Проблемы автоматики и управления. 2020, №1 (38)

УДК 510.67 10.5281/zenodo.3904101

А.Т.Нуртазин, З.Г. Хисамиев. *KhisamievZ@mail.ru*
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Казахстан

ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ КОМПАНЬОНЫ КОЛЬЦА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В работе изучаются компаньон-модели кольца целых чисел. Это исследование является примером изучения классического объекта посредством теории классов Фрэсе, разработанной Нуртазиным А.Т. В исследовании описаны структуры компаньонов и экзистенциально замкнутых компаньонов кольца целых чисел.

Ключевые слова: компаньон; экзистенциально замкнутое кольцо; изоморфизм колец; алгебраический элемент; трансцендентный элемент.

Введение

Теория экзистенциальной замкнутости возникла в середине двадцатого столетия в трудах одного из признанных классиков теории моделей Абрахама Робинсона [1, 2], а также в работах [3–8]. В настоящее время она является одной из значительных и наиболее развитых областей современной теории моделей. В предыдущих исследованиях вводится и исследуется наиболее базисная форма широко известного в теории экзистенциальной замкнутости понятия компаньон-теории. Был найден критерий счётной категоричности данной компаньон-теории. Изучены некоторые свойства экзистенциально замкнутых и форсинг-компаньонов [3–9]. Другой перспективный подход построения теории экзистенциально замкнутых структур, основанный на работах Фрэсе [6], развивается в [9–16].

Естественно, что развитие общей теории экзистенциональных замкнутых компаньонов должно сопровождаться исследованием классических структур и теорий. Исторически одним из наиболее классических математических объектов является кольцо целых чисел. В работе строится теория алгебраических компаньон-расширений кольца целых чисел. Это исследование является примером изучения классического объекта посредством подхода, разработанного Нуртазиным А.Т. и основанного на классах Фрэсе. В исследовании строятся экзистенциально замкнутые компаньоны кольца целых чисел и найдено их число с точностью до изоморфизма, оставляющего множество всех трансцендентных над кольцом целых чисел элементов на месте.

1. Модели элементарной теории компаньонов кольца целых чисел

Пусть: $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел; $\mathbb{Z}[\bar{x}]$ – кольцо многочленов от переменных $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. Все используемые и неприведенные определения, а также обозначения взяты из монографии [15]. Класс компаньонов кольца $\mathbb{Z}[\bar{x}]$ обозначаем $C(\mathbb{Z})$.

Приведем без доказательств несколько результатов из [17]. Эти результаты начальные и будут использованы в настоящей статье.

ТЕОРЕМА 1 [17]. Кольцо целостности $\mathbb{Z}[\overline{x}]$ является компаньоном кольца $\mathbb{Z}$, т.е. $\mathbb{Z}[\overline{x}]\in C(\mathbb{Z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [17]. Пусть $g_i(\overline{x}),h_j(\overline{x})\in\mathbb{Z}[\overline{x}]$. Система $\underset{i}{\&}\, g_i(\overline{x})=0\,\&\,\underset{j}{\&}\, h_j(\overline{x})\neq 0$ эквивалентна в $\mathbb{Z}[\overline{x}]$ системе из одного уравнения и одного неравенства $g(\overline{x})=0\,\&\,h(\overline{x})\neq 0$.

Пусть $A_f=\{(\overline{a},a)\mid f(\overline{a},a)=0,\ (\overline{a},a)\in Z\}$ – аннулятор f , где $f(\overline{x},x)\in\mathbb{Z}[\overline{x},x]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [17]. Пусть $I(A_f)=\{\ g\mid g\in\mathbb{Z}[\overline{x},x],\ A_f\subseteq A_g\}$, где неприводимый над кольцом $\mathbb{Z}$ многочлен $f\in\mathbb{Z}[\overline{x},x]\setminus\mathbb{Z}[\overline{x}]$ содержащий единицу. Тогда, $I(A_f)$ является главным идеалом в кольце $\mathbb{Z}[\overline{x},x]$ и $I(A_f)=(f)$.

ТЕОРЕМА 2 [17]. Пусть $f(\overline{x},x)$ – неприводимый и содержащий единицу многочлен над кольцом $\mathbb{Z}$. Тогда алгебраическое расширение $\mathbb{Z}[\overline{x}]/f$ кольца $\mathbb{Z}[\overline{x}]$ является компаньоном $\mathbb{Z}$ если, и только если, аннулятор A_f является бесконечным множеством.

ТЕОРЕМА 3 [17]. Пусть $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f$ и $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f/g$ (здесь $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f/g=(\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f)[z]/g$) – простые алгебраические расширения колец $\mathbb{Z}[\overline{x}]$ и $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f$ соответственно, $f(\overline{x},y),g(\overline{x},y,z)$ – неприводимые многочлены над кольцами $\mathbb{Z}[\overline{x}]$ и $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f$ соответственно. Тогда алгебраическое расширение $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f/g$ кольца $\mathbb{Z}[\overline{x},y]/f$ является компаньоном $\mathbb{Z}$ если и только если множество $A_f\times Z\cap A_g$ бесконечно.

Пусть $B=\{\beta_1,\beta_2,....\},\ X=\{x_1,x_2,....\}$ – счетные множества независимых переменных: $\overline{\beta}=(\beta_1,...,\beta_m)$, $\overline{x}_n=(x_1,...,x_n)$, $\overline{f}_n=(f_1,...,f_n)$, где $f_i(\overline{\beta},\overline{x}_{i-1}^{\overline{f}_{i-1}},x_i)$ – неприводимые в кольце $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_{i-1}^{\overline{f}_{i-1}})[x_i]$, где $\overline{x}_i^{\overline{f}_i}=(x_1^{f_1},...,x_i^{f_i})$, $x_i^{f_i}$– корень многочлена $f_i(\overline{\beta},\overline{x}_{i-1}^{\overline{f}_{i-1}},x_i)$ в кольце $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_{i-1}^{\overline{f}_{i-1}})[x_i]$. Положим $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_1^{\overline{f}_1})=\mathbb{Z}[\overline{\beta},x_1]/f_1(\overline{\beta},x_1)$, $\mathbb{Z}[\overline{\beta},x_1]$, $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_2^{\overline{f}_2})=\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_1^{\overline{f}_1})[x_2]/f_2(\overline{\beta},\overline{x}_1^{\overline{f}_1},x_2)$ и $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_1^{\overline{f}_1})[x_2]$. По индукции определим $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})=\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}})[x_n]/f_n(\overline{\beta},\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}},x_n)$ и $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}})[x_n]$. Таким образом в последовательности $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_1^{\overline{f}_1}),\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_2^{\overline{f}_2}),...,\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$ – каждый последующий член $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_{i+1}^{\overline{f}_{i+1}})$ есть простое алгебраическое расширение предыдущего члена посредством неприводимого многочлена $f_{i+1}(\overline{\beta},\overline{x}_i^{\overline{f}_i},x_{i+1})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в $g(\overline{\beta},\overline{x}_n^{\overline{f}_n})=h(\overline{\beta},\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$ выполнено в кольце $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$, полученном посредством последовательных присоединений корней $x_1^{f_1},...,x_n^{f_n}$ неприводимых многочленов $f_1,...,f_n$ в соответствующих кольцах $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_{i-1}^{\overline{f}_{i-1}})[x_i]$ $\mathbb{Z}[\overline{\beta}]\subseteq\mathbb{Z}[\overline{\beta}](x_1^{f_1})\subseteq\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_2^{\overline{f}_2})\subseteq...\subseteq\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$.

Тогда в кольце $\mathbb{Z}[\overline{\beta},\overline{x}_n)$ выполняется соотношение $g(\overline{\beta},\overline{x}_n)=h(\overline{\beta},\overline{x}_n)+q_1(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_1(\overline{\beta},\overline{x}_1)+q_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_2(\overline{\beta},\overline{x}_2)+...+q_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)$ для подходящих $q_1(\overline{\beta},\overline{x}_n),...,q_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)\in\mathbb{Z}[\overline{\beta},\overline{x}_n]$.

Доказательство индукции по n. Базис индукции n=1. В фактор-кольце $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_1^{\overline{f}_1})=\mathbb{Z}[\overline{\beta}](x_1^{f_1})$ из равенства $g(\overline{\beta},\overline{x}_n^{\overline{f}_n})=h(\overline{\beta},\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$ следует равенство $g(\overline{\beta},x_1^{f_1})=h(\overline{\beta},x_1^{f_1})+q_1(\overline{\beta},x_1)f_1(\overline{\beta},x_1)$ для подходящего многочлена $q_1(\overline{\beta},x_1)\in\mathbb{Z}[\overline{\beta},x_1]$. Индуктивный переход. Из равенства $g(\overline{\beta},\overline{x}_n^{\overline{f}_n})=h(\overline{\beta},\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$ следует равенство $g(\overline{\beta},\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}},x_n)=h(\overline{\beta},\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}},x_n)+q_n(\overline{\beta},\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}},x_n)f_n(\overline{\beta},\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}},x_n)$. В последнем равенстве число алгебраических элементов равно $n-1$, при этом независимые переменные – это $\overline{\beta},x_n$. По предположению индукции последнее соотношение в кольце $\mathbb{Z}[\overline{\beta},x_n](\overline{x}_{n-1}^{\overline{f}_{n-1}})$ влечет соотношение (1):

$$\begin{aligned}&g(\overline{\beta},\overline{x}_n)=h(\overline{\beta},\overline{x}_n)+q_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)+q_1(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_1(\overline{\beta},\overline{x}_1)+\\&+q_n(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_2(\overline{\beta},\overline{x}_2)+...+q_{n-1}(\overline{\beta},\overline{x}_n)f_{n-1}(\overline{\beta},\overline{x}_{n-1}).\end{aligned}\tag{1}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Кольцо $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$ является компаньоном кольца $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда аннулятор $A_{\overline{f}_n}=A_{f_1}\times Z^{n-1}\cap A_{f_2}\times Z^{n-2}\cap...\cap A_{f_n}$ является бесконечным множеством.

Доказательство. Необходимость. Допустим противное – $A_{\overline{f}_n}=\{(\overline{b}^1,\overline{a}^1),...,(\overline{b}^k,\overline{a}^k)\}$, где $(\overline{b}^i,\overline{a}^i)=(b_1^i,...,b_m^i,a_1^i,...,a_n^i)\in Z$. Тогда выполнено: $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})\models\exists u_1...u_m\exists v_1...v_n(f_1(\overline{u},\overline{v}_1)\cdot...\cdot f_n(\overline{u},\overline{v}_n)=0\,\&\,\underset{i}{\&}(\overline{u},\overline{v})\neq(\overline{b}^i,a^i))$,

где $\overline{u}=(u_1,...,u_m),\overline{v}=(v_1,...,v_n),\overline{v}_i=(v_1,...,v_i)$. Так как $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\overline{\beta}](\overline{x}_n^{\overline{f}_n})$ компаньоны, а параметры $(\overline{b}^1,\overline{a}^1),...,(\overline{b}^k,\overline{a}^k)$ E-выразимы в $\mathbb{Z}$, то в $\mathbb{Z}$ имеется решение $f_1(\overline{u},\overline{v}_1)\cdot...\cdot f_n(\overline{u},\overline{v}_n)=0$ не принадлежащее $A_{\overline{f}}$. Противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Вначале докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $I(A_{\bar{f}_n})=\{\, g \mid g\in \mathbb{Z}[\bar{\beta},\bar{x}_n],\ A_{\bar{f}_n}\subseteq A_g, \bar{f}_n=(f_1,\ldots,f_n)\}$, где каждый неприводимый в кольце $\mathbb{Z}[\bar{\beta},x_i](\bar{x}_{i-1}^{\bar{f}_{i-1}})$ многочлен $f_i(\bar{\beta},\bar{x}_{i-1},x_i), i=1,..,n$ содержит единицу. Тогда идеал $I(A_{\bar{f}_n})$ в кольце $\mathbb{Z}[\bar{\beta},\bar{x}_n]$ порождается многочленами $f_1,\ldots,f_n$ т.е. $I(A_{\bar{f}_n})=(\bar{f}_n)$.

Доказательство. Действительно, неприводимый многочлен $f_{n-1}(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)$ в кольце целостности $\mathbb{Z}[\bar{\beta},x_{n-1}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})$ является также неприводимым многочленом в кольце целостности $\widetilde{\mathbb{Z}[\bar{\beta},x_{n-1}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})}[x_n]$ над полем частных $\widetilde{\mathbb{Z}[\bar{\beta},x_{n-1}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})}$. В $\widetilde{\mathbb{Z}[\bar{\beta},x_{n-1}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})}[x_n]$ идеал $I(\widetilde{A_{\bar{f}_n}})$ будет главным, порождающим элементом которого будет неприводимый многочлен $f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)\in I(\widetilde{A_{\bar{f}_n}})$. Пусть $g\in I(A_{\bar{f}_n})\subseteq I(\widetilde{A_{\bar{f}_n}})$, тогда $f_n \mid g$ (f_n делит g) в кольце $\widetilde{\mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})}[x_n]$, отсюда следует, что выполнено равенство

$n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})g(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)=m(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)q(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)$,

где $n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}}),m(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})\in \mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}}),q(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)\in \mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})[x_n]$. В силу однозначности разложения в кольце целостнсти на неприводимые множители имеем $f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)\mid n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})$ или $f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)\mid g(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)$. Очевидно первое невозможно вследстие выбора $f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)$. Следовательно $f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)\mid g(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)$. Из теоремы 4 следует, что последнее соотношение делимости $g(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)=f_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)q_n(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}},x_n)$ в кольце $\mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_{n-1}^{\bar{f}_{n-1}})[x_n]$ влечет соотношение $g(\bar{\beta},\bar{x}_n)=f_n(\bar{\beta},\bar{x}_n)q_n(\bar{\beta},\bar{x}_n)+f_{n-1}(\bar{\beta},\bar{x}_{n-1})q_{n-1}(\bar{\beta},\bar{x}_n)+\ldots+f_{n-1}(\bar{\beta},x_1)q_{n-1}(\bar{\beta},x_1)\ \mathbb{Z}[\bar{\beta},\bar{x}_n]$, т.е. $I(A_{\bar{f}_n})=(\bar{f}_n)$. Предложение доказано.

Теперь вернёмся к доказательству достаточности. Пусть $A_{\bar{f}_n}=A_{f_1}\times Z^{n-1}\cap A_{f_2}\times Z^{n-2}\cap\ldots\cap A_{f_n}$ бесконечное множество. Достаточно доказать, что в моделях $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_n^{\bar{f}_n})$ выполняются одни и те же экзистенциальные предложения. Очевидно, что экзистенциальное предложение, истинное в $\mathbb{Z}$, также истинно в $\mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_n^{\bar{f}_n})$. Докажем, что каждое экзистенциальное предложение φ, выполненное в $\mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_n^{\bar{f}_n})$, выполняется в $\mathbb{Z}$. Можно считать, что бескванторная формула φ, содержащая решения в кольце целлостности $\mathbb{Z}[\bar{\beta}](\bar{x}_n^{\bar{f}_n})$, после подстановки этих решений принимает вид $\& g_i(\bar{\beta},\bar{x}_n^{\bar{f}_n})=0\ \&\ h(\bar{\beta},\bar{x}_n^{\bar{f}_n})\neq 0$. В последнем неравенстве мы заменили несколько неравенств их произведением. Из предложения 3 следует, что $g_i(\bar{\beta},\bar{x}_n)\in I(A_{\bar{f}_n}), h(\bar{\beta},\bar{x}_n)\notin I(A_{\bar{f}_n}), i=1,\ldots,n.$ Следовательно, $A_{\bar{f}_n}\setminus A_h\neq\varnothing$. Для $\bar{p}_m,\bar{q}_n\in A_{\bar{f}_n}\setminus A_h$ в кольце $\mathbb{Z}$ выполняется система $\& g_i(\bar{p}_m,\bar{q}_n)=0\ \&\ h(\bar{p}_m,\bar{q}_n)\neq 0$, что завершает доказательство достаточности, а вместе с этим и доказательство теоремы 5.

2 Экзистенциально замкнутые модели кольца целых чисел и их число

Укажем алгоритм построения экзистенциально замкнутых моделей.

Пусть $F=\{f_1,f_2,...\}$, где $f_i(\bar{\beta}_i,x_i)$ – неприводимы над кольцом $\mathbb{Z}$, $\bar{\beta}_j \in B, x_k \in X$, $B=\{\beta_1,\beta_2,....\}$, $X=\{x_1,x_2,....\}$, $B=\{\beta_1,\beta_2,....\}$, $X=\{x_1,x_2,....\}$ – счетные множества независимых переменных и все переменные из B в многочлене $f_i(\bar{\beta}_i,x_i)$ содержатся среди $\bar{\beta}_i$. Шаг 1. Положим $\mathbb{Z}_1^F[B]=\mathbb{Z}[B]/f_1$. Так как экзистенциальное предложение выполненное в $\mathbb{Z}_1^F[B]$ выполняется в подкольце $\mathbb{Z}_1^F[\bar{\beta}_s]\in C(\mathbb{Z})$ для некоторого s, то $\mathbb{Z}_1^F[B]\in C(\mathbb{Z})$. Пусть уже определены компаньоны $\mathbb{Z}_1^F[B]\subseteq...\subseteq\mathbb{Z}_{n-1}^F[B]$. Шаг n. Положим $\mathbb{Z}_1^F[B]=\mathbb{Z}_{n-1}^F[B]/f_n^*$, где f_n^* неприводимый над кольцом $\mathbb{Z}_n^F[B]$ делитель первого неиспользованного многочлена $f_{n^*}(\bar{\beta}_{n^*},x_{n^*})$ из $F=\{f_1,f_2,...\}$, неимеющий ни одного корня в $\mathbb{Z}_{n-1}^F[B]$ и аннулятор $A_{\bar{f}_n^*}=A_{f_1}\times Z^{n-1}\cap A_{f_2^*}\times Z^{n-2}\cap...\cap A_{f_n^*}$ имеет бесконечно много нулей. Положим $\mathbb{Z}_\omega^F[B]=\cup\mathbb{Z}_\omega^F[B]$.

ТЕОРЕМА 6. Кольцо целостности $\mathbb{Z}_\omega^F[B]$ является экзистенциально замкнутым компаньоном кольца $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из того, что в возрастающей цепочке колец $\mathbb{Z}_1^F[B]\subseteq...\subseteq\mathbb{Z}_{n-1}^F[B]\subseteq...$ каждое кольцо является компаньоном $\mathbb{Z}$, следует, что и $\mathbb{Z}_\omega^F[B]=\cup\mathbb{Z}_i^F[B]$ является компаньоном $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{A}\supseteq\mathbb{Z}_\omega^F[B]$. Докажем, что каждое экзистенциальное предложение φ с параметрами из $\mathbb{Z}^{\mathrm{F}}{}_\omega[B]$, выполненное в $\mathbb{A}$, выполняется в $\mathbb{Z}_\omega[B]$. Можно считать, что бескванторная формула φ, содержащяя решение в кольце $\mathbb{A}$, после подстановки существующих решений имеет вид $\& g_i(\bar{\beta}_m,\bar{\alpha}_n,\bar{y}_k^{\bar{e}_k})=0 \,\&\, h(\bar{\beta}_m,\bar{\alpha}_n,\bar{y}_k^{\bar{e}_k})\neq 0$, где $\bar{\alpha}_n=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – новые трансцендентные элементы из $\mathbb{A}$. Докажем, что подкольцо $\mathbb{Z}[\bar{\beta}_m,\bar{\alpha}_n](\bar{x}_k^{\bar{e}_k})$ изоморфна некоторому подкольцу $\mathbb{Z}_\omega^F[B]=\cup\mathbb{Z}_i^F[B]$, где $\bar{\alpha}_n=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – новые трансцендентные элементы из $\mathbb{A}$. Пусть $\bar{y}_k^{\bar{e}_k}$ являются корнями неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов $\overline{e_k'}$. Так как $\mathbb{A}\supseteq\mathbb{Z}_\omega^F[B]$, то $A_{\bar{e}_k'}$ – бесконечное множетсво, тогда кольцо $\mathbb{Z}[\bar{\beta}_m,\bar{\alpha}_n](\bar{y}_k^{\bar{e}_k})$ изоморфно вкладывается в некоторое $\mathbb{Z}[\bar{\beta}_i](\bar{x}_i^{\bar{f}_i})$.Теорема доказана.

Рассмотрим изоморфизмы структуры $\mathbb{Z}_\omega^F[B]$, оставляющие множество B трансцендентных элементов на месте.

ТЕОРЕМА 7. Число неизоморфных экзистенциально замкнутых компаньонов $\mathbb{Z}_\omega^F[B]$ кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ континуально.

Доказательство. Пусть $\mathrm{E} = \{\varepsilon : \varepsilon = (a_1, a_2, ...),\ a_2 \in \{0,1\}\}$ – множество всех двоичных последовательностей. Положим $F_\varepsilon = (f_1, f_2, ...)$, где

$$f_n(\beta_1, x_n) = \begin{cases} x_n^2 - \beta_n, \text{если } \varepsilon = 0, \\ x_n^2 - \beta_n - 1, \text{ если } \varepsilon = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда $\mathbb{Z}_\omega^{F_\varepsilon}[B] = \cup \mathbb{Z}_i^{F_\varepsilon}[B]$ – алгебраическое замыкание $\mathbb{Z}[B]$ неприводимыми многочленами f_i над $\mathbb{Z}$. Из теоремы 5 следует, что для $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ кольца $\mathbb{Z}_\omega^{F_{\varepsilon_1}}[B]$ и $\mathbb{Z}_\omega^{F_{\varepsilon_2}}[B]$ неизоморфны, следовательно и их экзистенциальные расширения неизоморфны. Теорема доказана.

Заключение

Общая теория компаньон-классов Фрэсе и их теорий, разрабатываемых А.Т.Нуртазиным, составляет отдельную новую область в теории моделей. Этот подход, приложенный к конкретным классическим структурам и их теориям дает новые инструменты для исследований этих объектов. Изучение компаньон–класса кольца целых чисел обнаруживает области целостности, содержащие трансцендентые и, возможно алгебраические элементы со специальными свойствами многочленов определяющих эти элементы как компаньоны кольца целых чисел. Экзистенциально замкнутые компаньоны кольца целых чисел являются алгебраическими замыканиями согласованных между собой многочленов.

Благодарности. Настоящая работа выполнена в Институте Информационных и Вычислительных Технологий при поддержке Комитета Науки Министерства Образования и Науки Республики Казахстан (Грант №AP05135285 Теория индуктивных, экзистенциально замкнутых и форсинг-компаньонов и позитивно экзистенциально замкнутых моделей).

Литература

1 Barwise J. Robinson A., Completing theories by forcing // Ann. Math. Logic. – 1970. – №2. – P.119–142.
2 Robinson A. On the Metamathematics of Algebra.– Amsterdam.– North – Holland, 1951.– 540p.
3 Белеградек О.В. Алгебраически замкнутые группы // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13. – С. 239–255.
4 Cohen P.J. Set Theory and the Continuum Hypothesis. – NY., Benjamin, 1966.– 467 с.
5 Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Тайманов А.Д. Теория моделей.– Справочная книга по математической логике.– М.: "Наука", 1982, Ч. 1. – 492 с.
6 Fraisse R. Sur quelquesclassificationsdes systemesderelations // Publ.scient. de l'univ. d'Algers.– 1955. – A1. – P. 35–182.
7 Macintyre A. On algebraically closed groups // Ann. Math..– 1972. – Vol.96.–P. 53–97.

8 Macintyre A. Omitting quantifier-free types in generic structures // Journ. of Symbolic Logic.– 1972.– № 37.– P.512 - 520.
9 Nurtazin A.T. Countable infinite existentially closed models of universally axiomatizable theories// Siberian Advances in Mathematics.– 2016.– №26.–P. 99–125.
10 Нуртазин А.Т. Свойства экзистенциально замкнутых моделей // Алгебра и логика.– 2018.– Т.57, №3.– С. 321–327.
11 Nurtazin A.T. Properties of exictentionally cloused companions // Algebra and Logic.– 2018.– Vol.57, №3. – P. 211–221.
12 Нуртазин А.Т. Вынуждение формул в структурах и классах Фрэсе // Алгебра и логика.– 2018. – Т.57, №5.– С. 567–586.
13 Nurtazin A.T. Forcing formulas in Fraise structures and classes // Algebra and Logic.– 2018.– Vol. 57, №5. – P. 368–380.
14 Нуртазин А.Т. Счетные экзистенциально замкнутые модели универсально аксиоматизируемых теорий// Математические труды.– 2015.– Т.18, №1. – С. 48-97.
15 Нуртазин А.Т. Введение в теорию моделей, элиминация кванторов и экзистенциальная замкнутость. – Алматы: НЦ ГНТЭ, 2017.– 187 с.
16 Нуртазин А.Т. Любой форсинг-тип реализуется в некоторой форсинг-модели // Четырнадцатая междунар. азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем».– Иссык-Куль, 2018.– С. 109–113.
17 Хисамиев З.Г., Алимжанова С.А. Компаньоны кольца целых чисел // Матер.научн.конф. ИИВТ МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий». – Алматы, 2019. – С.361–365.