ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ С МГНОВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ И ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Сатыбаев А.Дж., Матисаков Ж.К.
Ошский технологический университет, Кыргызстан, abdu-satybaev@mail.ru

Обзор. Математические основы акустики и теоретические аспекты распространения звуковых волн: излучение, дифракция, распространения сферических и плоских звуковых волн, значительное место отводится интегральным представлениям решений краевых задач акустики, изложены в монографии Е. Скучика [1], Е.П. Ефимова и А.В. Никонова [2, 3].

А.С. Алексеевым и Б.Г. Михайленко [4] предложены численно-аналитические методы решения задач со сглаженными сингулярностями в источнике и в граничных условиях.

Основной проблемой возникающей при попытке численного решения обобщенных прямых задач, является наличие сингулярной компоненты у решения задачи. В данном разделе обобщенная задача на основе методики [5] сводится к регулярной задаче с данными на характеристиках, для решения которой применим конечно-разностный метод.

Постановка задачи. Рассматривается математическая задача акустики в постановке:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t} = \bar{c}^{-2}(z,y)\left[\Delta_{z,y}u(z,y,t) - \dfrac{\bar{\rho}'_z(z,y)}{\bar{\rho}(z,y)}\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\bar{\rho}'_y(z,y)}{\bar{\rho}(z,y)}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right], \quad \begin{array}{l} z\in R_+, \\ y\in R, \\ t\in R_+, \end{array} \\ u(z,y,t)\big|_{t<0}\equiv 0, \ \left.\dfrac{\partial u(z,y,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = -\dfrac{1}{2}\delta(t) - h(y)\theta(t), \quad y\in(-D,D), t\in(0,T), \end{array}\right\} \tag{1}$$

где $\bar{c}(z,y)$ - скорость распространения звука, $\bar{\rho}(z,y)$ - плотность среды.

Последнее граничное условие моделирует так называемый мгновенный источник и плоскую границу. Пусть выполнены следующие условия

$$\bar{c}(z,y), \bar{\rho}(z,y) \in \Lambda_1, \tag{2}$$

$$h(y)\in\Lambda_2 \ . \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2), (3). Тогда существует решение задачи (1) в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$ имеющее производные до четвертого порядка включительно в области регулярности $\Omega(T,D)$.

Сведение к регулярной задаче с данными на характеристиках.

В силу гиперболичности и условий (2), (3) при фиксированном $T\in R_+$ решение задачи (1.) равно нулю при $y=\pm D$ и за пределами *D*, где $D=D_1+M_1T \quad \forall t\in(0,T)$.

Введем новую переменную $\alpha(z,y)$, являющееся решением задачи Эйконала

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_z^2+\alpha_y^2 = \dfrac{1}{\bar{c}^{-2}(z,y)}, \ \alpha(z,y)\big|_{z=0}=0, \quad \alpha_z(z,y)\big|_{z=0} = \dfrac{1}{\bar{c}(0,y)}, \\ \alpha_z>0, \ \lim\limits_{z\to\infty}\alpha(z,y)=\infty \end{array}\right\} \tag{4.}$$

и ведем новые функции $\rho(\alpha,y)=\bar{\rho}(z,y), c(\alpha,y)=\bar{c}(z,y)$,

$$\vartheta(\alpha,y,t)=u(z,y,t).$$

Если учесть продолжение функции по z четным образом на R_-, то задача в новых введенных функциях имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L\vartheta(\alpha,y,t),\ y\in(-D,D),\ \ \alpha\in(-T,T),|\alpha|<t<T, \\ \vartheta(\alpha,y,t)\big|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=c(0,y)\delta(\alpha)+h(y)\theta(\alpha),\quad \vartheta\big|_{y=-D}=\vartheta\big|_{y=+D}=0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$L\vartheta(\alpha,y,t)=c^2(\alpha,y)\left[\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y^2}+\alpha_y\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha\partial y}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}\right]-$$

где

$$-\frac{\rho_\alpha'(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\vartheta_\alpha-c^2(\alpha,y)\left[\frac{\rho_\alpha'}{\rho}\alpha_y\vartheta_y+\frac{\rho_y'}{\rho(\alpha,y)}\alpha_y\vartheta_\alpha+\frac{\rho_y'}{\rho(\alpha,y)}\vartheta_y\right].$$

Выделим регулярные и сингулярные компоненты решения, представляя его в виде

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)+S(t,y)\theta(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_1(t-|\alpha|), \tag{6}$$

где $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$- непрерывная функция.

Формулу (6.) подставляя в последней задачи (5.) и приравнивая коэффициенты перед сингулярными частями, получаем

$$\begin{gathered} S(t,y)=\frac{c(0,y)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t\Big\{c^2(\tau,y)\big[\alpha_yS_y(\tau,y)+\Delta\alpha S(\tau,y)\big]- \\ -\left[\frac{\rho_\tau'}{\rho(\tau,y)}+\frac{\rho_y'}{\rho(\tau,y)}c^2(\tau,y)\alpha_y\right]S(\tau,y)\Big\}d\tau,\quad t\in(0,T),y\in(-D,D), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} R(t,y)=\frac{h(y)}{2}+\frac{\rho_t'(0,y)}{4\rho(0,y)}c(0,y)+\frac{1}{2}\int_0^t\Big\{c^2(\tau,y)\Big[S_{yy}-\frac{\rho_y'}{\rho(\tau,y)}S_y-\frac{\rho_\tau'}{\rho(\tau,y)}\alpha_yS_y+\alpha_yR_y+ \\ +\Delta\alpha R(\tau,y)\Big]-\left[\frac{\rho_\tau}{\rho(\tau,y)}+\frac{\rho_y}{\rho(\tau,y)}c^2(\tau,y)\right]R(\tau,y)\Big\}d\tau,\quad t\in(0,T),y\in(-D,D). \end{gathered} \tag{8}$$

Существование решений уравнений (7), (8) можно легко доказать.

Решение задачи (5.) обращается в нуль вне характеристического угла, т.е. $\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{t<|\alpha|}=0,$ следовательно, $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)\big|_{t<|\alpha|}=0,$ а в силу непрерывности функции $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ следует, что $\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)\big|_{t=|\alpha|}=0,$ а это означает $\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{|\alpha|=t}=S(t,y)\ \ t\in(0,T),y\in(-D,D).$

Из вышеизложенных, учитывая (6), получим следующую задачу с данными на характеристиках, эквивалентную к задаче (1.):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha^2}+L\vartheta(\alpha,y,t),\ \ |\alpha|<t<T,\ y\in(-D,D), \\ \vartheta(\alpha,y,t)\big|_{|\alpha|=t}=S(t,y),t\in[0,T],y\in(-D,D),\ \vartheta\big|_{y=-D}=\vartheta\big|_{y=D}=0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Теорема единственности. Введем обозначение и норму

$$
\begin{aligned}
&\Pi_1 = \max_{|\alpha|\le T}\ \max_{y\in(-D,D)}\ \left\{|c(\alpha,y)|,|c_\alpha(\alpha,y)|,|c_y(\alpha,y)|\right\},\\
&\Pi_2 = \max_{|\alpha|\le T}\ \max_{y\in(-D,D)}\ |\rho(\alpha,y)|,|\rho_\alpha(\alpha,y)|,|\rho_y(\alpha,y)|\right\},\\
&\Pi_3 = \min_{|\alpha|\le T}\ \min_{y\in(-D,D)}\left\{|\rho(\alpha,y)|\right\},\\
&\Pi_4 = \max_{z\in R}\ \max_{y\in(-D,D)}\left\{|\alpha_y(z,y)|,|\alpha_{yy}(z,y)|,|\Delta\alpha(z,y)|\right\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\|\vartheta\|^2(t) = \int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\vartheta^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy,\quad t\in[0,T].
$$

Умножая обе части уравнения (9.) на $2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}$, затем проинтегрируя в области $\Omega(T,D)=\{\Delta(T)\times(-D,D)\}$, где $\Delta(T)=\{(\alpha,t):|\alpha|<t<T\}$ и учитывая следующие

$$
2\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\right],\quad 2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}=2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)^2,
$$

$$
2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot c^2(\alpha,y)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}=2c^2(\alpha,y)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right]-c^2(\alpha,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2,
$$

$$
2\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}c^2(\alpha,y)\alpha_y\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}=c^2(\alpha,y)\alpha_y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)\right],
$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}2\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}-L\vartheta(\alpha,y,t)\right]d\alpha dy d\tau=\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)^2+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)^2+c^2(\alpha,y)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2+c^2(\alpha,y)\alpha_y\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{\tau=|\alpha|}^{\tau=t}d\alpha dy+\\
&+\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}2\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}c^2(\alpha,y)\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}d\alpha dy d\tau-\\
&-2\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+c^2(\alpha,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+\right.\\
&\quad+\frac{1}{2}c^2(\alpha,y)\alpha_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{2}c^2(\alpha,y)\alpha_y\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)+\\
&\quad+\frac{\rho_\alpha{}'(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+c^2(\alpha,y)*\left[\frac{\rho_\alpha{}'(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\rho_y{}'(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\frac{\rho_y{}'(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]d\alpha dy d\tau=0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$(\alpha,t)\in\Delta(T),\quad y\in(-D,D)$.

Используя $\vartheta(\alpha,-D,t)=\vartheta(\alpha,D,t)=0$ и соотношение (11.) имеем

$$\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}c^2(\alpha,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[c^2(\alpha,y)\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial c^2(\alpha,y)}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\}d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-t}^{t}\left\{c^2(\alpha,D)\cdot\left.\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,\tau)}{\partial y}\right|_{y=D}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left.\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,\tau)}{\partial\tau}\right|_{y=D}-c^2(\alpha,-D)\left.\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,\tau)}{\partial y}\right|_{y=-D}\cdot\left.\frac{\partial\vartheta(\alpha,y,\tau)}{\partial\tau}\right|_{y=-D}\right\}d\alpha d\tau-$$

$$-\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial c^2}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dy d\tau=-\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial c^2}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dy d\tau,$$

$$\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}c^2(\alpha,y)\alpha y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dy d\tau=-\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial(c^2\cdot\alpha_y)}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dy d\tau,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\alpha=-t}^{\alpha=t}dy d\tau.\\
&\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}c^2(\alpha,y)\alpha_y\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\left[c^2(\alpha,y)\alpha_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right]_{\alpha=-t}^{\alpha=t}dy d\tau-\\
&-\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(c^2\alpha_y\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dy d\tau=\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(c^2\alpha_y\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}d\alpha dy d\tau.\\
&\int\limits_{|\alpha|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\rho_\alpha'(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}d\alpha dy d\tau.
\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

Используя введенные обозначения (10.) и полученные выражения из (11.) имеем

$$\begin{aligned}
\|\vartheta\|_1^2(t)\le 2\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)&+2\Pi_1^2\Pi_4\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\\
&+2\Pi_1^2\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+2\Pi_1^2\Pi_4\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2\Pi_2}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1^2\Pi_2\Pi_4}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\\
&+\frac{2\Pi_1^2\Pi_2\Pi_4}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1^2\Pi_2}{\Pi_3}\int\limits_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau,
\end{aligned}\qquad(12.)$$

здесь $\|\vartheta\|_1^2(t)=\|\vartheta_t\|^2(t)+\|\vartheta_\alpha\|^2(t)+\Pi_1^2\|\vartheta_y\|^2(t)+\Pi_1^2\Pi_4\|\vartheta_\alpha\cdot\vartheta_y\|(t).$

Можарируем интеграл

$$\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|(\tau)d\tau \le \int_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right\|^2\right](\tau)d\tau \le \int_{|\alpha|}^{t}\|\vartheta\|_1^2(\tau)d\tau .$$

Тогда из последнего неравенства (12.) имеем

$$\|\vartheta\|_1^2(t) \le \|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)\cdot\exp\left[\left(2\Pi_1^2+4\Pi_1^2\Pi_4+\frac{2\Pi_2}{\Pi_3}+\frac{6\Pi_1^2\Pi_2\Pi_4}{\Pi_3}\right)t\right].$$

Используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений из последнего получим

$$\max_{|\alpha|\le\tau\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(\tau)\right\} \le \|\vartheta\|_2^2(|\alpha|) * \exp\left[\left(2\Pi_1^2+5\Pi_1^2\Pi_4+\frac{2\Pi_2}{\Pi_3}+\frac{6\Pi_1^2\Pi_2\Pi_4}{\Pi_3}\right)t\right],$$

где $\|\vartheta\|_2^2(t)=\left(\|\vartheta\|^2+\|\vartheta_t\|^2+\|\vartheta_\alpha\|^2+\|\vartheta_y\|^2\right)(t).$

Теорема 2. Пусть функции $c(\alpha,y),\rho(\alpha,y),\alpha_y,\ \Delta\alpha$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть решение задачи (9.) существует и принадлежит в $C^2(\Omega(T,D))$, выполнено (4.). Тогда решение задачи (9.) единственно в области регулярности $\Omega(T,D)$ и имеет места оценка

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|\upsilon\|_2^2(t)\right\} \le \|\upsilon\|_2^2(|\alpha|) * \exp(\Pi t), \tag{13.}$$

где $\Pi=2\Pi_1^2+5\Pi_1^2\Pi_4+\dfrac{2\Pi_2}{\Pi_3}+\dfrac{6\Pi_1^2\Pi_2\Pi_4}{\Pi_3}.$

Из эквивалентности задач (9.) и (1.) следует, что решение задачи (1.) также единственно в области $\Omega(T,D)$, при выполнении условии теоремы 2.

Литература

1. Скучик Е. Основы акустики. – М. : Наука, Т. I-II. 1976. 520 с, 678 с.
2. Ефимов А.П. и др. Акустика. Справочник. – М.: Радио и связь, 1989.
3. Никонов А.А. Землетрясения. – М.: Знание, 1984. – 292 с.
4. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г., Чеверда В.А. Численные методы решения прямых и обратных задач теории распространения волн // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1983. – С. 165-172.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. –М.: Наука, 1984. – 264 с.
6. Сатыбаев А.Дж. Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа. – Ош: Ошоблтипография, 2001. – 143 с.