УДК: 62.50

СИНГУЛЯРНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И ОЦЕНКИ РОБАСТНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р.О. Оморов, А. Акунова, Т.А.Акунов
Институт машиноведения и автоматики НАН КР

Рассматриваемая проблема связана с необходимостью обеспечения стабильности эллипсоидных показателей качества функционирования систем управления в условиях вариаций или неопределенности параметров их структурных элементов, а следовательно, с разработкой технологии оценки их нестабильности, вызванной указанными факторами. Для оценки стабильности эллипсоидных показателей качества многомерных систем управления используются функции чувствительности первого порядка сингулярных чисел. SVD[1]-анализ матриц сингулярной чувствительности позволяет сравнить протекание многомерных управляемых процессов и решить прикладную задачу диагностики сложных динамических систем по определению доминирующих параметров, их наиболее неблагоприятных сочетаний, оценки эффекта введения регулятора, поиска оптимального номинала, а также ранжирование параметров, что особенно ценно в фазе формирования модели.

Ключевые слова: сингулярное разложение матриц, сингулярные числа, функции чувствительности, параметрические возмущения

Введение. Одним из методов конструирования оценок нестабильности является метод, использующий возможности теории чувствительности, в той его версии, который основан на формализме метода пространства состояний [1,2]. Полученные на основе SVD-подхода эллипсоидные показатели качества процессов управления в многомерных непрерывных системах позволяют свести проблему оценки чувствительности процессов управления к вариациям параметров структурных элементов задачи управления – источника внешнего воздействия, объекта управления и регулятора – к исследованию специально конструируемых матриц [2-3] с помощью SVD-анализа. Применение основного методологического приема – сведение проблемной задачи к линейной алгебраической задаче (ЛАЗ) вида

$$\kappa(\tau) = \Pi(\tau)\chi(\tau)\,,\ \ \forall\,\tau\,,\ \tau = t, k;\ \omega\,,$$

где $\kappa \in R^{\rho}$, $\chi \in R^{\nu}$; $\Pi \in R^{\rho\times\nu}$ – критериальная матрица, τ может принимать смысл непрерывного времени t в случае исследования непрерывных многомерных управляемых процессов и смысл дискретного времени k, выраженного в числе интервалов дискретности длительностью Δt так, что непрерывное время t и дискретное k связаны соотношением $t = (\Delta t)k$ в случае исследования дискретных многомерных управляемых процессов, ω – частота источника внешнего гармонического воздействия.

Последующее SVD-разложение критериальных матриц позволяет провести анализ параметрической чувствительности многомерных процессов в эллипсоидной постановке.

Базовые концепции оценки параметрической чувствительности эллипсоидных показателей качества

Пусть матрица $\Pi(\tau)$ имеет в силу сингулярного разложения [4] представление

$$\Pi(\tau) = U(\tau)\Sigma(\tau)V^{T}(\tau)\,,$$

где $\Sigma(\tau)$ –$(\rho\times\nu)$ диагональная матрица, имеющая на главной диагонали сингулярные числа матрицы $\Pi(\tau)$, $U(\tau)$ – ортогональная $(\rho\times\rho)$ матрица, столбцы которой образуют левый сингулярный базис матрицы $\Pi(\tau)$, $V(\tau)$ – ортогональная $(\nu\times\nu)$ матрица, столбцы которой образуют правый сингулярный базис матрицы $\Pi(\tau)$. Если в ЛАЗ перейти к евклидовым векторным нормам, то становятся справедливыми оценочные неравенства

$$\alpha_m(\tau) \le \|\kappa(\tau)\| / \|\chi(\tau)\| \le \alpha_M(\tau), \forall\,\tau\,,$$

[1] от английского Singular Value Decomposition

где $\alpha_m(\tau), \alpha_M(\tau)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\Pi(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\Pi(\tau)$. Наибольшее и наименьшее сингулярные числа $\alpha_M(\tau), \alpha_m(\tau)$ матрицы $\Pi(\tau)$ однозначно определяют на матрице правых сингулярных векторов $V(\tau)$ те из них, которые на сфере $\|\chi(\tau)\| = fix$ отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида, получаемого с помощью ЛАЗ, причем длины этих полуосей $\alpha_M(\tau)\|\chi(\tau)\|$ и $\alpha_m(\tau)\|\chi(\tau)\|$ соответственно.

Анализ параметрической чувствительности эллипсоидных показателей качества

Пусть критериальная матрица П, а следовательно, и спектр ее сингулярных чисел зависят от квазистационарного вектора параметров $\tau = q \in R^p$ с номинальным значением q_0 так , что $\sigma_\alpha\{\Pi(q)\} = \{\alpha_i(q), i = \overline{1,\nu}\}$. При вариации вектора параметров q будут претерпевать изменения эллипсоидные показатели. Таким образом, возникает задача анализа чувствительности эллипсоидных оценок, сводящаяся к оценке чувствительности сингулярных чисел матрицы П к вариациям элементов вектора параметров q.

Определение 1. Пусть $\Pi(q)$ – произвольная матрица, элементы которой параметрически возмущены так, что параметрические возмущения претерпевают элементы $\alpha_i(q)$ алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\Pi(q)\}$ сингулярных чисел

$$\sigma_\alpha\{\Pi(q = q_0 + \Delta q)\} = \{\alpha_i(q = q_0 + \Delta q) = \alpha_i + \Delta\alpha_i(q_0, \Delta q);\ \ i = \overline{1,\nu}\}\ \ q \in R^p.$$

Тогда функция чувствительности α_{iq_j} сингулярного числа α_i к вариации компонента $q_j = q_{0j} + \Delta q_j$ вектора параметров q задается соотношением

$$\alpha_{iq_j} \underline{\underline{\Delta}} \frac{\partial}{\partial q_j} \alpha_i(q)_{|q=q_0}, \tag{1}$$

при этом α_{iq_j} именуется сепаратной по параметру q_j функцией сингулярной чувствительности i-го сингулярного числа α_i.

Определение 2. Конечные приращения $\Delta\alpha_i$ элементов сингулярного разложения матрицы $\Pi(q)$ при конечной вариации Δq_j j-го элемента q_j вектора q определяются соотношениями

$$\Delta\alpha_i = \alpha_{iq_j} \Delta q_j. \tag{2}$$

Вычисление функций чувствительности (1) элементов сингулярного разложения матрицы линейной алгебраической задачи может быть осуществлено с использованием положений следующего утверждения.

Утверждение 1. Функция чувствительности α_{iq_j} (1) i-го сингулярного числа α_i матрицы $\Pi(q)$ к вариациям j-го элемента q_j вектора параметров q может быть вычислена с помощью соотношения

$$\alpha_{iq_j} = \left(S_{\Pi j}\right)_{ii};\ i = \overline{1,\nu};\ \ j = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где матрица чувствительности $S_{\Pi j}$ конструируется в соответствии с матричным соотношением

$$S_{\Pi j} = U^T \Pi_{qj} V. \tag{4}$$

В (4) $U = U(q)_{|q=q_0}$, $V = V(q)_{|q=q_0}$, $\Pi_{q_j} \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j}\Pi_i(q)_{|q=q_0}$, при этом матрица Π_{q_j} именуется матрицей сепаратной чувствительности к вариациям Δq_j сепаратного параметра q_j как *j*-го элемента вектора параметров. □

Доказательство утверждения 1 приведено в [3].

Применение SVD-подхода приводит к решению прикладной задачи диагностики по выявлению неблагоприятного сочетания вариаций параметров структурных компонентов многомерных систем, выделения доминирующих параметров, а также поиска оптимального номинала. Для этих целей используется матрица сингулярной чувствительности.

Определение 3. Матрицей S_α функций чувствительности $\alpha_{\Pi_i q_j}(i=\overline{1,\nu};\ j=\overline{1,p})$ сингулярных чисел $\alpha_{\Pi_i}(q)_{|q=q_0} = \alpha_{\Pi_i}$ произвольной матрицы $\Pi(q)_{|q=q_0} = \Pi$ к вариациям Δq_j элементов вектора параметров $q = q + \Delta q$ относительно его номинальной реализации q_0, где $\Delta q = col\{\Delta q_j;\ j=\overline{1,p}\}$, будем называть матрицу

$$S_\alpha = row\left\{col\left[\alpha_{\Pi_i q_j} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial}{\partial q_j}\alpha_{\Pi_i}(q)_{|q=q_0};\ \ i=\overline{1,\nu}\right];\ j=\overline{1,p}\right\}. \quad (5)$$

Матрицу функций чувствительности сингулярных чисел S_α будем в дальнейшем именовать матрицей сингулярной чувствительности. Нетрудно видеть, что матрица S_α позволяет связать вектор $\Delta\alpha_\Pi$ конечных приращений $\Delta\alpha_{\Pi_i};i=\overline{1,\nu}$ сингулярных чисел с вектором Δq конечных приращений $\Delta q_j;\ j=\overline{1,p}$ параметров в форме линейной алгебраической задачи

$$\Delta\alpha_\Pi = S_\alpha \Delta q. \quad (6)$$

Структура матрицы сингулярной чувствительности S_α такова, что ее строки S_α^i составлены из $\alpha_{\Pi_i q_j}$ функций чувствительности *i*-го сингулярного числа α_{Π_i} исходной матрицы Π к вариациям всех элементов q_j $(j=\overline{1,p})$ вектора параметров *q* матрицы $\Pi(q)$. В свою очередь, столбцы S_{α_j} матрицы S_α составлены из функций чувствительности $\alpha_{\Pi_i q_j}(i=\overline{1,\nu})$ всех сингулярных чисел матрицы Π к вариации Δq_j только *j*-го элемента q_j вектора параметров *q* относительно номинального значения q_0

Таким образом, становятся справедливыми соотношения

$$\Delta\alpha_{\Pi_i} = S_\alpha^i \Delta q,\ \Delta\alpha_{\Pi j} = S_{\alpha_j}\Delta q_j. \quad (7)$$

Соотношения (7) обнаруживают возможность ранжирования сингулярных чисел $\alpha_i\ (i=\overline{1,\nu})$ по чувствительности к вариациям полной совокупности параметров с помощью строчных норм $\left\|S_\alpha^i\right\|\ i=\overline{1,\nu}$ матрицы S_α, а также возможность ранжирования варьируемых параметров q_j с помощью столбцовых норм $\left\|S_{\alpha_j}\right\|\ j=\overline{1,p}$ той же матрицы.

Сконструируем сингулярное разложение матрицы S_α в форме

$$S_\alpha = U_S \Sigma_S V_S^T. \quad (8)$$

Выделим в сингулярном разложении (8) две тройки $(\alpha_{SM}, U_{SM}, V_{SM})$ и $(\alpha_{Sm}, U_{Sm}, V_{Sm})$, составленные из согласованных элементов левого и правого сингулярных базисов матрицы S_α, которые соответствуют максимальному α_{SM} и минимальному α_{Sm} сингулярным числам матрицы S_α.

Выделенные тройки позволяют записать

$$\alpha_{Sm}\|\Delta q\| \le \|\Delta\alpha_{\Pi}\| \le \alpha_{SM}\|\Delta q\|,$$
$$\Delta q_M = V_{SM}\|\Delta q\|, \qquad \Delta q_m = V_{Sm}\|\Delta q\|. \tag{9}$$

Независимо от размерности задачи для решения анализа параметрической чувствительности эллипсоидных оценок достаточно построения сингулярной матрицы $S_\alpha^* \in R^{2\times p}$, образованной из первой и последней строк матрицы S_α (8), связывающей вектор вариаций эллипсоидных оценок качества многомерных управляемых процессов с вектором вариаций параметров с помощью соотношения

$$\Delta\alpha^* = S^*{}_\alpha \Delta q\,. \tag{10}$$

Таким образом, задача анализа параметрической чувствительности эллипсоидных оценок качества многомерных управляемых процессов приняло сжатую форму представления (10).

Нетрудно видеть, что при фиксированной $\|\Delta q\|$ норме вариации Δq вектора параметров q относительно его номинальной реализации q_0 можно определить:

- вариацию $\Delta\alpha_{\Pi}$, характеризующуюся минимальной нормой $\|\Delta\alpha_{\Pi}\| = \alpha_{Sm}\|\Delta q\|$;
- $\Delta\alpha_{\Pi}$, характеризующуюся максимальной нормой $\|\Delta\alpha_{\Pi}\| = \alpha_{SM}\|\Delta q\|$;
- сочетание компонентов вариации Δq вектора параметров, доставляющих минимальную по норме вариацию сингулярных чисел $\Delta q_m = V_{Sm}\|\Delta q\|$;
- сочетание компонентов вариации вектора параметров, доставляющих максимальную по норме вариацию $\Delta\alpha_{\Pi}$ сингулярных чисел, определяемое выражением $\Delta q_M = V_{SM}\|\Delta q\|$.
- сочетание вариаций компонентов вектора параметров Δq_M будем называть неблагоприятным. Компоненты Δq_M имеют веса, образующие вектор V_{SM}, анализ которого позволяет выделить доминирующие параметры. Таким образом, знание элементов V_{SM} позволяет осуществить апостериорное ранжирование параметров.

Положения доклада иллюстрируются примером.

Заключение. Анализ матриц сингулярной чувствительности позволил сравнить протекание многомерных управляемых процессов и решить прикладную задачу диагностики сложных динамических систем по определению доминирующих параметров, их наиболее неблагоприятных сочетаний, оценки эффекта введения регулятора, поиска оптимального номинала. Для этой цели используется возможность, которую предоставляет исследователю матрица сингулярной чувствительности S_α.

Литература

1. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981.

2. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. – Бишкек: Илим, 1991. – 59 с.

3. *Акунов Т. А., Ушаков А. В.* Анализ чувствительности эллипсоидных оценок качества многомерных процессов управления // Изв. вузов. Приборостроение. – 1991. – Т.34, №8. – С. 21–27.

4. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир. –1989.

5. *Оморов Р.О.* Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. –1995. – №1. – С. 22–27.

6. *Оморов Р.О.* Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. –1995. – №3. – С. 3–7.

7. *Оморов, Р. О.* Максимальная грубость динамических систем / Р. О. Оморов // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 8. – С. 36–45.

8. *Оморов Р.О.* О дискретном аналоге теоремы Харитонова // Наука и новые технологии. – 2002. – № 3. – С. 5–9.

9. *Оморов Р.О.* Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем //Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2020. – Т.20. № 3. – С. 364–370.

10. *Ушаков А.В., Акунова А., Оморов Р.О., Акунов Т.А.* Робастные многомерные системы управления: Частотные и алгебраические методы / Под ред. Р.О. Оморова. – Бишкек: Илим, 2022. – 352 с.