ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_p

Акыш А.Ш.
Институт математики МОН, Казахстан, akysh41@mail.ru

Кинетические уравнения Больцмана – это своеобразный класс многомерных интегро-дифференциальных уравнений математической физики. В частности, к которым относится уравнение переноса излучения, общая задача для нее в области $Q=[0,T]\times\Omega\times G$ имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}+(\boldsymbol{\omega},\nabla \mathrm{U})+\sigma(\mathbf{x})\mathrm{U}=\frac{\sigma_S(\mathbf{x})}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\mathrm{g}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}')\mathrm{U}(\mathrm{t},\boldsymbol{\omega}',\mathbf{x})d\boldsymbol{\omega}'+\mathrm{f}, \tag{1}$$

с начальным и граничным условиями:

$$\mathrm{U}(0,\boldsymbol{\omega},\mathbf{x})=\varphi(\boldsymbol{\omega},\mathbf{x});\quad \mathrm{U}(\mathrm{t},\boldsymbol{\omega},\mathbf{x})|_{\Gamma}=0\quad \text{при}\quad (\mathbf{n},\boldsymbol{\omega})<0, \tag{2}$$

где $\mathrm{U}=\mathrm{U}(\mathrm{t},\mathbf{x},\boldsymbol{\omega})$ – функция распределения нейтронов, летящих в направлении $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ в точке $\mathbf{x}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$ трехмерного евклидова пространства R_3 в момент времени $t\in(0,T]$; $\mathrm{f}(\mathrm{t},\boldsymbol{\omega},\mathbf{x})$ - функция источников; $\sigma(\mathbf{x})$, $\sigma_S(\mathbf{x})$ – сечения, характеризующие свойства среды; $\mathrm{g}=\mathrm{g}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})$ – индикатриса рассеяния, она зависит от направлений $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}'$ лишь посредством косинуса угла между ними; Ω – единичная сфера направлений $\boldsymbol{\omega}$, область G, где происходит процесс переноса нейтронов, выпукла и ограничена кусочно-гладкой поверхностью Γ; $\mathbf{n}=(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3)$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\mathbf{x}$ границы Γ.

Многомерное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (1), имеет весьма сложную структуру и описывает гораздо более сложные физические процессы, чем, скажем, начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка, которая, как известно, является довольно грубым приближением для задачи (1), (2) (**диффузионное приближение**). Поэтому первоначально, чтобы удовлетворить нужды практики, были разработаны вычислительные алгоритмы, в основном, для одномерных задач переноса, а многомерные задачи были сведены к последовательностям одномерных. В работах У.М. Султангазина (см. [1]) было дано математическое обоснование метода расщепления, сводящего многомерные задачи переноса излучения к последовательностям одномерных. Им были построены абсолютно устойчивые схемы в энергетическом пространстве для численного решения задачи (1), (2). В последующем эти результаты послужили начальным стимулом научных исследований задач переноса излучении и кинетических уравнений Больцмана под руководством У.М. Султангазина в Казахстане.

Итоги сорокалетнего развития математических вопросов теории переноса излучения и кинетической теории газов в Казахстане содержатся в обзорной статье автора [1].

При разработке разностных методов для задачи переноса интеграл по сфере аппроксимируется кубатурной формулой и задача (1)-(2) в сеточной области $\widetilde{Q}_h^{\tau}=G^{\tau}\times\widetilde{\Omega}\times G_h$ заменяется, например, следующей разностной схемой

$$\begin{gathered}\frac{U^{n+1}_{\nu_k,h}-U^{n}_{\nu_k,h}}{\tau}+\sum_{\sigma=1}^{3}\left|\omega_{\alpha,\nu_k}\right|\frac{E-T_{\alpha}^{\theta_k}}{h_{\alpha}}U^{n+1}_{\nu_k,h}+\sigma U^{n+1}_{\nu_k,h}=\\ \sigma_S\sum_{\nu=1}^{N}c_{\nu}g_{\nu,\nu_k}U^{n}_{\nu,h}+f^{n}_{\nu_k,h},\quad k=\overline{1,8},\end{gathered} \tag{3}$$

с начально-граничными условиями (2), где $\widetilde{\Omega}$ - объединение всех узлов кубатурной формулы, G^{τ} – сетка по времени, G_h – пространственная сетка; *E*-единичный оператор; $\mathbf{T}_{\alpha}^{\theta_k} U(.,x_{\alpha},.) = U(.,x_{\alpha} + \theta_k h_{\alpha},.)$ - операторы сдвига; $\theta_k = -\mathrm{sgn}(\omega_{\alpha,\nu_k})$.

Принципиальные вопросы теории устойчивости разностных схем известны из классических работ С. К. Годунова и В. С. Рябенького, Г. И. Марчука, А. А. Самарского и А. В. Гулина и др.

Откуда следуют, что наиболее распространенными способами исследования устойчивости разностных краевых задач являются: метод разделения переменных, спектральные методы, метод энергетических неравенств и методы, основанные на принципе максимума, а также принцип замороженных коэффициентов при исследовании разностных схем с переменными коэффициентами. В некоторых исследованиях устойчивость одномерных разностных схем с постоянными коэффициентами в пространстве ℓ_p основывается на фундаментальных решениях разностных задач. Однако построение фундаментальных решений многомерных разностных задач с переменными коэффициентами технически затруднительно. До недавнего времени не были известны в теории устойчивости разносных схем способы исследования многомерных разностных задач с переменными коэффициентами в пространстве $\ell_p, \forall p > 2$, аналогичные методам получения априорных оценок решений в норме пространства L_p исходных дифференциальных задач.

В работах автора [2]-[4] создан метод исследования устойчивости двухслойных схем, соответствующих многомерным задачам математической физики с постоянными и переменными коэффициентами в функциональных пространствах ℓ_p, $\forall p > 1$, свободных от использования фундаментальных решений разностных задач. Причем из устойчивости в ℓ_p при $p = \infty$ следует устойчивость в норме пространства C (принцип максимума).

В работе [2] новым методом исследована устойчивость двухслойных схем в функциональных пространствах ℓ_p, $1 < p \le \infty$, без привлечения фундаментальных решений разностных задач. Что позволяет доказать устойчивость различных (явной, неявной, расщепления) схем типа (3), соответствующих многомерным задачам теории переноса излучения с постоянными и переменными коэффициентами в ℓ_p, $1 < p \le \infty$. Из неё при $p = \infty$ получена устойчивость в норме C. В частности, в случае постоянных коэффициентов уравнения переноса найдены оценки асимптотического поведения решения разностных схем (3) при $t \to \infty$, на всем интервале времени $(0,\infty)$ в норме пространства

$$\ell_p(G^{\tau};\ell_p(G_h \times \tilde{\Omega})),\ 1 < p \le \infty,$$

т.е. установлена справедливость ценной оценки при проектировании ядерных реакторов:

$$\left\|U^{n+1}\right\|_{\ell_p(G_h\times\tilde{\Omega})} \le C_1 \left\|\varphi\right\|_{\ell_p(G_h\times\tilde{\Omega})} + C_2 \sup_{0\le s\le n} \left\|f^s\right\|_{\ell_p(G_h\times\tilde{\Omega})}, \qquad 1 < p \le \infty, \tag{4}$$

где $$C_1 = \exp(-\gamma\, t_{n+1}), C_2 = (1-\exp(-\gamma\, t_{n+1}))/\gamma, \gamma = \sigma - \sigma_S(g_0)^{1/p} > 0,$$

$$\left\|U\right\|_{\ell_p(G_h\times\tilde{\Omega})} = \left(\sum_{G_h} h \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \left|U_{\nu,h}\right|^p\right)^{1/p}.$$

В [2] рассмотрено газ, молекулы которого могут обладать *N* различными вектор-скоростями $V_k = (V_k^1, V_k^2, V_k^3),\ \ k = \overline{1,N}$, взаимно меняющимися при столкновениях, и для него записана система *N* нелинейных уравнений относительно плотности молекулы U_k, $k = \overline{1,N}$ в виде:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}V_k^{\alpha}\frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha}=\sigma\sum_{m=1}^{N}(U_m^2-U_k^2),\quad k=\overline{1,N},\tag{5}$$

с начальными и периодическими граничными условиями в области $Q=(0,\infty)\times G$

$$U_k(0,x)=\varphi_k(x);\qquad U_k|_{\Gamma_{0x_\alpha}}=U_k|_{\Gamma_{1x_\alpha}},\ k=\overline{1,N},\quad \alpha=\overline{1,3},\tag{6}$$

где G - куб, $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ - грань куба, σ-сечение столкновения, $t\in(0,\infty)$. Система (5) является N– скоростной моделью уравнения Больцмана. Причем если начальные функции $\varphi_k(x),\ k=\overline{1,N},$ являются неотрицательными, тогда решения $U_k,\ k=\overline{1,N},$ также являются неотрицательными. Рассмотрена для задачи неявная схема

$$\frac{U_{k,h}^{n+1}-U_{k,h}^{n}}{\tau}+\sum_{\alpha=1}^{3}|V_k^{\alpha}|\frac{E-T_\alpha^{\theta_k}}{h_\alpha}U_{k,h}^{n+1}=$$
$$=\sigma\sum_{m=1}^{N}[(U_{m,h}^{n+1})^2-(U_{k,h}^{n+1})^2],\quad k=\overline{1,N},\tag{7}$$

где $\theta_k=-\operatorname{sgn}(V_k^{\alpha}),\ k=\overline{1,N}$.

Для задачи (7), (6) доказана устойчивость неявной разностной схемы на всем промежутке времени $t\in(0,\infty)$ в пространстве ℓ_p, т.е.

$$\|U_k^{n+1}\|_{\ell_p(G_h)}\le\sum_{k=1}^{N}\|\varphi_k\|_{\ell_p(G_h)},\ k=\overline{1,N};\ 1<p\le\infty.$$

В [3] новым методом, свободным от использования фундаментальных решений разностных задач, исследованы и доказаны устойчивость в пространстве $\ell_p, \forall p>2$, разнообразных разностных схем (явная, неявная, расщепления, расщепления с весом, продольно - поперечной прогонки), соответствующих диффузионным приближениям (уравнениям теплопроводности) с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)=f(t,x),U(0,x)=\varphi(x);\quad U(t,x)|_\Gamma=0,\tag{8}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)\in G=\{0\le x_\alpha\le\ell_{\alpha,}\alpha=\overline{1,3}\}$, Γ – граница G, $t\in[0,T],T<\infty$.

Из множества изученных разностных задач для (8) является интересной из-за повышенной точности схема расщепления с весом

$$\frac{U_h^{n+\frac{\alpha}{3}}-U_h^{n+\frac{\alpha-1}{3}}}{\tau}-\left[\gamma\Lambda_{\alpha,h}U_h^{n+\frac{\alpha}{3}}+(1-\gamma)\Lambda_{\alpha,h}U_h^{n+\frac{\alpha-1}{3}}\right]=\delta_\alpha^3 f_h^{n+1},$$
$$\Lambda_{\alpha,h}=\frac{\mathrm{T}_\alpha^{+1}a_{\alpha,h}}{h_\alpha^2}(\mathrm{T}_\alpha^{+1}-E)-\frac{a_{\alpha,h}}{h_\alpha^2}(E-\mathrm{T}_\alpha^{-1}),\alpha=\overline{1,3}.\tag{9}$$

Схема (9) условно устойчива при $\max\limits_{\alpha}\sup\limits_{G_h}r_{\alpha,h}\le\frac{1}{2(1-\gamma)},\forall\gamma\in[0,0.5)\cup(0.5,1]$, т. е.

$$\left\|U^{n+1}\right\|_{\ell_p(G_h)}\le C_1\|\varphi\|_{\ell_p(G_h)}+C_2\sup_{0\le s\le n+1}\left\|f^s\right\|_{\ell_p(G_h)},C_1,C_2-const.\tag{10}$$

При $p=\infty$ схема устойчива в норме C, а при $\gamma=0.5$ и $\gamma=1$ – абсолютно устойчива соответственно в ℓ_2 и ℓ_p для $\forall p.$

Во многих случаях удается доказать устойчивость в пространстве ℓ_p для широкого класса двухслойных схем, соответствующих линейным и изредка нелинейным задачам математической физики с переменными коэффициентами. В [3] метод исследования устойчивости в ℓ_p применен для двумерных нелинейных разностных задач теплопроводности и экологии и показаны их устойчивости.

Из множества нелинейных задач математической физики наиболее интересным оказалось исследование устойчивости в ℓ_p разностных схем для трехмерных нелинейных систем уравнений Бюргерса [4] относительно вектор-функции $U=(U_1,U_2,U_3)$ в области $Q=(0,T]\times G$:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t}-\mu\Delta U_k+(U,gradU_k)=f_k;\ \ U_k(0,x)=\varphi_k(x);U_k|_\Gamma=0,k=\overline{1,3}. \tag{11}$$

Для неё изучены некоторые (явная, расщепления и т. д.) разностные задачи. В том числе неявная разностная схема:

$$\frac{U_{k,h}^{n+1}-U_{k,h}^{n}}{\tau}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\mu}{h_\alpha^2}\left[\mathrm{T}_\alpha^{+1}-2E+\mathrm{T}_\alpha^{-1}\right]U_{k,h}^{n+1}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{U_{\alpha,h}^{n}}{2h_\alpha}\left[\mathrm{T}_\alpha^{+1}-\mathrm{T}_\alpha^{-1}\right]U_{k,h}^{n+1}=f_{k,h}^{n+1},\ \mathrm{k}=\overline{1,3}. \tag{12}$$

Доказано, что схема устойчива, т.е.

$$\left\|U_k{}^{n+1}\right\|_{\ell_p(G_h)}\le\left\|\varphi_k\right\|_{\ell_p(G_h)}+T\left\|f_k\right\|_{\ell_\infty(G^\tau;\ell_p(G_h))},\ \ 1\le p\le\infty;\ \ k=\overline{1,3}$$

при следующем необычном условии между шагами сетки h_α, функциями $\varphi_{\alpha,h}$, $f_{\alpha,h}^{s}$ и интервалом времени T

$$h_\alpha\le\frac{2\mu}{\left\|\varphi_\alpha\right\|_{C(G_h)}+T\left\|f_\alpha\right\|_{C(Q_h^\tau)}}. \tag{13}$$

В [5] показана устойчивость схемы метода расщепления по максимум норме для нелинейного уравнения Больцмана со степенным потенциалом межмолекулярного взаимодействия:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,gradf)=\mathrm{J}(f)-f\ \mathrm{S}(f)\equiv\mathrm{B}(f,f), \tag{14}$$

где

$$\mathrm{J}(f)=\int\limits_{V_3}\int\limits_{\Sigma}f'f_1'K(\theta,W)d\sigma dv_1,\quad \mathrm{S}(f)=\int\limits_{V_3}\int\limits_{\Sigma}f_1\,K(\theta,W)d\sigma dv_1,$$

$$K(\theta,W)=|W|^q\ \Lambda(\theta),q=(n-5)/(n-1);$$

$f=f(t,x,v),\quad f_1=f(t,x,v_1),\quad f'=f(t,x,v'),\quad f_1'=f(t,x,v_1')$ – функции распределения молекул, соответственно, имеющих скорости v,v_1,v' и v_1'; v,v_1 – векторы скорости двух сталкивающихся молекул до столкновения; а v',v_1' – векторы скорости после столкновения; $W=v-v_1$ -вектор относительной скорости; $v\in V_3=\{-\infty<v_\alpha<\infty,\alpha=\overline{1,3}\}$. Скорости молекул после столкновений связаны с соответствующими скоростями до него посредством обычных динамических соотношений: $v'=v+\beta(\beta,W),\ \ v'_1=v_1-\beta(\beta,W)$, где β – единичный вектор в направлении рассеяния молекул: $\beta=(\sin\theta\cos\varepsilon,\sin\theta\sin\varepsilon,\cos\theta)$; $(\theta,\varepsilon)\in\Sigma==\{0\le\theta\le\pi;0\le\varepsilon\le2\pi\}$.

В работе [5] изучена задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана (14) при $n=\infty$ или $K(\theta,W)=0.25\chi^2\,|W|\sin(2\theta)$, т.е. для молекул - твердых шаров радиуса χ в области $Q=[0,T]\times G\times V_3$

$$(t \in [0,T], T < \infty; x = (x_1, x_2, x_3) \in G \equiv \{0 \le x_\alpha \le 1, \alpha = \overline{1,3}\};$$

$$v = (v_1, v_2, v_3) \in V_3 \equiv \{-\infty \le v_\alpha \le \infty, \alpha = \overline{1,3}\})$$

относительно функции распределения $f = f(t,x,v)$ с начальным и периодическим граничным условиями

$$f(t,x,v)|_{t=0} = \varphi(x,v); \qquad f(t,x,v)|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,x,v)|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \alpha = \overline{1,3}, \tag{15}$$

где $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ грань куба *G*.

Построена схема метода расщепления, соответствующая задаче (14), (15),

$$\frac{f^{n+1/5} - f^n}{\tau} = -f^{n+1/5} \mathrm{S}(f^{n+1/5}); \qquad \frac{f^{n+2/5} - f^{n+1/5}}{\tau} = \mathrm{J}(f^{n+1/5}), \tag{16}$$

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5} - f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + v_\alpha \frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad \alpha = \overline{1,3}. \tag{17}$$

При помощи метода Т. Карлемана для преобразования интеграла столкновений, установлена ключевая оценка

$$\left\| f^{n+1} \right\|_{C(G \times V_3)} = \left\| \varphi(x,v) \right\|_{C(G \times V_3)} + TK, K - const, \tag{18}$$

решения задачи (14),(15) в классе положительных непрерывных функций. На её основе доказано существование единственного положительного непрерывного по совокупности переменных (t,x,v) решения в целом по времени.

Литература

1. Акыш А.Ш. Математические вопросы теории переноса излучения и кинетической теории газов // Вестник НАН РК, 2006. № 2.-С.3-15.
2. Акыш (Акишев) А.Ш. Об устойчивости в ℓ_p некоторых разностных схем для уравнения переноса // Сиб. журн. вычисл. математики /РАН. Сиб. Отд-ние. – Новосибирск, 2002. – Т.5, №3. –С. 199–214.
3. Акыш (Акишев) А.Ш. Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для уравнения теплопроводнтси // Сиб. журн. вычисл. математики /РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2003.–Т.6, №1.– С. 1–16.
4. Акыш А.Ш. Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для одной системы нелинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2005.–Т. 8, №4. –С. 273–280.
5. Акыш А.Ш. О разрешимости нелинейного уравнения Больцмана // В кн. Неклассические уравнения математической физики. Из-во института математики, –Новосибирск, 2007. –С. 15-23.
6. Акыш А.Ш. Разностные схемы для уравнений Навье-Стокса // Материалы Международной конференции "Теория функций, алгебра и математическая логика" посвященной 90-летию академика А. Д. Тайманова, Алматы, 2007, –С. 101–103.