# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

**Керимбеков А.К., Курманова С.Ч. КРСУ, Кыргызстан**
**Email: akl7@rambler.ru**

В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза при минимизации функционала общего вида. Найдены условия разрешимости задачи и появления точек переключений.

**Постановка нелинейной задачи синтеза.** Пусть управляемый процесс $V(t,x)$ описывается краевой задачей [1]

$$V_t - AV = h(t)V(t,x) + g(x)u(t), \quad x \in Q, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$V(0,x) = \psi(x), \quad x \in Q, \tag{2}$$

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) V_{x_j} \cos(\nu, x_i) + a(x)V(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $f[t, u(t)]$ – заданная функция, нелинейно зависящая от функции управления $u(t) \in H(0,T)$; $g(x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H_1(Q)$ – заданные функции; $Q-$ ограниченная область пространства $R^n$ с кусочно-гладкой границей $\gamma$; $\nu-$ внешняя нормаль в точке $x \in \gamma$; $Q_T = Q \times [0,T]$; $H$ – гильбертово пространство, $H_1$ – соболево пространство первого порядка; $A-$эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) V_{x_j}(t,x)\right)_{x_i} - c(x)V(t,x);$$

$a_{ij}(x)$, $a(x)$ и $c(x)$ ограниченные измеримые функции; $h(t)$-измеримая функция, $T$-фиксировано.

Пусть функция $u(t)$ удовлетворяет условию

$$|u(t)| \le 1, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Краевая задача (1)-(3) при каждом фиксированном управлении $u(t)$ имеет единственное обобщенное решение $V(t,x)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_Q \left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_Q \left[ V(t,x)\Phi_t(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) V_{x_j} \Phi_{x_i} - c(x)V(t,x)\Phi(t,x) \right] dx - \right.$$

$$\left. - \int_\gamma a(x)V(t,x)\Phi(t,x)\,dx \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left[h(t)V(t,x) + g(x)u(t)\right]\Phi(t,x)\,dx\,dt, \tag{5}$$

для любых моментов времени $t_1$ и $t_2$ ($0 \le t_1 \le t_2 \le T$) и любой функции $\Phi(t,x) \in H_1(Q_T)$, и в слабом смысле начальному условию (2), т.е. для любой функции $\Phi_0(x) \in H(Q)$

$$\lim_{t \to 0} \int_Q [V(t,x) - \psi(x)]\Phi_0(x)\,dx = 0.$$

Это решение имеет вид

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} g_n u(\tau)\,d\tau \right] z_n(x), \tag{6}$$

где $\psi_n$, $g_n$ - коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и $g(x)$; $\{z_n(x)\}$ - полная в $H(Q)$ ортонормированная система обобщенных собственных функций краевой задачи [2]

$$
\begin{aligned}
&Az(x) = -\lambda z(x)\,, \quad x \in Q\,, \\
&\Gamma z(x) = 0\,, \quad x \in \gamma\,,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

а $\{\lambda_n\}$ - соответствующая система собственных значений.

Рассмотрим следующую задачу синтеза, где требуется найти такое управление $u^0(t) \in H(0,T)$, которое вместе с соответствующим решением $V^0(t,x)$ краевой задачи (1)-(4) минимизирует функционал

$$
J(u) = \int_Q [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p(t,u(t))dt\,, \quad \beta > 0\,, \tag{8}
$$

где $\xi(x) \in H(Q)$ - заданная функция, $p(t,u(t))$ - некоторая функция, нелинейно зависящая от функции управления $u(t)$, причем управление $u^0(t)$ следует определить как функцию от состояния управляемого процесса $V^0(t,x)$, т.е. в виде $u^0(t) = u^0[t,V^0(t,x)]$.

**Решение задачи синтеза**. Для решения задачи синтеза используем методику А.И. Егорова, разработанную для систем с распределенными параметрами [3], на основе принципа оптимальности Беллмана.

Согласно схеме Беллмана введем обозначение

$$
S[t,V(t,x)] = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le T}} \left\{ \int_Q [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_t^T p(\tau,u(\tau))d\tau \right\}, \quad \beta > 0\,. \tag{9}
$$

Предполагая, что $S[t,V(t,x)]$ как функция дифференцируема по $t$, а по $V(t,x)$ как функционал дифференцируем по Фреше получим следующее уравнение Беллмана-Егорова [3,4]

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{|u|\le 1} \Bigg\{ &\beta p\left[t,u(t)\right] + \int_Q \left[g(x)u(t) + h(t)V(t,x)\right] m(t,x)dx - \\
&\int_Q \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j}(t,x) m_{x_i}(t,x) + c(x)V(t,x)m(t,x) - h(t)V(tx,t)m(t,x) \right] dx - \\
&- \int_\gamma a(x)V(t,x)m(t,x)dx\,,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

с дополнительным условием

$$
S[T,V(T,x)] = \int_Q [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx\,, \tag{11}
$$

где $m(t,x)$ градиент функционала $S[t,V(t,x)]$, который определяется лишь, после того как будет задан функционал $S[t,V(t,x)]$.

При произвольно заданной функции $p[t,u(t)]$ решить задачу Коши-Беллмана-Егорова (10)-(11) довольно сложно. В этой связи рассмотрим отдельные частные случаи. Пусть функция $p[t,u(t)]$ удовлетворяет условиям

$$
p[t,u(t)] \ge p[t,-1] = p[t,+1] \ \forall |u(t)| \le 1,\ t \in [0,T].
$$

Тогда функция $\varPi\left[t,u(t)\right] = \beta p[t,u(t)] + \varphi(t)u(t),$ где

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_Q g(x)m(t,x)dx = \sum_{n=1}^\infty g_n \left[2R_{nn}^0(t)v_n(t) + q_n^0(t)\right] = \\
&= \sum_{n=1}^\infty g_n \left[ 2R_{nn}^0(t) \left( e^{-\lambda_n t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} g_n u(\tau)d\tau \right) + q_n^0(t) \right],
\end{aligned}
$$

достигает минимума при управлении $u^0(t) = -1$, если $\varphi^-(t) > 0$ и при управлении $u^0(t) = 1$, если $\varphi^+(t) < 0$. Здесь $\varphi^-(t)$ функция, полученная из $\varphi(t)$ при $u(t) = -1$, а $\varphi^+(t)$ - при $u(t) = 1$.

Рассмотрим вопросы разрешимости задачи Коши-Беллмана при $u^0(t)=-1$. Уравнение Беллмана-Егорова имеет вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\beta p[t,-1]-\int_Q g(x)m(t,x)dx-\left(\int_Q\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)m_{x_i}(t,x)+c(x)V(t,x)m(t,x)\right]dx+\right.$$

$$\left.+\int_\gamma a(x)V(t,x)m(t,x)dx\right). \tag{12}$$

Решение уравнения (12) ищем в виде

$$S[t,V(t,x)]=\int_Q\int_Q V(t,x)K(t,x,y)V(t,y)dydx+\int_Q V(t,x)q(t,x)dx+\eta(t), \tag{13}$$

где $K(t,x,y)$, $q(t,x)$ и $\eta(t)$ - неизвестные функции, подлежащие определению.

Согласно (13), легко подсчитать, что градиент функционала $S[t,V(t,x)]$ имеет вид

$$m(t,x)=\int_Q (K(t,x,y)+K(t,y,x))V(t,y)dy+q(t,x). \tag{14}$$

Используя следующие разложения функций в ряд Фурье

$$K(t,x,y)=\sum_{i,k=1}^\infty z_i(x)R_{ik}(t)z_k(y)=z^*(x)R(t)z(y);$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^\infty v_n(t)z_n(x)=z^*(x)v(t);$$

$$q(t,x)=\sum_{n=1}^\infty q_n(x)z_n(x)=z^*(x)q(t);$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^\infty g_n z_n(x)=z^*(x)g;$$

$$\xi(x)=\sum_{n=1}^\infty \xi_n z_n(x)=z^*(x)\xi,$$

где $*$ - знак транспонирования, (13) и (14) представим в виде

$$S[t,V(t,x)]=v^*(t)R(t)v(t)+v^*(t)q(t)+\eta(t), \tag{15}$$

$$m(t,x)=z^*(x)[(R(t)+R^*(t))v(t)+q(t)]=z^*(x)\mu(t). \tag{16}$$

Далее, применяя формулы Грина [5] и учитывая (7), находим

$$\int_Q\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)m_{x_i}(t,x)+c(x)V(t,x)m(t,x)\right]dx+\left.\int_\gamma a(x)V(t,x)m(t,x)dx\right)+$$

$$+\int_Q h(t)V(t,x)m(t,x)dx=$$

$$=-\int_Q V(t,x)Am(t,x)dx+\int_\gamma V(t,x)\Gamma m(t,x)dx+\int_Q h(t)V(t,x)m(t,x)dx=$$

$$-\int_Q V(t,x)A\left(\sum_{n=1}^\infty \mu_n(t)z_n(x)\right)dx+\int_Q V(t,x)h(t)\left(\sum_{n=1}^\infty \mu_n(t)z_n(x)\right)dx+$$

$$+\int_\gamma V(t,x)\Gamma\left(\sum_{n=1}^\infty \mu_n(t)z_n(x)\right)dx=-\int_Q V(t,x)\sum_{n=1}^\infty \mu_n(t)Az_n(x)dx+\int_\gamma V(t,x)\sum_{n=1}^\infty \mu_n(t)\Gamma z_n(x)dx+$$

$$+\int_Q V(t,x)h(t)\left(\sum_{n=1}^\infty \mu_n(t)z_n(x)\right)dx=$$

$$= \int_Q V(t,x)\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(t)\lambda_n z_n(x)dx + \int_Q V(t,x)h(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(t)z_n(x)\right)dx = \int_Q v^*(t)z(x)z^*(x)D(\lambda)\mu(t)dx +$$

$$+h(t)\int_Q v^*(t)z(x)z^*(x)\mu(t)dx = v^*(t)D(\lambda)\mu(t) + h(t)v^*(t)\mu(t) =$$

$$= v^*(t)\overline{D}(t,\lambda)\Big[\big(R(t)+R^*(t)\big)v(t)+q(t)\Big], \quad \overline{D}(t,\lambda) = D(x)+h(t)E \tag{17}$$

где $\overline{D}(t,\lambda) = diag(...,\lambda_n + h(t),...)$; E – единичная матрица.

$$\int_Q g(x)m(t,x)dx = \int_Q g^* z(x)z^*(x)\big[\big(R(t)+R^*(t)\big)v(t)+q(t)\big]dx = g^*\big[\big(R(t)+R^*(t)\big)v(t)+q(t)\big]. \tag{18}$$

Согласно (15)-(18) уравнение (12) перепишем в виде

$$-v^*(t)\dot{R}(t)v(t) - v^*(t)\dot{q}(t) - \dot{\eta}(t) = \beta p[t,-1] - g^*\big[\big(R(t)+R^*(t)\big)v(t)+q(t)\big] -$$

$$-v^*(t)\overline{D}(t,\lambda)\Big[\big(+R^*(t)\big)v(t)+q(t)\Big].$$

Отсюда, с учетом (11) и (15), относительно $R(t)$, $q(t)$ и $\eta(t)$, получим следующие задачи

$$\dot{R}(t) = \overline{D}(t,\lambda)R(t) + R(t)\overline{D^*}(t,\lambda), \qquad R(T) = E, \tag{19}$$

$$\dot{q}(t) = \overline{D}(t,\lambda)q(t) + \big(R(t)+R^*(t)\big)g, \qquad q(T) = -2\xi, \tag{20}$$

$$\dot{\eta}(t) = g^* q(t) - \beta p[t,-1], \qquad \eta(T) = \xi^*\xi, \tag{21}$$

где $E$ - бесконечномерная единичная матрица.

Задача (19) эквивалентна следующей задаче

$$\dot{R}_{nn}(t) = 2\lambda_n R_{nn}(t),\ R_{nn}(T) = 1, \quad \dot{R}_{nm}(t) = \lambda_n R_{nm}(t) + R_{nm}(t)\lambda_m,\ R_{nm}(T) = 0,\ n \neq m.$$

Решение задачи (19) находим по формуле

$$R^0(t) = diag(...,R^0_{nn}(t),...), \quad R^0_{nn}(t) = e^{-2\int_t^T(\lambda_n+h(y))dy}, \quad n = 1,2,3,... . \tag{22}$$

Решение задачи (20), с учетом (22), находим по формуле

$$q^0(t) = \{...,q_n(t),...\}, \quad q_n(t) = -2\left[\xi_n + \int_t^T e^{-\int_\tau^T(\lambda_n+h(y))dy}d\tau\right]e^{-\int_t^T(\lambda_n+h(y))dy} \quad n = 1,2,3,... . \tag{23}$$

Решение задачи (21), с учетом (23), находим по формуле

$$\eta^0(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2 + \int_0^T\left[2\sum_{n=1}^{\infty}g_n\left[\xi_n + \int_\tau^T e^{-\int_r^T(\lambda_n+h(y))dy}d\tau\right]e^{-\int_\tau^T(\lambda_n+h(y))dy} + \beta p(\tau,-1)\right]d\tau . \tag{24}$$

Найденные $R^0(t)$, $q^0(t)$ и $\eta^0(t)$ подставляя в (15) или (13) получим решение задачи Коши-Беллмана-Егорова.

Теперь выпишем функцию

$$\begin{aligned}\varphi^-(t) &= \int_Q g(x)m(t,x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}g_n\left[2R^0_{nn}(t)v_n(t)+q^0_n(t)\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}g_n\left[2R^0_{nn}(t)\left(e^{-\lambda_n t}\psi_n - \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}g_n d\tau\right)+q^0_n(t)\right]\end{aligned} \tag{25}$$

и заметим, что задача синтеза имеет решение лишь в том случае, когда выполняется условие

$$\varphi^-(t) > 0, \forall t \in [0,T].$$

Аналогичным образом можно построить функцию $\varphi^+(t)$. В этом случае задача синтеза имеет решение лишь при

$$\varphi^{+}(t) < 0, \forall t \in [0,T].$$

Если функции $\varphi^{-}(t)$ и $\varphi^{+}(t)$ меняют знак на отрезке $[0,T]$, то возможны несколько случаев. Ниже указаны два из них.

1. Если корни функций $\varphi^{-}(t)$ и $\varphi^{+}(t)$ совпадают и эти функции одного знака между их последовательными нулями, то задача синтеза разрешима, и количество точек переключений будет равно количеству нулей, расположенных между 0 и T.
2. Если последовательные нули функции $\varphi^{-}(t)$ либо содержат последовательные нули функции $\varphi^{+}(t)$, либо находятся между последовательными нулями функции $\varphi^{+}(t)$, то задача синтеза разрешима, и количество точек переключений будет равно количеству нулей, расположенных между 0 и T.

В целях формулирования критерия разрешимости задачи синтеза введем следующие понятия: отрезок времени, на котором $\varphi^{-}(t) > 0$ при $u^{0}(t) = -1$ назовем благоприятной зоной для управления $u^{0}(t) = -1$; а отрезок где $\varphi^{-}(t) < 0$ при $u^{0}(t) = -1$ назовем неблагоприятной зоной для управления $u^{0}(t) = -1$. Аналогично определяются благоприятная и неблагоприятная зоны для управления $u^{0}(t) = 1$. (т.е. для функции $\varphi^{+}(t)$ ).

Критерий разрешимости. Если при переходе от управления $u^{0}(t) = -1$ к управлению $u^{0}(t) = 1$ осуществляется переход от благоприятной зоны управления $u^{0}(t) = -1$ к благоприятной зоне управления $u^{0}(t) = 1$, то задача синтеза разрешима и имеет решение, в противном случае задаче синтеза не имеет решения.

**Литература**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. - 735 с.
2. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Известия АН СССР, сер. матем. – М., 1968. Т.32, №4. – С. 743-755.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. -464 с.
4. Керимбеков А., Курманова С. Решение одной задачи синтеза при нелинейной оптимизации тепловых процессов. // Программные системы: теория и приложения. Системный анализ. ИПС РАН. Т.2.–Москва, 2006.. – С. 219-226.
5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1975. – 512 с.