УДК 517.949.6

Ж.Н.Кутунаев, Г.М.Адиева
zh.kutunaev@mail.ru
Ошский технологический университет, г. Ош, Кыргызстан

РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В статье рассматривается уравнение гиперболического типа, частными случаями которого являются уравнения колебательных процессов, возникающих во многих областях физики, техники, технологии, в природных явлениях – землетрясений, цунами, т.е. в волновых процессах и других задачах.

Ключевые слова: землетрясение, цунами, уравнение с частными производными, уравнение гиперболического типа.

Введение. Как известно, знание общего решения обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, содержащего n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, дает возможность получить любое требуемое частное решение из общего решения при соответствующем выборе этих постоянных.

Для уравнения с частными производными общее решение может быть найдено значительно реже и дело здесь обстоит сложнее. Как мы знаем, простейшее уравнение гиперболического типа $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ исследовано Л.Эйлером и Ж.Даламбером, и ими впервые было получено общее решение в виде

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at),$$

где f и g – произвольные функции своих аргументов.

В дальнейшем вопрос отыскания общих решений тех или иных уравнений с частными производными был предметом исследований многих выдающихся математиков (П.Лаплас, Б. Риман и др.).

Математические модели многих технических и инженерных задач вынуждают рассматривать более общее уравнение гиперболического типа как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Найти общее решение подобных уравнений с помощью ранее известных методов удается редко. В настоящей работе мы используем методы, основанные на простейшей идее.

В некоторых случаях мы обнаружили теснейшую связь между заданным уравнением и его решением в том смысле, что, зная решение, можно восстановить исходное уравнение. Так, например, если известны корни многочлена, то, применяя формулу Виета, можно выразить коэффициенты уравнения через его корни, т.е. можно восстановить исходный многочлен [1]. Далее, можно составить линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений по данной фундаментальной системе ее решений [2]. Аналогичную идею применяем и для уравнений гиперболического типа.
Рассмотрим сумму более общих бегущих волн. Зная решение некоторого уравнения гиперболического типа, постараемся восстановить исходное уравнение.

Постановка задачи. В настоящей работе найдем уравнение гиперболического типа, для которого

$$u(x,t) = \Psi(x)\left[e^{\beta_1 t} f(\varphi(x)+t) + e^{\beta_2 t} g(\varphi(x)-t)\right] \tag{1}$$

служит общим решением, где β_1, β_2 – постоянные числа, φ, Ψ, f, g – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'(x) \neq 0, \Psi(x) \neq 0$.

Решение. Допустим, что бегущая волна (1) удовлетворяет некоторому уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_3 \frac{\partial u}{\partial t} + a_4 u, \tag{2}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4–неизвестные функции, подлежащие определению.

Дифференцируя функцию (1), получим

$$\begin{gathered} u_t = \Psi(x)\left\{e^{\beta_1 t}[\beta_1 f(\varphi(x)+t) + f'(\varphi(x)+t)] + \right. \\ \left. +e^{\beta_2 t}[\beta_2 g(\varphi(x)-t) - g'(\varphi(x)-t)]\right\}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u_{tt} = \Psi(x)\left\{e^{\beta_1 t}[\beta_1^2 f(\varphi(x)+t) + 2\beta_1 f'(\varphi(x)+t) + f''(\varphi(x)+t)] + \right. \\ \left. +e^{\beta_2 t}[\beta_2^2 g(\varphi(x)-t) - 2\beta_2 g'(\varphi(x)-t) + g''(\varphi(x)-t)]\right\}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} u_x = e^{\beta_1 t}[\Psi'(x) f(\varphi(x)+t) + \Psi(x)\varphi'(x) f'(\varphi(x)+t)] + \\ +e^{\beta_2 t}[\Psi'(x) g(\varphi(x)-t) + \Psi(x)\varphi'(x) g'(\varphi(x)-t)], \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u_{xx} = e^{\beta_1 t} \times \\ \times \{\varphi''(x) f(\varphi(x)+t) + [\Psi(x)\varphi''(x) + 2\Psi'(x)\varphi'(x)] f'(\varphi(x)+t) \\ + \Psi(x)[\varphi'(x)]^2 f''(\varphi(x)+t)\} + \\ +e^{\beta_2 t}\{\Psi''(x) g(\varphi(x)-t) + [\Psi(x)\varphi''(x) + 2\Psi'(x)\varphi'(x)] g'(\varphi(x)-t) + \\ +\Psi(x)[\varphi'(x)]^2 g''(\varphi(x)+t)\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Где u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx}, – частные производные по t, x соответствующего порядка

Подставляя $u(x,t)$ из (1) и производные u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx} из (3) – (6) в уравнение (2), получим

$$\begin{gathered} \Psi(x)\left\{e^{\beta_1 t}[\beta_1^2 f(\varphi(x)+t) + 2\beta_1 f'(\varphi(x)+t) + f''(\varphi(x)+t)] + \right. \\ \left. +e^{\beta_2 t}[\beta_2^2 g(\varphi(x)-t) - 2\beta_2 g'(\varphi(x)-t) + g''(\varphi(x)-t)]\right\} = \\ = a_1\left\{e^{\beta_1 t}[\varphi''(x) f(\varphi(x)+t) + [\Psi(x)\varphi''(x) + 2\Psi'(x)\varphi'(x)] f'(\varphi(x)+t) + \right. \\ +\Psi(x)[\varphi'(x)]^2 f''(\varphi(x)+t)] + \\ +e^{\beta_2 t}[\Psi''(x) g(\varphi(x)-t) + [\Psi(x)\varphi''(x) + 2\Psi'(x)\varphi'(x)] g'(\varphi(x)-t) + \\ \left. +\Psi(x)[\varphi'(x)]^2 g''(\varphi(x)-t)]\right\} + \\ +a_2\{[\Psi'(x) f(\varphi(x)+t) + \Psi(x)\varphi'(x) f'(\varphi(x)+t)] + \\ +e^{\beta_2 t}[\Psi'(x) g(\varphi(x)-t) + \Psi(x)\varphi'(x) g'(\varphi(x)-t)]\}+ \end{gathered}$$

$$+a_3\{\Psi(x)[e^{\beta_1 t}(\beta_1 f(\varphi(x)+t)+f'(\varphi(x)+t))+e^{\beta_2 t}(\beta_2 g(\varphi(x)-t)-g'(\varphi(x)-t))]\}$$
$$+a_4\{\Psi(x)[e^{\beta_1 t}f(\varphi(x)+t)+e^{\beta_2 t}g(\varphi(x)-t)]\}.$$

Приравнивая коэффициенты при $f(\varphi(x)+t), f'(\varphi(x)+t), f''(\varphi(x)+t), g(\varphi(x)-t)$, $g'(\varphi(x)+t), g''(\varphi(x)+t)$ в левых и правых частях полученного равенства, имеем

$$\begin{cases} \beta_1^2\Psi(x)=a_1\Psi''(x)+a_2\Psi'(x)+a_3\beta_1\Psi(x)+a_4\Psi(x),\\ 2\beta_1\Psi(x)=a_1[\Psi(x)\varphi''(x)+2\Psi'(x)\varphi'(x)]+a_2\Psi(x)\varphi'(x)+a_3\Psi(x),\\ \Psi(x)=a_1\Psi(x)[\varphi''(x)]^2,\\ \beta_2^2\Psi(x)=a_1\Psi''(x)+a_2\Psi(x)+a_3\beta_2\Psi(x)+a_4\Psi(x),\\ -2\beta_2\Psi(x)=a_1[\Psi(x)\varphi''(x)+2\Psi'(x)\varphi'(x)]+a_2\Psi(x)\varphi(x)-a_3\Psi(x),\\ \Psi(x)=a_1\Psi(x)[\varphi'(x)]^2. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что неизвестные функции a_1,a_2,a_3,a_4 следует определить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{[\varphi'(x)]^2},\\ 2\beta_1=\left(\varphi''^{(x)}+2\varphi'(x)\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\right)\cdot\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}+a_2\varphi'(x)+a_3,\\ -2\beta_2=\left(\varphi''^{(x)}+2\varphi'(x)\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\right)\cdot\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}+a_2\varphi'(x)-a_3,\\ \beta_1^2=\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\cdot\frac{\Psi'\prime(x)}{\Psi(x)}+a_2\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}+a_3\beta_1+a_4,\\ \beta_2^2=\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\cdot\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}+a_2\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}+a_3\beta_2+a_4. \end{cases} \tag{7}$$

Из первых трех уравнений системы (7) найдем a_1,a_2,a_3:

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\\ a_2=\frac{1}{\varphi\prime(x)}\left[\left(\beta_1-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\right)-\left(\beta_2-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\right)\right]-\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^3},\\ a_3=\beta_1+\beta_2=\left(\beta_1-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi\prime(x)}\right)+\left(\beta_2+\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi\prime(x)}\right)=const. \end{cases} \tag{8}$$

Используя найденные значения a_1,a_2,a_3 из четвертого уравнения системы (7) найдем a_4. Тогда, после некоторых вычислений, получим

$$a_4=-\left\{\left(\beta_1-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)\left(\beta_2+\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)+\frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)\right\}. \tag{9}$$

Определение a_4 из пятого уравнения из системы (7) также приводит к результату (9), так что система (7) совместна. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left\{\frac{1}{\varphi'(x)}\left[\left(\beta_1-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)-\left(\beta_2-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)\right]-\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^3}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+$$
$$+(\beta_1+\beta_2)\frac{\partial u}{\partial t}+\left\{\left(\beta_1-\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)\left(\beta_2+\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)+\frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)}\right)\right\}\cdot u \tag{10}$$

допускает общее решение вида (1). Совершенно аналогично можно доказать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{[\varphi'(x)]^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left\{ \frac{1}{\varphi'(x)} \left[\left(\beta_1 - \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)} \right) - \left(\beta_2 - \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)} \right) \right] - \frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^3} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+(\beta_1 + \beta_2) \frac{\partial u}{\partial t} + \left\{ \left(\beta_1 - \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)} \right) \left(\beta_2 + \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)} \right) + \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\varphi'(x)} \right) \right\} \cdot$$

и допускает общее решение вида

$$u(x,t) = e^{\Psi(x)+\beta_1 t} f_1(\varphi(x) + t) + e^{\Psi(x)-C\varphi(x)+\beta_2 t} f_2(\varphi(x) - t).$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, C$– произвольные постоянные числа, φ, Ψ, f_1, f_2 – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x) \neq 0$.

Вывод. Выбор величин β_1, β_2, C и функций $\varphi(x), \Psi(x)$ позволяет получить различные уравнения, часто встречающихся в прикладных, технических и инженерных науках.

Литература

1. Окунев Л.Я. Высшая алгебра.– СПб.: Лань.– 2009. – 336 с.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ.– 2000.– 212 с.
3. Самойленко А.М., Кривошев С.А. Дифференциальные уравнения. Киев: Высшая школа 1990.– 383 с.
4. Дженалиев М.Т. Краевые задачи для нагруженных параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. – 1992. –Т.28, №4.– С.661–666.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.– М.: КомКнига 2007.– 240 с.
6. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения.– М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана.– 2004.– 348 с.