

Х.Ш. Джураев

*Таджикский национальный университет, Таджикистан, Душанбе,
hayrullo_58@mail.ru*

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С помощью математической модели стационарной задачи теплопроводности при переопределенных исходных данных рассматривается проблема непрерывного распределения тепла. Построен класс приближенного решения в виде регуляризирующего оператора, обладающего свойством устойчивости к малым отклонениям исходных данных. При этом важную роль играют выбор сглаживающей функции и условия согласования параметра регуляризации с погрешностью.

Ключевые слова: сглаживающая функция; параметр регуляризации; устойчивость; семейство регуляризирующих операторов; некорректность температуры.

Введение. В многих конденсированных средах непосредственно узнать внутреннюю структуру зачастую невозможно без её разрушения или экономически неэффективно, в частности, по технике, геофизике, экологии и др. Если же в конденсированных средах протекает некоторый процесс, то на основе его математической модели, а также доступных для измерения физических характеристик этого процесса можно попытаться восстановить структуру среды и самого процесса методами решения прямых и обратных задач. В контексте математического моделирования речь идет о решении стационарной задачи теплопроводности, состоящей в определении гармонических функций, когда на одной части границы области граничные условия переопределены, а на остальной части эти условия не доопределены.

Одним из способов восстановления истинных физических решений может быть [1–4] привлечение, (когда это возможно практически) дополнительных, сверх необходимых, данных измерений для построения единственного решения задачи измерений. Были разработаны методы его регуляризации, модификации и аналоги [5–7], которые, помогли преодолеть вычислительные трудности при построении приближенных решений этих задач.

В настоящей работе обсуждается решение неустойчивой задачи определения гармонической в бесконечной полосе функции, рассматриваемое как решение стационарной задачи теплопроводности. Принимается, что на одной грани полосы известны значения температуры и теплового потока, а на другой – никакие граничные условия не заданы. Дополнительно заданы значения температуры в некоторых точках полосы. Предполагается, что значения температуры измерены абсолютно точно, а значения теплового потока – с некоторой погрешностью, поддающейся оценке. Изыскивается способ снижения влияния погрешности заданных граничных условий на решение задачи с использованием дополнительно заданных значений температуры.

Отсутствие непрерывной зависимости распространение тепла от значения температуры и теплового потока создает большие неудобства, особенно при численном решении практических задач. Поэтому были разработаны различные методы приближенного решения практических задач [8, 9]. Эти методы позволяют построить численные решения, непрерывно зависящие от значения температуры и теплового потока. Численные методы решения неустойчивых задач зачастую с трудом поддаются обоснованию. Они очень трудоемки в многомерных расчетах, результаты их применения не дают теоретических обобщений и должны рассматриваться как результаты экспериментов в области «вычислительной физики» [10]. В связи с этим широкое распространение получили аналитические методы, к которым относится и описываемый метод специальных рядов.

Ниже мы обсуждаем отношение к искомому решению реальной физической задачи неустойчивых аналитических решений задач для гармонических уравнений с неклассическими граничными условиями и соответствующих им приближенных решений этих задач. В дальнейшем предполагаем, что заданные граничные значения функций таковы, что решения соответствующих задач существуют и единственные в классе $L_2(-\infty, \infty)$ функций и только отсутствует непрерывная зависимость решений от значения температуры и теплового потока.

1. Построение аналитических решений. Рассмотрим задачу определения стационарного распределения тепла в бесконечной полосе, описываемого гармоническими функциями. Пусть реальное распространение тепла в полосе $D = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq y_0\}$ точно описывается функцией $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция температуры; $\psi(x)$ – заданная функция теплового потока.

Пусть в (1)–(2) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – бесконечно дифференцируемые функции;
- 2) производные $\varphi^{(k)}(x)$ и $\psi^{(k)}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$.

В этом случае для нахождения приближенных решений уравнения (1) с условиями (2) можно применить аналитические методы.

В результате простых математических выкладок и описанного метода специальных рядов получим искомое решение задачи (1)–(2) в виде:

$$u(x, y) = \varphi(x) + y\psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} \left[\frac{d^{2k} \varphi(x)}{dx^{2k}} + \frac{y}{2k+1} \frac{d^{2k} \psi(x)}{dx^{2k}} \right]. \quad (3)$$

Классическая теорема Коши-Ковалевской говорит о существовании решения (3), и его единственности в классе аналитических функций [11].

Очевидно, что для решения задачи (1)–(2) формальным построением конструкций специальных рядов с коэффициентами $\frac{d^{2k} \varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k} \psi(x)}{dx^{2k}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) в виде (3) характерна лишь локальная сходимость. В такой интерпретации решения (3), где функ-

ции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известны из эксперимента с некоторой заданной погрешностью, необходимо учитывать и тот факт, что вычисление операторов дифференцирования функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то есть $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$, неустойчиво к возмущениям в исходных данных [3, 4]. Поэтому для нахождения коэффициентов к бесконечным системам линейных уравнений, их приходится обрезать и получить из этих обрезанных систем приближенные значения коэффициентов.

Для обеспечения сформулированных требований желательно, чтобы коэффициенты рядов находились не путем последовательного дифференцирования (как в рядах Тейлора (3)), а с помощью интегрирования некоторых простых рекуррентных систем обыкновенных уравнений. Представленные ниже конструкции рядов позволяют до некоторой степени удовлетворить указанные требования.

2. Построение приближенных аналитических решений. В решении вида (3) сохраним конечное число слагаемых N .

Пусть

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= \varphi(x), & R_0(x) &= \psi(x), \\ Z_1(x) &= \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}, & R_1(x) &= \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}, \\ Z_2(x) &= \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4}, & R_2(x) &= \frac{d^4\psi(x)}{dx^4}, \\ &\dots \dots \dots, & &\dots \dots \dots, \\ Z_N(x) &= \frac{d^{2N}\varphi(x)}{dx^{2N}}, & R_N(x) &= \frac{d^{2N}\psi(x)}{dx^{2N}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножим систему (4) на $\exp(isx)$, проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ , то есть используем прямое непрерывные преобразование Фурье. В результате имеем систему интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Z_0(x) \exp(isx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp(isx) dx, & \int_{-\infty}^{\infty} R_0(x) \exp(isx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(isx) dx, \\ \dots \dots \dots, & \dots \dots \dots, & \dots \dots \dots, & \dots \dots \dots, \\ \int_{-\infty}^{\infty} Z_N(x) \exp(isx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{2N}\varphi(x)}{dx^{2N}} \exp(isx) dx, & \int_{-\infty}^{\infty} R_N(x) \exp(isx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{2N}\psi(x)}{dx^{2N}} \exp(isx) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем прямым непрерывным преобразованием Фурье в виде:

$$\Phi_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp(isx) dx. \quad (6)$$

Умножим выражение (6) на $\exp(-ist)$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до ∞ . В правой части полученных выражений изменим порядок интегрирования, в результате получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(s) \exp(-ist) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(is(x-t)) ds \right] dx$$

Согласно [12], интеграл Фурье $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) dx$ связан с δ -функцией. Тогда из формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) dx = 2\pi\delta(s) \quad \text{следует, что} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(is(x-t)) ds = 2\pi\delta(x-t)$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(s) \exp(-ist) ds = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x-t) dx = 2\pi\phi(t),$$

откуда получаем

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(s) \exp(-ist) ds. \quad (7)$$

Формула прямого непрерывного преобразования Фурье и обращения функция $\varphi(x)$, аналогичная (6) и (7), имеет место для функции $\psi(x)$:

$$\Psi_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(isx) dx, \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(s) \exp(-isx) ds. \quad (8)$$

Итак, исходя из прямого преобразования Фурье (6) (8), мы получили выражение для обратного преобразования Фурье $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и это можно рассматривать как результат аналитического решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (7)–(8).

Задача вычисления преобразования Фурье является неустойчивой [4], так как связана с решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Это уравнение (7)–(8) решается аналитически, поэтому степень некорректности в значительной степени снижается.

Условия на одной грани полосы известны значения температуры и теплового потока, восстанавливаются соотношением

$$u(x, y) = \varphi(x) + y\psi(x) + \sum_{k=1}^N (-1)^k \left[\frac{y^{2k}}{(2k)!} Z_k(x) + \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} R_k(x) \right], \quad (9)$$

в котором функции $Z_k(x)$, $R_k(x)$ находятся из решения интегральных уравнений

$$AZ_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(x) \exp(-isx) dx = U_1(s), \quad AR_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_k(x) \exp(-isx) dx = U_2(s). \quad (10)$$

Правая часть этого соотношения задаётся приближенно, то есть функции $U_1(s)$, $\varphi(x)$ и $U_2(s)$, $\psi(x)$ известны из эксперимента с некоторой заданной погрешностью, поэтому вычисление операторов дифференцирования $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$ неустойчиво к возмущениям в исходных данных [4]:

$$U_1(s) = (-1)^k s^{2k} \Phi_0(s), \quad U_2(s) = (-1)^k s^{2k} \Psi_0(s).$$

Они характеризуют погрешность правой части (10), то есть $\Phi_0(s)$ и $\Psi_0(s)$ – преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. Здесь уклонение $\Phi_0(s)$ и $\Psi_0(s)$ оценивается в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. (Так как для всякой функции $\eta(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ по теореме Планшереля [11, 12], справедливо равенство Парсевале, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta_0(s)|^2 ds$, а уклонение решения $Z_k(x)$, $R_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) в пространстве $C(-\infty, \infty)$ ($L_1(-\infty, \infty)$).

В работе [4] рассмотрены способы построения широкого класса регуляризирующих операторов, получаемых с помощью классических интегральных преобразований. Следуя [13], с помощью интегрального преобразования Фурье для уравнения (10) построим класс регуляризирующих операторов. Все описанные выше случаи можно оха-

характеризовать как задача отыскания гладкой кривой $Z_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$), удовлетворяющей минимум функционала А.Н.Тихонова:

$$M_\alpha[Z_k, U_1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z_k(x) \exp(-isx) dx - U_1(s) \right]^2 ds + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} [Z_k(x) \exp(-isx)]^2 dx. \quad (11)$$

Легко видеть, что искомой функцией $Z_{\alpha k}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$), минимизирующей функционал $M_\alpha[Z_k, U_1]$, т. е. искомым приближенным решением уравнения (10) будет:

$$Z_{\alpha k}(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^{2k}} Z_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (12)$$

Аналогично можно найти функцию $R_{\alpha k}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$):

$$R_{\alpha k}(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^{2k}} R_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (13)$$

По так называемому принципу невязки выбрали следующий параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ таким образом: если $Z_{\alpha k}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) какой-либо экстремал функционала (11), реализующий его глобальный минимум при заданном α и фиксированном δ , то числовой параметр α определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z_{\alpha k}(x) \exp(-isx) dx - U_1(s) \right]^2 ds = \delta^2$$

Таким образом, в обсуждаемых случаях непрерывная зависимость построенного приближенного решения от значения температуры и теплового потока и точность решения рассматриваются относительно исходных данных (2) и решения (9), а не от истинных значений температуры и теплового потока и описания реального физического процесса.

3. Метод интегрального преобразования Фурье и его регуляризация. В работах [6, 7] с применением интегрального преобразования Фурье получено решение задачи (1)–(2) в виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi_0(s) Ch(ys) + \Psi_0(s) \frac{Sh(ys)}{s} \right) \exp(-isx) ds. \quad (14)$$

Если подставить (7) и (8) в (3) и применить математическое преобразование, то получим решение задачи (1)–(2) в виде (14).

Это решение существует согласно сделанным выше предположениям относительно поведения функций $\varphi(x)$ – температуры и $\psi(x)$ – теплового потока. Можно удостовериться, что при соответствующих граничных условиях (температуры и теплового потока) это решение согласно с решением с классическими граничными условиями.

Теперь рассмотрим, в каком отношении находятся регуляризованные решения с решениями реальной физической задачи.

В работе [7] построен класс устойчивых решений задачи (1)–(2) в виде:

$$u_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \alpha) \left(\Phi_0(s) Ch(ys) + \Psi_0(s) \frac{Sh(ys)}{s} \right) \exp(-isx) ds. \quad (15)$$

Здесь функция $g(s, \alpha)$ является стабилизирующим множителем и обладает свойствами:

- 1) $g(s, \alpha)$ определена в области $\{-\infty < s < \infty, \alpha \geq 0\}$;
- 2) $0 \leq g(s, \alpha) \leq 1$ для всех значений $\alpha \geq 0$ и $-\infty < s < \infty$;
- 3) $g(s, 0) \equiv 1$;

- 4) для всякого $\alpha > 0$ $g(s, \alpha)$ четная по s и $g(s, \alpha) \in L_2(-\infty, \infty)$;
- 5) для любого $\alpha > 0$ $g(s, \alpha) \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow \infty$;
- 6) при $\alpha \rightarrow 0$ $g(s, \alpha) \rightarrow 1$, не убывая, причем на всяком отрезке $|s| \leq s_1$, эта сходимость равномерная;
- 7) для любого $s \neq 0$ $g(s, \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и эта сходимость равномерная на каждом отрезке $[s_1, s_2]$;
- 8) для всякого $\alpha > 0$ $g(s, \alpha)Ch(sy)$, $g(s, \alpha)\frac{Sh(sy)}{s}$ принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ при любом фиксированном $y > 0$.

Этим условиям отвечает, например, стабилизирующий множитель (фактор)

$$g(s, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha s^{2n}}, \quad g(s, \alpha) = \exp(-(\alpha s)^{2n}), \quad g(s, \alpha) = \exp(-\alpha s^{2n}), \quad \alpha > 0, \quad n \geq 1.$$

Результаты ошибки измерений граничных условий заданы в виде функций $\varphi(x)$ – температуры и $\psi(x)$ – теплового потока, отличающихся от истинных физических значений (2) на малую величину δ , зависящую от точности измерений. Это показывает сильную зависимость точности решения (14) от расположения относительно рассматриваемой области точки с вычислением операторов дифференцирования $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$.

Непрерывная зависимость построенного решения (14) от исходных функций $\varphi(x)$ – температуры и $\psi(x)$ – теплового потока и точность решения рассматриваются относительно исходных данных (2) и решения (14), а не от истинных граничных данных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и описания реального физического процесса (14). Отметим, что все сказанное остаётся в силе, если поменять местами ошибки измерений. Граничные условия заданы в виде функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, отличающихся от истинных физических значений (2) на малую величину δ , и вычисление операторов дифференцирования $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$.

При достаточно малом значении параметра регуляризации решение (15) задачи стремится к решению (14), а не к описанию реального физического процесса (1)–(2). Оно может стремиться к решению задачи (1)–(2) при стремлении ошибки измерений к нулю, что нереально.

Фактически решение $u_\alpha(x, y)$ (15), которое является регуляризованным решением задачи, есть аналитическое решение задачи (1)–(2). Ясно также, что, варьируя положением и количеством точек вычислений операторов дифференцирования $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$, можно для истинной физической задачи (1)–(2) построить решения типа (15) в неограниченном количестве.

Таким образом, в обсуждаемых случаях (при существовании единственных решений) регуляризованные решения снимают трудности при реализации решения, но не решают проблему построения истинного физического решения и по сути своей равноценны «некорректным» по Адамару аналитическим решениям.

4. Результаты расчетов. Была построена программная реализация указанного метода решения задачи для стационарного распространения тепла в бесконечной полосе, описываемого гармоническими функциями на системе MatLab. Для реального физического распространения тепла в полосе $\{-\infty < x < \infty, 0 < y < y_0\}$ точно описывается функцией $u(x, y)$ в виде (1)-(2).

Следуя [16], в качестве точного решения задача (1)–(2) была взята функция распространения тепла в виде:

$$u(x, y) = \frac{b - y}{(b - y)^2 + (a - x)^2} + \frac{b - y}{(b - y)^2 + (a + x)^2}. \quad (16)$$

В качестве исходного распространения тепла была взята функция

$$\varphi(x) = \frac{b}{b^2 + (a - x)^2} + \frac{b}{b^2 + (a + x)^2},$$

поток тепла функции

$$\psi(x) = \frac{b^2 - (a - x)^2}{b^2 + (a - x)^2} - \frac{b^2 - (a + x)^2}{b^2 + (a + x)^2}$$

и, возмущенный тепловой поток в виде функции

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{b^2 - (a - x)^2}{b^2 + (a - x)^2} - \frac{b^2 - (a + x)^2}{b^2 + (a + x)^2} + \delta \frac{b^2 - (a_1 - x)^2}{b^2 + (a_1 - x)^2} - \frac{b^2 - (a_1 + x)^2}{b^2 + (a_1 + x)^2}.$$

Вычислены значения функций $u(x, y)$, $\tilde{u}(x, y)$, $u_a(x, y)$ по формулам (9), (15), (16) при следующих значениях, входящих в (16) постоянных параметров: $\{-a < x < a, 0 < y < b\}$;

$$a = 2; \quad a_1 = 1.5; \quad b = 0.75 \quad (0.5; \quad 0.3),$$

$$\delta = 3.0e - 1; \quad (3.0e - 2; \quad 3.0e - 3).$$

На графиках (рис.1) приведены значения приближенного и точного решений.

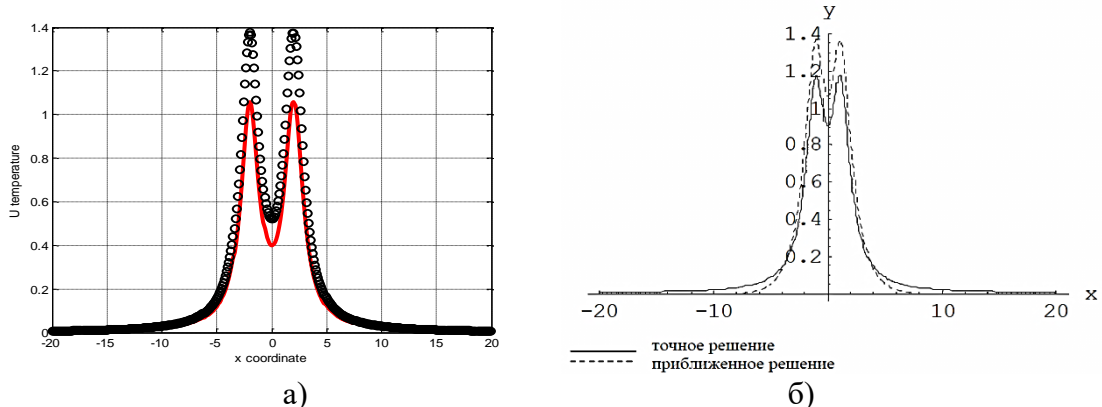


Рисунок 1. Точные и возмущенные решения задачи (1)–(2): а) _____ точное решение; оооо возмущенное решение в виде функции (16); б) результат работы [16].

На рис. 2 приведены значения точного и аналитического решений. Можно отметить, что приближенное решение заметно отличается от точного решения как на близких, так и на дальних расстояниях. Аналитическое решение близко к точному решению на близких (от расположения точек с дополнительными данными) расстояниях и отличается от точного решения на дальних расстояниях. Таким образом, коррекция решения произошла на близких к точке с дополнительным данным расстояниях. Это подтверждается данными, приведенными на рис 2.

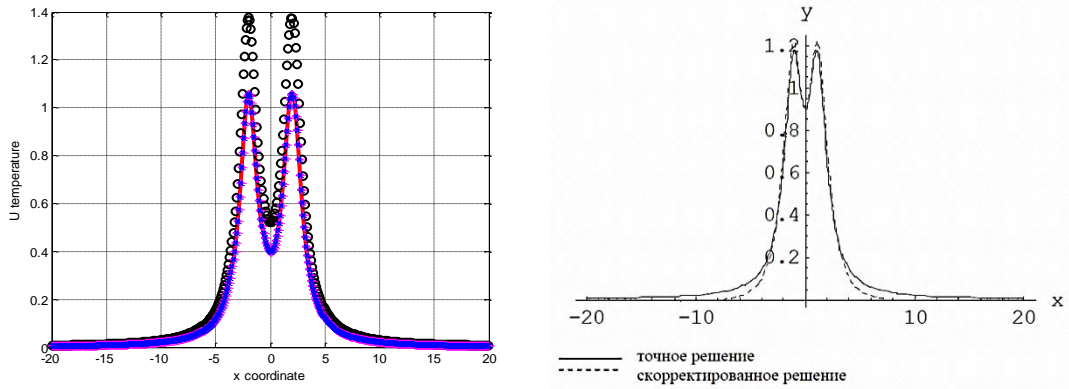


Рисунок 2. Стационарное распространение тепла: а) функции вида (3), $\circ\circ\circ\circ$ возмущенное решение; (9) — регуляризации; (15) $++++$ регуляризации с помощью интегрального преобразования Фурье; б) результат работы.

При расчетах варьировался параметр y , задающий свойства ширины полосы (рис. 1 а) при $y = 0.75$, б) при $y = 0.50$, в) при $y = 0.25$. На основе результатов решения перечисленных задач можно выделить основные закономерности проникновения и распространения тепла в полосе.

Для выявления эффектов (некорректность) рассматривались методы аналитических и специальных рядов. Для аналитических функций точных и возмущенных исходных данных функция распространения тепла непрерывно зависит от функции начального распространения тепла и теплового потока. На рис. 2 приведены графики распространения тепла для задачи (1)–(2). Аналогично для этого случая проведены сравнения методом регуляризации [16].

На график приведены значения аналитического, приближенного и точного решений (рис. 1 и 2). Можно отметить, что приближенное решение заметно отличается от точного решения, как на близких, так и на дальних расстояниях. Регуляризованное решение близко к точному решению на близких расстояниях и отличается от точного решения на дальних расстояниях от расположения точек ($x, y = 0$). Приведенный численный пример показывает возможность эффективного использования аналитических решений для уточнения стационарного распространения тепла в бесконечной полосе.

Приведенный численный пример показывает возможность эффективного использования дополнительных данных для уточнения приближенных решений. Однако вопрос, при каких условиях имеет место уточнение решения, остается открытым.

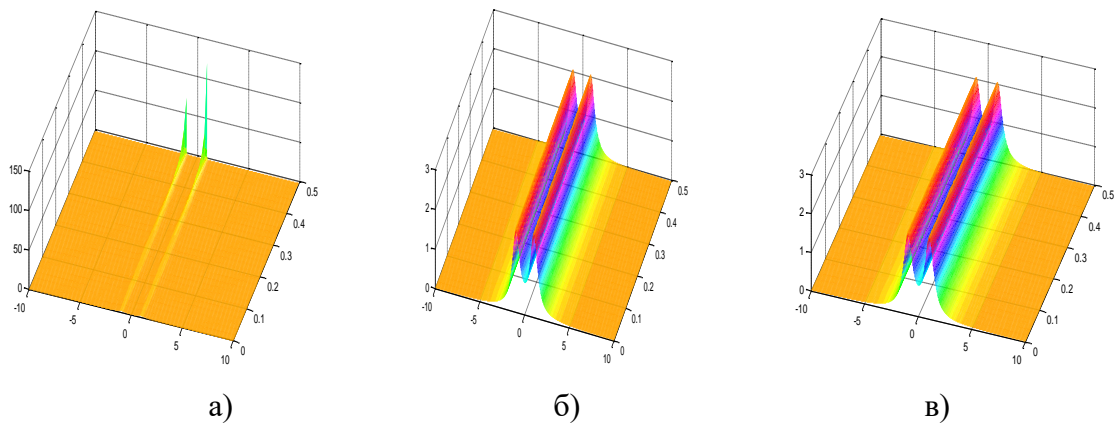


Рисунок3. Стационарное распространение тепла в пространстве: а) функции вида (3) специальный ряд; б) регуляризация (9); в) регуляризация с помощью интегрального преобразования Фурье (15)

Заключение

Решая задачу непрерывной зависимости распространения тепла от значения температуры и теплового потока, мы можем построить аналитический регуляризованный алгоритм решения применительно к заданным граничным условиям (значениям температуры и теплового потока). Эти решения существуют и единственны по предположению, как в приведенные в п. 2, относительно функций температуры и теплового потока, в классе $L_2(-\infty, \infty)$ функций. Вычислительные трудности, связанные с наличием операторов дифференцирования $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$ для решений, в принципе, преодолены. В случае же аналитических решений считаем наличие особенностей возможных операторов дифференцирований $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$, физически оправданными. Их можно интерпретировать как источники, истоки (тепла, жидкости), сосредоточенные силы и моменты, сильные концентрации напряжений и т.п. По физическим соображениям, этих особенностей (операторов дифференцирований $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$) не должно быть, и если они дают «вклад» в заданные граничные условия (температуры и теплового потока) в пределах «ошибки измерений», то они могут быть просто вычтены из решения, при этом температура и тепловой поток не должны выходить за пределы известной точности измерений. При аналитических решениях с выделенными операторами дифференцирования $\frac{d^{2k}\varphi(x)}{dx^{2k}}$ и $\frac{d^{2k}\psi(x)}{dx^{2k}}$, – уточняется решение во всей области, а не только в окрестности точки температуры и теплового потока.

Понятие регуляризованный алгоритм решения не является решением реальной физической задачи и приводит к попыткам ее изменений. Существует множество предложений этих изменений: отбрасывание больших (бесконечных) значений в малой окрестности точки температуры и теплового потока, предложение использовать физические соображения, предложение перерасчета данных на новый уровень (предложенный геофизиками для гравиметрической задачи).

Другие предложения изменений относятся к ограничению пространства непрерывности искомых функций. При этом возникают вопросы о существовании решений и согласованности исходных данных функций температуры и теплового потока.

Таким образом, можно считать, что аналитические решения типа приведенных специальных рядов в п. 2–п. 4 и регуляризованный алгоритм решения в физическом смысле равносильны. При этом ни один из них не гарантирует совпадение с реальным физическим решением. Каждой реализации или интерполяции дискретных данных физических измерений соответствует свое аналитическое решение и каждому алгоритму регуляризации соответствует свое решение. В обоих случаях мы можем иметь неограниченное множество разных решений.

Литература

1. Тихонов А.Н. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела / А.Н. Тихонов, В.Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. – Т.7. – №4. – С. 911–914.
2. Леттес Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Леттес, Ж.Л. Лионс // – М.: Мир. – 1970. – 336 с.
3. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
4. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсени.– М.: Наука, 1986. – 288 с.
5. Dinh Nho Hao Towards the Cauchy problem for the Laplace equation / Dinh Nho Hao, Tran Duc Van, Rudolf Gorenflo // Banach Center Publication. 1992. Vol. 27, Issue: 1. P. 111–128.
6. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 93 с.
7. Иванов В.К. Задача Коши для уравнений Лапласа в бесконечной полосе / В.К. Иванов // Дифференциальные уравнения, 1965. –Т.1. №1. –С.131–136.
8. Джураев Х.Ш. Некорректно поставленные задачи математической физики / Х.Ш. Джураев // Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. –156 с.
9. Джураев Х.Ш. Регуляризация граничных задач для гиперболического уравнения / Х.Ш. Джураев // Математические заметки. 2013. Вып. 2. №1. – С. 202–209.
10. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат. 1984. –152 с.
11. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности. Пер. с англ. / Дж.Бек, Б.Блакуэлл, Ч. Сент–Клэр мл. // – М.: Мир. 1989. – 312 с.
12. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Эдиториал. 2003. – 748 с.
13. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов // – М.: Наука, 1976. – 392 с.
14. Сизиков В.С. Устойчивые методы обработки результатов измерений / В.С. Сизиков – Санкт-Петербург (СПб): Специальная литература. 1999. – 239 с.
15. Арсенин В.Я. Об одном способе приближенных решений интегральных уравнений первого рода типа сверток // Математическая логика, теория алгоритмов и теория множеств. – Труды МИ АН СССР. – М.: Наука, 1973. –Т. 133. – С. 33–51.
16. Саргсян В.Г. О решении некорректной задачи теплопроводности с переопределенными исходными данными / В.Г.Саргсян, А.С. Хачикян // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №3.– С. 58–63.