}{D}-q_1\omega sin\tfrac{\omega B}{D}+q_2cos\tfrac{\omega B}{D}\right)+\\&\quad+\alpha\left(p_1\omega cos\tfrac{\omega B}{D}+p_2sin\tfrac{\omega B}{D}+q_1\omega cos\tfrac{\omega B}{D}-q_2sin\tfrac{\omega B}{D}\right)=N.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Для краткости введем следующие обозначения:

$$\sigma_1=-2a_1D\omega^2cos\frac{\omega B}{D}-p_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+p_2cos\frac{\omega B}{D}-q_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+q_2cos\frac{\omega B}{D},$$

$$\sigma_2=p_1\omega cos\frac{\omega B}{D}+p_2sin\frac{\omega B}{D}+q_1\omega cos\frac{\omega B}{D}-q_2sin\frac{\omega B}{D}.$$

Тогда система (10) примет вид

$$\begin{cases}\sigma_1\alpha+\sigma_2\beta=M,\\\sigma_1\beta+\sigma_2\alpha=N,\end{cases}$$

откуда

$$\alpha=\frac{M\sigma_1+N\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\quad \beta=\frac{N\sigma_1-M\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Таким образом получим общее решение неоднородного уравнения (6) в виде

$$F(t)=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t=\tfrac{M\sigma_1+N\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sin\omega t+\tfrac{N\sigma_1-M\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cos\omega t.\tag{11}$$

Вывод. Используя (11), построим теперь искомое решение задачи (1) - (3):

$$u(x,t)=(Cx+D)\left\{\frac{M\sigma_1+N\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}sin\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}+t\right)\right]+\right.$$
$$+\frac{N\sigma_1-M\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}cos\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}+t\right)\right]+\frac{M\sigma_1+N\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}sin\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}-t\right)\right]+$$
$$\left.+\frac{N\sigma_1-M\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}cos\left[\omega\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}-t\right)\right]\right\}.$$

Пример. Найти решение (1) – (3) при $a_1=a_4=0,\ A=C=D=1, B=0$.

Решение. В данном случае уравнение (6) имеет вид

$$p_1f'(t)+p_2f(t)+q_1f'(-t)+q_2f(-t)=Msin\,\omega t+Ncos\,\omega t.\tag{12}$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде $F(t)=\alpha sin\,\omega t+\beta cos\,\omega t$. Тогда будем иметь:

$$p_1(\alpha\omega\cos\omega t-\beta\omega\sin\omega t)+p_2(\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t)+q_1(\alpha\omega\cos\omega t+\beta\omega\sin\omega t)+$$
$$+q_2(-\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t)=Msin\,\omega t+Ncos\,\omega t$$

$$\begin{cases}-p_1\beta\omega+p_2\alpha+q_1\beta\omega-q_2\alpha=M,\\ p_1\alpha\omega+p_2\beta+q_1\alpha\omega+q_2\beta=N,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha(p_2-q_2)+\beta\omega(q_1-p_1)=M,\\\alpha\omega(p_1+q_1)+\beta(p_2+q_2)=N,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha(p_2-q_2)-\beta\omega(p_1-q_1)=M,\\\alpha\omega(p_1+q_1)+\beta(p_2+q_2)=N,\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{M(p_2+q_2)+N(p_1-q_1)\omega}{(p_2^2-q_2^2)+(p_1^2-q_1^2)\omega^2},\quad\beta=\frac{N(p_2-q_2)-M(p_1+q_1)\omega}{(p_2^2-q_2^2)+(p_1^2-q_1^2)\omega^2}.$$

В нашем случае $p_1=a_2+a_3,\ p_2=a_3,\ q_1=a_3-a_2,\ q_2=a_3$ и, следовательно,

$$\alpha=\frac{2a_3M+2a_2N\omega}{((a_2+a_3)^2-(a_3+a_2)^2)\omega^2}=\frac{a_3M+a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2},\quad\beta=-\frac{M}{2a_2\omega}.$$

Мы нашли $F(t)$ для примера

$$F(t)=\frac{a_3M+a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\omega t-\frac{M}{2a_2\omega}\cos\omega t.$$

Используя найденное $F(t)$, построим искомое решение:

$$u(x,t) = (x+1)\left\{\frac{a_3M + a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2}sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}+t\right)\right] - \frac{M}{2a_2\omega}cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}+t\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{a_3M + a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2}sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}-t\right)\right] - \frac{M}{2a_2\omega}cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1}-t\right)\right]\right\}.$$

Литература

1. Кутунаев Ж.Н. Обобщенные решения волновых уравнений одного класса. //Проблемы автоматики и управления. - 2019. - С. 141 - 146.
2. Турумбеков А. Функционально-дифференциальные уравнения с конечной группой преобразований аргумента в смешанных задачах. - Ош: Ошский технологический университет, 2002. - 73с.
3. Кутунаев Ж.Н. Решение модельных задач с помощью уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами // Проблемы автоматики и управления. - 2017. - С. 11 -14.
4. Турумбеков А. Функционально-дифференциальные уравнения с конечной группой преобразований аргумента в смешанных задачах. - Ош: Ошский технологический университет, 2002. - 73с.