

УДК 519.85+539.424+538.9

*Г. Ч. Тукембаева, аспирант, e-mail: tukembaeva.g@gmail.com**Б. К. Темиров, д.ф.-м.н., профессор**КНУ им. Ж. Баласагына*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОНА В МЕТАСТАБИЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

В статье на базе операторно-разностных уравнений исследуется метастабильное состояние для различных приложениях науки и технологий. Объектом изучения являются двухфазные среды, свойства которой заданы произвольными параметрами без привязки к предмету исследования. Среда моделируется кубической функцией для реального газа по такой формуле, которая учитывает свойства и метастабильное состояние среды. Особое внимание уделено взаимодействию двух фаз, так как они генерируют колебания, которые, в свою очередь, солитон. Колебания среды отображаются в модели комплексными числами, поэтому формализация параметров среды нуждается в новых математических определениях для применения разнообразного математического аппарата. Тем самым, нам пришлось рассматривать элемент объема в виде комплексных чисел, чтобы аналитически описать солитон и получить решение классическими методами математики. Для анализа применены метод Остроградского, исследование устойчивости полиномов по Гурвицу и интегрирование рациональных дробей. Таким образом, справедливость комплексных чисел для описания колебаний аппаратом математической физики позволяет изучать процессы под новым углом познания, чем способствуют созданию адекватных моделей в исследованиях.

**Ключевые слова:** двухфазная среда, осцилляция, метастабильное состояние, солитон, колебательная устойчивость, определители Гурвица.

### Введение

Область двухфазных сред лежит под критической изотермой, где уравнение Ван-дер-Ваальса [1]–[10] расходится с опытом, особенно, в метастабильном состоянии. Она описывается моделями двухфазного состояния [11] и вызывает интерес в связи с пузырьковым термоядерным синтезом [12]–[14]. В метастабильном состоянии протекают процессы, вызывающие научный интерес и порождающие странный аттрактор и динамический хаос, решение которых остается открытым [15]–[20]. В этой области кубическая функция должна качественно и количественно метастабильное состояние на возрастающем участке изотермы, который считается теоретическим. На нем находится точка перегиба, в которой участок пересекается с изобарой так, что кубическая функция разделена пополам, а площади под ней равны, согласно правилу Максвелла. Точки минимума и максимума кубической функции по разные стороны от точки перегиба ограничивают возрастающий участок изотермы и не имеют физического обоснования, так как возрастающие участки изотермы неустойчивые. Для исследования таких процессов привлечена математическая теория Я.В. Быкова [21] для операторно-разностных уравнений 1-го порядка, развитая Б.К. Темировым для уравнений четного [22] и нечетного порядка [23]. Трудности возникают, когда значение элемента объема выражается комплексными корнями, а они появляются, когда решение – солитон в виде  $\operatorname{arctg}$ -функции [24]. Это вызвано тем, что реальный газ содержит полином 2-й степени в знаменателе, корни которого комплексные, которые порождают колебания, где интегрирование такого полинома выражается через  $\operatorname{arctg}$ , см. с. 118 в [25] или с. 422 в [26]. Наличие колебаний указывает на взаимодействие двух фаз изучаемой среды.

**Цель работы** – моделирование двухфазной среды с учетом метастабильного состояния для процессов, описываемых кубической функцией.

Цель достигается тем, что результатом является солитон, так как он образуется на границе раздела фаз.

**Описание модели**

Рассмотрим график кубической функции (рис.) в системе координат  $VOP$ , где  $P$  – давление,  $V$  – молярный объем,  $T_k$  – критическая изотерма с критической точкой  $K$ , в которой три корня  $V_i$  сливаются в один кратный действительный  $V_k$ . Под ней расположена субкритическая изотерма  $T_M$  с возрастающим участком  $BMC$  так, что  $T_M < T_k$ .

Участок  $BMC$  имеет 3 критические точки:  $B$ ,  $M$  и  $C$ . В точке минимума  $B(V_{min}, P_{min})$

$$\frac{dP}{dV} = 0, \quad \frac{d^2P}{dV^2} > 0.$$

В точке максимума  $C(V_{max}, P_{max})$

$$\frac{dP}{dV} = 0, \quad \frac{d^2P}{dV^2} < 0.$$

Точка  $M(V_M, P_M)$  является точкой перегиба (метастабильного состояния), в которой

$$\frac{dP}{dV} = 0, \quad \frac{d^2P}{dV^2} = 0.$$

Она определяет новую, локальную систему координат  $V'O'P'$ , проходящую через точку  $M$ , где кубическая функция симметрична, относительно начала координат  $O'$ , т.е. точки  $M$ .

Координатные оси разбивают плоскость на четыре квадранта: I, II, III и IV. Объем и давление в III квадранте принимают отрицательные значения. Такие значения определяют отрицательные элементы объема –  $\Delta V < 0$  в символе Леви-Чивиты, что важно в тензорном анализе, но отрицательные давления известны. Тогда представление  $\Delta V$  комплексными числами имеет смысл при изучении устойчивых колебаний, поскольку в этом случае удается получить солитон, поэтому в [27] сформулирована лемма об отрицательном элементе объема. Колебания порождаются отрицательным дискриминант, так как корень из него становится комплексным числом. Следовательно, особая роль отводится огибающей и дискриминантной кривой.

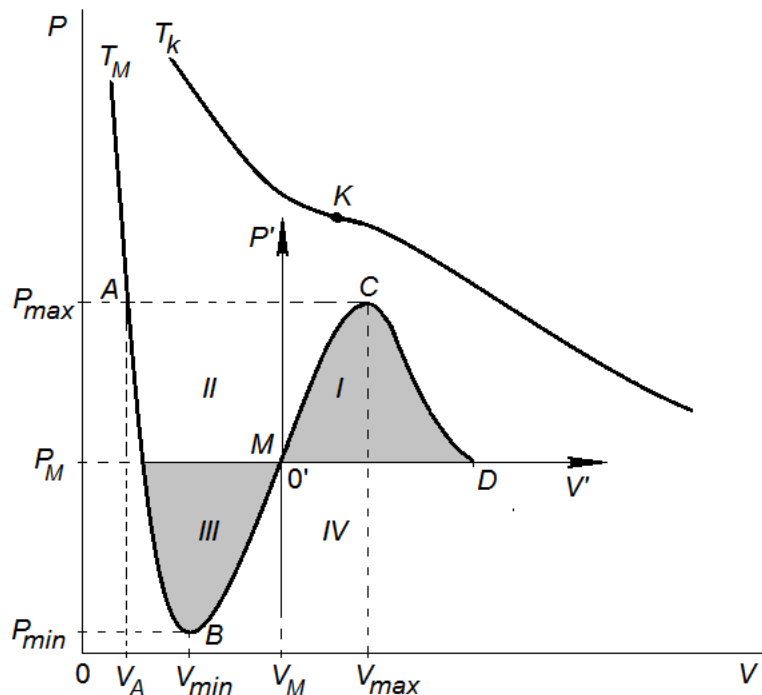


Рисунок – Возрастающий участок  $BMC$  под критической изотермой  $T_k$ .

Локальная система координат  $V'O'P'$  криволинейная и спрямляется по мере роста  $n$  в производной  $n$ -го порядка

$$\frac{d^n P}{dV^n} = 0.$$

Физически это означает: чем больше  $n$ , тем дальше от наблюдателя расположен горизонт прямой видимости. Например, противотуманные фары в туман, дождь, снегопад. Другой пример – радиоволны: с увеличением длины волны растет дальность их распространения. Математически это выражается операторно-разностными уравнениями  $n$ -го порядка. Для трехмерного пространства  $(x, y, z)$  вторая производная имеет вид матрицы Гессе, а точка перегиба переходит в седловую точку, т.е. в направлении  $x$  становится перевалом, ограниченным с обеих сторон склонами в направлении  $y$ .

Изучим поведение пузырька на субкритической изотерме  $T_M$  с внутренней энергией  $U$  в дифференциальной форме

$$dU = TdS - PdV, \tag{1}$$

где  $S$  – энтропия, давление

$$P = \frac{dF_n}{ds}$$

для расширяющегося газа  $F_n$  – нормальная составляющая силы приложена изнутри к элементу площади  $ds$ . Для газа, который описывается формулой Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \tag{2}$$

где  $V$  – молярный объем газа [ $\text{м}^3/\text{моль}$ ],  $a$  [ $\text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2$ ] и  $b$  [ $\text{м}^3/\text{моль}$ ] – поправки Ван-дер-Ваальса;  $T$  – температура по Кельвину [K],  $P$  – давление [Па],  $R=8,314$  Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная;  $a, b, R, T \in \mathbf{R}_+$ , но  $P \in \mathbf{R}, V \in \mathbf{C}$ . Это необходимо для сравнения с моделью, которую предстоит разработать. Соответствующее формуле (2) уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$PV^3 - (RT + Pb)V^2 + aV - ab = 0.$$

Тогда на изотерме  $T=\text{const}$  интегрирование дает

$$\begin{aligned} U &= TS - \int \left( \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV, \\ U &= TS - RT \int \frac{dV}{V-b} + a \int V^{-2} dV, \\ U &= TS - RT \ln|V-b| - \frac{a}{V} + C. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае, когда газ сжимается, то  $F_n$  меняет знак, поэтому

$$P = -\frac{dF_n}{ds}.$$

Следовательно, внутренняя энергия растет

$$U = T \int dS + \int PdV.$$

Подстановка по формуле (1) или (2) дает

$$\begin{aligned} U &= TS + \int \left( \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV, \\ U &= TS + RT \int \frac{dV}{V-b} - a \int \frac{dV}{V^2}, \\ U &= TS + RT \ln|V-b| + \frac{a}{V} + C. \end{aligned}$$

Значит, для сжатия имеем большую величину по сравнению с внутренней энергии, полученной в (3) для расширения. Тем самым, в зависимости от направления нормальной составляющей силы принимаем объем положительным, если  $F_n$  отвечает расширению пузырька, или отрицательным объемом, если  $F_n$  соответствует сжатию пузырька.

Начнем с точки А, где за счет убыли внутренней энергии начинается рост пузырька. Размеры пузырька ограничены пределом сжатия электронного газа, слева от т. А. Поэтому в области отрицательных элементов объема, где  $F_n$  со знаком "-", соответственно системе координат  $V'O'P'$  в III квадранте. Поправка Ван-дер-Ваальса  $b$  меняет знак. Вместо  $(V-b)$  получаем  $(V+b)$  за счет плотности электронного газа, т.е. его значительной внутренней энергии  $U$ . Уравнение Ван-дер-Ваальса выведено для разреженных газов, поэтому таких эффектов не учитывает. Более того, давление электронного газа зависит от электронов на внешних орбитах, поэтому сильнее проявляется в одном направлении по сравнению с другим направлением, так как эти электроны пытаются взаимодействовать с атомами по другую сторону оболочки пузырька. Давление в пузырьке ослабляется с  $P_{max}$  до  $P_{min}$  в точке В, так как  $P_{min}$  равно давлению окружающей среды. Затем, объем пузырька увеличивается на возрастающем участке  $BMC$  изотермы  $T_M$ .

Как только размеры пузырька достигнут значения  $V_M$ , выходим на горизонтальную площадку точки перегиба М. Горизонтальность обуславливает скапливание пузырьков на плоскости в метастабильном состоянии. Справа от  $V_M$  в системе координат  $V'O'P'$  давление и объем принимают положительные значения. Дальнейший рост размеров пузырька, благодаря внутренней энергии, ограничен  $V_{max}$  и соответствующим  $P_{max}$  в точке С, так как  $P_{max}$  определяется коэффициентом поверхностного натяжения. Поэтому на оболочке пузырька возникает разрыв и в среду впрыскивается электронный газ, а сам пузырек сжимается до размеров  $V_A$ , переходя по изобаре из т. С в т. А. Энергия среды повышается за счет электронов, отдаваемых атомами пузырька с внешних оболочек, которые, тем самым, превращаются отрицательные ионы. Из т. А пузырек расширяется, так как при сжатии возросла его внутренняя энергия, а потому замыкается цикл  $ABMCA$  (см. рис.).

### Исследование устойчивости

В работах [4], [8]-[10] приведены различные модели реального газа, в том числе, по формуле Ван-дер-Ваальса (2): уравнение Редлиха – Квонга

$$P = -\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{T}V(V+b)};$$

уравнение Бертло

$$P = -\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2};$$

второе уравнение Дитеричи

$$P = -\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^{5/3}};$$

Соаве – Редлиха – Квонга

$$\left[ P + \frac{a(\tilde{T})}{V(V+b)} \right] (V-b) = RT$$

Пенга – Робинсона

$$P = -\frac{RT}{V-b} - \frac{a\{T\}}{V(V+b) + b(V-b)};$$

Исикавы – Чанга – Лу

$$P = -\frac{RT(2V + b(T))}{V(2V - b(T))} - \frac{a(T)}{\sqrt{TV}(V + b(T))};$$

Фогельсона – Лихачева

$$\left[ P + \frac{a}{(V + c)^k T^m} \right] (V - b) = RT.$$

Общей чертой этих моделей является то, что содержат  $(V - b)$  в знаменателе идеального газа, как в формуле Ван-дер-Ваальса (2).

Согласно вышеописанной модели, покажем, как в III квадранте меняется знак идеальной составляющей реального газа на примере формулы (2). Для этого надо переместить начало координат  $VOP$  в точку перегиба  $M$ . Координаты т.  $M$  вычисляются с помощью первой и второй производных  $dP/dV=0$  и  $d^2P/dV^2=0$ . Тогда имеем новую систему координат  $V'O'P'$ , относительно которой в III квадранте элемент объема и давление в нем отрицательные. Значит, в  $(V - b)$  надо поменять знак перед  $V$  на " - ", поэтому в скобках получим  $(-V - b)$ . Теперь выносим знак " - " из скобок и имеем:  $-(V+b)$ . Следовательно, формула (2) обретет вид

$$P = -\frac{RT}{V + b} - \frac{a}{V^2},$$

как и в вышеперечисленных моделях.

Обобщение формулы (2) рассмотрим в следующем виде

$$P = \frac{RT}{V-b} + \frac{MV-N}{V^2-pV-q}, \tag{4}$$

где  $b, p, q, T, M, N \in \mathbf{R}_+$ . Квадратный трехчлен не разлагается на множители первой степени, так как дискриминант  $D=(p/2)^2-q<0$ , а поэтому  $V \in \mathbf{C}$ . Что касается давления, то оно может колебаться вместе с элементом объема, поэтому определимся с ним в ходе решения. Роль коэффициентов  $p$  и  $q$  следующая. В силу того, что  $D<0$ , подстановкой  $z=V+p/2$  получим

$$P = \frac{RT}{V-b} + \frac{MV-N}{z^2-k^2},$$

где

$$V^2 + pV + q = \left(V + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$k^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

поэтому

$$P = \frac{RT}{V-b} + \frac{MV-N}{(z-ik)(z-ik)}.$$

Тогда второе слагаемое формулы (4) интегрируется известным образом, см. с. 423-424 в [26]. Значит, простейшая дробь второго типа

$$\int \frac{MV-N}{V^2-pV-q} dV = \frac{M}{2} \ln(V^2 + pV + q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2V-p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \tag{5}$$

содержит солитон. Это указывает, что взаимодействие двух фаз между собой генерирует колебания, а они – солитон. Подстановка выражения (5) в формулу (1) позволяет найти внутреннюю энергию  $U$ . Однако, сначала, надо исследовать уравнение, определяемое формулой (4) на устойчивость. Например, интегрирование формулы Ван-дер-Ваальса (2) не дало солитон, чему свидетельствует выражение (3), так как только в случае  $V \in \mathbf{C}$ , подынтегральная функция содержит простейшие дроби второго типа.

Преобразуем формулу (4) в уравнение

$$P(V + b)(V^2 + pV + q) = RT(V^2 + pV + q) + (V + b)(MV + N).$$

Поскольку

$$P(V + b)(V^2 + pV + q) = PV^3 + P(p + b)V^2 + P(q + pb)V + Pqb,$$

то

$$PV^3 + P(p + b)V^2 + P(q + pb)V + Pqb = (RT + M)V^2 + (pRT + bM + N)V + qRT + bN.$$

Перенесем правую часть на левую сторону равенства и получим уравнение

$$PV^3 + [P(p + b) - (RT + M)]V^2 + [P(q + pb) - (pRT + bM + N)]V + (Pqb - qRT - bN) = 0,$$

где свободный член и коэффициенты при разных степенях взяты в скобки так, что

$$a_0V^3 + a_1V^2 + a_2V + a_3 = 0.$$

Необходимые условия устойчивости выполнены, если все коэффициенты

$$a_0 = P > 0, \quad a_1 = P(p + b) - (RT + M) > 0, \\ a_2 = P(q + pb) - (pRT + bM + N) > 0, \quad a_3 = Pqb - qRT - bN > 0.$$

С учетом определителей Гурвица имеем

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} P(p + b) - (RT + M) & Pqb - qRT - bN & 0 \\ P & P(q + pb) - (pRT + bM + N) & 0 \\ 0 & P(p + b) - (RT + M) & Pqb - qRT - bN \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P(p + b) - (RT + M) & Pqb - qRT - bN \\ P & P(q + pb) - (pRT + bM + N) \end{vmatrix} > 0,$$

$$Pqb > qRT + bN,$$

$$P(q + pb) > pRT + bM + N.$$

$$P(p + b) > RT + M,$$

$$P > 0.$$

Из условия  $\Delta_3 > 0$  имеем

$$(Pqb - qRT - bN) \begin{vmatrix} P(p + b) - (RT + M) & Pqb - qRT - bN \\ P & P(q + pb) - (pRT + bM + N) \end{vmatrix} > 0.$$

На границе аperiodической устойчивости  $\Delta_3 = 0$ , следовательно

$$Pqb - qRT - bN = 0,$$

$$\begin{vmatrix} P(p + b) - (RT + M) & Pqb - qRT - bN \\ P & P(q + pb) - (pRT + bM + N) \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, давление на границе аperiodической устойчивости

$$P = \frac{qRT + bN}{qb}.$$

На границе колебательной устойчивости

$$[P(p + b) - (RT + M)][P(q + pb) - (pRT + bM + N)] = P(Pqb - qRT - bN).$$

Раскрывая в неравенстве скобки, получим

$$(q + pb)(p + b)P^2 - (pRT + bM + N)(p + b)P - (RT + M)(q + pb)P \\ + (RT + M)(pRT + bM + N) = P(Pqb - qRT - bN),$$

$$(q + pb)(p + b)P^2 - [(pRT + bM + N)(p + b) + (RT + M)(q + pb)]P \\ + (RT + M)(pRT + bM + N) = qbP^2 - qRTp - bNP,$$

$$(p^2b + pb^2 + qp)P^2 - [(p + b)(pRT + bM + N) + (RT + M)(q + pb) + qRT + bN]P \\ + (RT + M)(pRT + bM + N) = 0,$$

$$D = [(p + b)(pRT + bM + N) + (RT + M)(q + pb) + qRT + bN]^2 \\ - 4(p^2b + pb^2 + qp)(RT + M)(pRT + bM + N),$$

$$D = [(p + b)(pRT + bM + N)]^2 + 2[(p + b)(pRT + bM + N)[(RT + M)(q + pb) + qRT + bN] + [(RT + M)(q + pb) + qRT + bN]^2 - 4(p^2b + pb^2 + qp)(RT + M)(pRT + bM + N),$$

Обозначим

$$\alpha = p^2b + pb^2 + qp, \\ \beta = [(p + b)(pRT + bM + N) + (RT + M)(q + pb) + qRT + bN], \\ \gamma = (RT + M)(pRT + bM + N)$$

и получим квадратное уравнение

$$\alpha P^2 - \beta P + \gamma = 0.$$

Корни уравнения

$$P_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

положительные, если дискриминант

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0.$$

С учетом коэффициентов

$$D = [(p + b)(pRT + bM + N)]^2 + 2[(p + b)(pRT + bM + N)[(RT + M)(q + pb) + qRT + bN] + [(RT + M)(q + pb) + qRT + bN]^2 - 4(p^2b + pb^2 + qp)(RT + M)(pRT + bM + N).$$

Колебаниям, в данном случае неустойчивым, отвечает  $D < 0$ , т.е. неравенство  $[(p + b)(pRT + bM + N)]^2 + 2[(p + b)(pRT + bM + N)[(RT + M)(q + pb) + qRT + bN] + [(RT + M)(q + pb) + qRT + bN]^2 < 4(p^2b + pb^2 + qp)(RT + M)(pRT + bM + N)$ .

Тогда давление будет комплексным числом  $P \in \mathbb{C}$ , так как колебания – это попеременное расширение – сжатие замкнутого элемента объема.

Отрицательное давление  $P < 0$  указывает, что элемент объема внутри среды сжимается, поэтому формула (4) примет вид

$$-P = \frac{RT}{V + b} + \frac{MV + N}{V^2 + pV + q}.$$

Меняя знаки, чтобы  $a_0$  удовлетворяло критерию Гурвица, получим уравнение

$$P(V + b)(V^2 + pV + q) = -RT(V^2 + pV + q) - (V + b)(MV + N), \\ P(V + b)(V^2 + pV + q) + RT(V^2 + pV + q) + (V + b)(MV + N) = 0, \\ PV^3 + [(p + b)P + RT + M]V^2 + [(q + pb)P + pRT + N + bM]V + (qbP + qRT + bN) = 0, \\ a_0V^3 + a_1V^2 + a_2V + a_3 = 0.$$

Теперь, все коэффициенты положительные, в том числе,  $a_0 = P > 0$ , поэтому по критерию Гурвица

$$P > 0, \quad (p + b)P + RT + M > 0, \quad (q + pb)P + pRT + N + bM > 0, \\ qbP + qRT + bN > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} (p + b)P + RT + M & qbP + qRT + bN \\ P & (q + pb)P + pRT + N + bM \end{bmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} (p + b)P + RT + M & qbP + qRT + bN & 0 \\ P & (q + pb)P + pRT + N + bM & 0 \\ 0 & (p + b)P + RT + M & qbP + qRT + bN \end{bmatrix} > 0.$$

Проверяем на колебательную устойчивость  $\Delta_2 > 0$  и имеем неравенство  $[(p + b)P + RT + M][(q + pb)P + pRT + N + bM] - P(qbP + qRT + bN) > 0$ .

Преобразуем его

$$[p^2b + pb^2 + qp]P^2 + [(p + b)pRT + (p + b)bM + pN + (q + pb)M + pbRT]P + [p(RT)^2 + NRT + bMRT + pMRT + NM + bM^2] > 0$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha &= p^2b + pb^2 + qp > 0, \\ \delta &= (p + b)pRT + (p + b)bM + pN + (q + pb)M + pbRT > 0, \\ \gamma &= (RT + M)(pRT + bM + N) > 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$(RT + M)(pRT + bM + N) = p(RT)^2 + NRT + bMRT + pMRT + NM + bM^2.$$

Следовательно,  $\delta < \beta$ , так как

$$\delta = (p + b)pRT + (p + b)bM + pN + (q + pb)M + pbRT,$$

но

$$\beta = (p + b)pRT + (p + b)bM + pN + (q + pb)M + pbRT + 2(qRT + bN).$$

Значит,

$$\beta = \delta + 2(qRT + bN).$$

Тогда имеем

$$\alpha P^2 + \delta P + \gamma > 0.$$

На границе колебательной устойчивости имеем место квадратное уравнение

$$\alpha P^2 + \delta P + \gamma = 0.$$

Найдем корни уравнения

$$P_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Поскольку дискриминант  $D = \delta^2 - 4\alpha\gamma$ , то паре действительных корней отвечает  $D > 0$ , где оба корня меньше нуля. Значит, в среде возникло отрицательное давление. Расширение сменилось сжатием, т.е. знак "+" поменялся на знак "-" в  $dF_n = \pm Pds$ .

Для устойчивых колебаний, если  $4\alpha\gamma > \delta^2$ , Поскольку

$$\delta = \beta - 2(qRT + bN), \quad \delta^2 = [\beta - 2(qRT + bN)]^2,$$

то комплексные корни определяются неравенством

$$D = \delta^2 - 4\alpha\gamma < 0,$$

$$D = [\beta - 2(qRT + bN)]^2 - 4\alpha\gamma < 0.$$

Тем самым, колебания непрерывно переходят из области неустойчивых колебаний, где  $P > 0$ , в область устойчивых колебаний, отвечающих  $P < 0$ . В силу того, что

$$[\beta - 2(qRT + bN)]^2 - 4\alpha\gamma = \beta^2 - 4\beta(qRT + bN) + 4(qRT + bN)^2 - 4\alpha\gamma,$$

то при выполнении

$$[\beta - 2(qRT + bN)]^2 \geq 4\alpha\gamma,$$

дискриминант  $D \geq 0$  имеем границу действительных корней в случае равенства. Со стороны комплексных корней получаем неравенство

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 4\beta(qRT + bN) - 4(qRT + bN)^2,$$

$$D < 4(qRT + bN)[\delta + qRT + bN],$$

которое указывает, что давление стало комплексным числом, т.е.  $P \in \mathbb{C}$ .

Пусть идеальный газ в знаменателе представлен полиномом 1-й степени  $(V - b)$

$$P = \frac{RT}{V - b} + \frac{MV + N}{V^2 + pV + q}.$$



Тогда уравнение примет вид

$$PV^3 + [P(p - b) - (RT + M)]V^2 + [P(q - pb) - (pRT - bM + N)]V - (Pqb + qRT + bN) = 0.$$

Поскольку

$$(Pqb + qRT + bN) < 0,$$

то система неустойчивая.

В случае отрицательного давления

$$PV^3 + [(p - b)P + RT + M]V^2 + [(q - pb)P + pRT + N - bM]V + (-qbP + qRT + bN) = 0.$$

Для устойчивости, во-первых, необходимо, чтобы выполнялось

$$P < \frac{qRT + bN}{qb},$$

$$P < \frac{RT + M}{(b - p)},$$

$$P > \frac{bM - pRT - N}{(q - pb)}.$$

Тем самым, давление ограничено интервалом. Для колебательной устойчивости

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} (p - b)P + RT + M & -qbP + qRT + bN \\ P & (q - pb)P + pRT + N - bM \end{bmatrix} > 0,$$

т.е. требуется выполнение неравенства

$$[(p - b)P + RT + M][(q - pb)P + pRT + N - bM] - P(-qbP + qRT + bN) > 0,$$

$$(p - b)(q - pb)P^2 + [(p - b)pRT + (p - b)N - (p - b)bM + (RT + M)(q - pb)]P + (RT + M)pRT + [(RT + M)N - (RT + M)bM] + qbP^2 - qRTP - bNP > 0,$$

$$(pq - p^2b + pb^2)P^2 + [p^2RT - 2pbRT + b^2M + qM - 2pbM + pN - 2bN]P + (RT + M)(pRT + N - bM) > 0.$$

На границе колебательной устойчивости получим квадратное уравнение

$$(pq - p^2b + pb^2)P^2 + [p^2RT - 2pbRT + b^2M + qM - 2pbM + pN - 2bN]P + (RT + M)(pRT + N - bM) = 0.$$

Его дискриминант

$$D = [(p^2RT + b^2M + qM + pN) - 2(pbRT + pbM + bN)]^2 - 4(pq - p^2b + pb^2)(RT + M)(pRT + N - bM).$$

Поскольку действительным значениям  $P$  отвечает  $D \geq 0$ , то

$$(p^2RT + b^2M + qM + pN)^2 - 4(p^2RT + b^2M + qM + pN)(pbRT + pbM + bN) + 4(pbRT + pbM + bN)^2 \geq 4(pq - p^2b + pb^2)(RT + M)(pRT + N - bM).$$

С другой стороны, если  $D < 0$ , то  $P$  комплексное число. Тогда

$$(p^2RT + b^2M + qM + pN)^2 + 4(pbRT + pbM + bN)^2 < 4[(pq - p^2b + pb^2)(RT + M)(pRT + N - bM) + (p^2RT + b^2M + qM + pN)(pbRT + pbM + bN)].$$

## Выводы

Исследование колебаний в различных средах обуславливает применение соответствующего математического аппарата для формализации параметров среды, ее физических величин, так как колебания обнаруживаются опытом. Это касается тех физических величин, которые измеряются приборами. Например, скачущее атмосферное давление называют барической пилой, но, по сути, это колебания, значения которых

отражаются на приборе. Подобные вопросы подлежат математическому обоснованию и новому определению измеряемых величин, чтобы количественно и качественно описать измеряемые величины в виде формул. Из данного исследования следует, что зависимость давления от направления приложенной силы  $dF_n = \pm P ds$  определяется знаком " $\pm$ ". Поэтому  $P$  может быть, и отрицательным, и положительным, так как знак силы устанавливается по отклонению измерения в замкнутом элементе объема, внутри которого показания прибора равные по сравнению с соседним элементом объема. Иначе никакие методы конечных разностей или конечных элементов не применимы к исследованию изучаемых процессов. Более того, колебания давления в некоторых границах замкнутого элемента объема вынуждает принять  $P$  комплексным числом, как и элемент объема, ранее, особенно, в метастабильном состоянии, когда колебания являются результатом взаимодействия двух разных фаз. Таким образом, справедливость комплексных чисел для описания колебаний аппаратом математической физики позволяет изучать процессы под новым углом познания, чем способствуют созданию адекватных моделей в исследованиях.

### *Литература*

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
2. Белонучкин В.Е. Краткий курс термодинамики. – 2-е изд. – М.: МФТИ, 2010. – 164 с.
3. J. Kestin. A course in Thermodynamics. Vol. 1. New York: McGraw-Kill, 1979.
4. Фогельсон, Р.Л. Уравнение состояния реального газа. / Р.Л. Фогельсон, Е.Р. Лихачев // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, вып. 7. – С. 129–130
5. Колгатин С.Н. Критическая точка, бинадаль, спинадаль и отрицательные давления на примере уравнения Ван-дер-Ваальса // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер.: Наука и образование. – 2012. № 3 (154), ч. 2. – С. 199–205.
6. Caupin F. and Anisimov M.A. Thermodynamics of supercooled and stretched water: Unifying two-structure description and liquid-vapor spinodal // J. Chem. Phys. 151, 034503 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5100228>
7. Виноградов В.Е. Исследование вскипания перегретых и растянутых жидкостей: спец. 01.04.14 "Теплофизика и теоретическая теплотехника": автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2006. 43 с.
8. Дей Е.А., Тюменков Г.Ю. Граничные параметры для состояния растянутой жидкости // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 18-20.
9. Дей Е.А., Тюменков Г.Ю. О приведенной форме термодинамических коэффициентов реальных газов // Проблемы физики, математики и техники. 2022. № 4(53). С. 25-29.
10. Дей Е.А., Тюменков Г.Ю. Приведенные термодинамические коэффициенты в теории реальных газов // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 4(57). С. 20-24.
11. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М.: Наука. 1987. – 464 с.
12. Тукембаева Г.Ч., Темиров Б.К. Моделирование уравнений термодинамики динамическими системами // Проблемы автоматки и управления. – 2023, № 2(47). – С. 109–115.
13. Тукембаева Г.Ч., Темиров Б.К. Моделирование пузырькового термоядерного синтеза // Проблемы автоматки и управления. – 2023, № 3(48). – С. 26-34.
14. О термоядерных процессах в кавитирующих пузырьках / Нигматулин Р. И., Лэхи Р. Т. (мл.), Талейархан Р. П., Вест К. Д., Блок Р. С. // Успехи физич. наук. 2014. Т. 184, № 9. С. 947–960.
15. Бойко В.Г., Могель Х.-Й., Сысоев В.М., Чалый А.В. Особенности метастабильных состояний при фазовых переходах жидкость – пар // Успехи физич. наук. – 1991. – Т. 161, № 2. – С. 77-111.

16. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992. – 544 с.
17. Зелёный Л. М., Малова Х. В., Попова В. Ю. и др. Альберт Галеев: Проблемы метастабильности и взрывного пересоединения // Физика плазмы. – 2021. – Т. 47, 3 9. – С. 771-792.
18. Товбин Ю. К. Второе начало термодинамики, термодинамика Гиббса и времена релаксации термодинамических параметров // Журн. физической химии. – 2021. – Т. 95, № 4. – С. 483-507.
19. Канель Г. И. О наносекундной теплофизике (обзор) // Теплофизика высоких температур. –2020. – Т. 58, № 4. – С. 596-614.
20. Соболев Р.Н. Метастабильное состояние магматических систем // Бюлл. Моск. о-ва испытателей природы. Отдел геологический. 2017. – Т. 92, № 2. – С. 83-89.
21. Быков Я.Б. Математические основы теории переходных процессов в импульсных системах.– Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1976. – 165 с.
22. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями четного порядка : автореф. дис. ... канд.-физ. наук : 01.01.02 - Бишкек, 1995. - 15 с.
23. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольных нечетных порядков. – Бишкек: Махprint, 2014. – 178 с.
24. Тукембаева Г.Ч., Темиров Б.К. Обобщение уравнения Ван-дер-Ваальса в пределах кубической функции // Проблемы автоматки и управления. – 2023, № 3(48). – С. 35-40.
25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1984. – 832 с.
26. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1976. – 872 с.
27. Темиров Б.К., Тукембаева Г.Ч. Элемент объема в малой окрестности особой точки // Тез. докладов V Борубаевских чтений. Сб. докл. – Бишкек, 2024. – С. 70.