ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА

А.А. Уралиев, Г.К.Керимкулова
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР, Кыргызстан

Общепринятая математическая модель изотермического переноса влаги была предложена Л.А.Ричардсом еще в 30-е годы прошлого столетия. Она состоит из уравнения сохранения массы и движения, которые имеют вид:

$$w=-k_k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma}\right)+k_k, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\gamma\theta)}{\partial t}+\frac{\partial(\gamma w)}{\partial z}=F, \tag{2}$$

где $0\le z\le L_z$, $t\in(0;T_0]$.

Здесь $\gamma=\rho g$ – удельная масса влаги, $[ML^{-2}T^{-2}]$; ρ – плотность влаги, $[ML^{-3}]$; g – ускорение силы тяжести, $[LT^{-2}]$; [L]; z – вертикальная ось, направленная вниз [L]; t – время, [T]; θ – объемная влажность грунта [безразмерная величина]; k_k – коэффициент влагопроводимости, $[LT^{-1}]$; p – капиллярное давление, $[ML^{-1}T^{-2}]$; w – вектор скорости передвижения влаги, $[LT^{-1}]$; F – функция, определяющая разность между площадной инфильтрацией и испарением и др. возмущающими факторами, которая зависит от временно-пространственных координат (t,z), $[ML^{-2}T^{-3}]$.

Проведя обезразмеривание и необходимую подстановку [1], получим систему:

$$w=f\overset{0}{\theta}_z+k, \tag{3}$$

$$\overset{0}{\theta}_t+w_z=F. \tag{4}$$

Здесь, согласно аппарату группового анализа считаем, что переменные θ, w – зависимые, т.е. искомые, t, z – независимые, а f, k и F – произвольные функцияии.

Инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X=\overset{0}{\xi}\frac{\partial}{\partial t}+\overset{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial z}+\overset{0}{\eta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\overset{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial w}, \tag{5}$$

где $\overset{0}{\xi},\overset{1}{\xi},\overset{0}{\eta},\overset{1}{\eta}$ – некоторые неизвестные функции от (t,z,θ,w), дифференцируемые от своих аргументов, подлежащие определению.

Далее проводим групповой анализ дифференциальных уравнений (3)–(4), аналогичный проведенному в работе [2]. Проделав все необходимые вычисления, получим определяющие уравнения относительно координаты оператора X.

$$\frac{Xf}{f}=2\overset{1}{\xi}_z-\overset{0}{\xi}_t, \tag{6}$$

$$\overset{1}{\eta}=\left(\overset{0}{\eta}_\theta+\overset{1}{\xi}_z-\overset{0}{\xi}_t\right)(w-k)+f\,\overset{0}{\eta}_z+Xk, \tag{7}$$

$$\eta_{\theta\theta}=0, \tag{8}$$

$$\overset{0}{\eta}_t+F\cdot\left(\overset{0}{\eta}_\theta-\overset{0}{\xi}_t\right)-\left(\overset{0}{\eta}_\theta+\overset{1}{\xi}_z-\overset{0}{\xi}_t\right)\cdot k_z+\left(f\cdot\overset{0}{\eta}_z\right)_z+(Xk)_z=XF, \tag{9}$$

$$2\cdot\overset{0}{\eta}_{\theta z}+\overset{1}{\xi}_{zz}+\overset{0}{\eta}_z\cdot\frac{f_\theta}{f}+\left[-\left(\overset{1}{\xi}_z-\overset{0}{\xi}_t\right)\cdot k_\theta+\overset{1}{\xi}\cdot k_{z\theta}+\overset{0}{\eta}\cdot k_{\theta\theta}\right]\cdot\frac{1}{f}-\overset{1}{\xi}_t\cdot\frac{1}{f}=0, \tag{10}$$

при этом показано, что координаты $\overset{0}{\xi},\overset{1}{\xi},\overset{0}{\eta}$ имеют вид $\overset{0}{\xi}=\overset{0}{\xi}(t)$, $\overset{1}{\xi}=\overset{1}{\xi}(t,z)$ и $\overset{0}{\eta}=\overset{0}{\eta}(t,z,\theta)$. А

Xf, Xk и XF означает результат действия оператором X на функций f, k и F, соответственно.

Рассмотрим коэффициент влагопроводимости в форме предложенной С.Ф.Аверьяновым [2]:

$$k=\psi(z)\cdot\alpha(\theta). \tag{11}$$

Тогда согласно [1] функция f из (5) имеет вид

$$f=\psi(z)\cdot m(\theta). \tag{12}$$

Здесь в (11) и (12) функции ψ, α, m являются произвольными функциями от своих указанных аргументов.

В силу (12) из (6) получим, что

$$\overset{1}{\xi}\frac{\psi_z}{\psi}+\overset{0}{\eta}\frac{m_\theta}{m}=2\overset{1}{\xi}_z-\overset{0}{\xi}_t. \tag{13}$$

Заметим, что из (13) надо рассмотреть случаи:

I. $m_\theta=0;$ (14)

II. $m_\theta\neq 0.$ (15)

I. Пусть выполняется условие (14), т.е.

$$m=c, \tag{16}$$

где c – некоторая отличная от нуля постоянная интегрирования $c\neq 0$.

В силу (14) из (13) имеем:

$$\overset{1}{\xi}\frac{\psi_z}{\psi}=2\overset{1}{\xi}_z-\overset{0}{\xi}_t. \tag{17}$$

Учитывая (17) из (10), получим:

$$c\left(2\overset{0}{\eta}_{\theta z}+\overset{1}{\xi}_{zz}\right)-\frac{\overset{1}{\xi}_t}{\psi}+\overset{1}{\xi}_z\alpha_\theta+\overset{0}{\eta}\alpha_{\theta\theta}=0. \tag{18}$$

В силу (8) функцию $\overset{0}{\eta}$ представим в виде

$$\overset{0}{\eta}=A(t,z)\theta+B(t,z), \tag{19}$$

где A, B – некоторые дифференцируемые функции от перечисленных аргументов.

Подставляя (19) в (18), получим:

$$A(t,z)\theta\alpha_{\theta\theta}+B(t,z)\alpha_{\theta\theta}+\overset{1}{\xi}_z\alpha_\theta+c(2A_z+\overset{1}{\xi}_{zz})-\frac{\overset{1}{\xi}_t}{\psi}=0. \tag{20}$$

Здесь необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) $\theta\alpha_{\theta\theta}=\bar{c}\alpha_\theta$, если $A\neq 0;$ (21)

2) $\theta\alpha_{\theta\theta}=\bar{c}$, если $A\neq 0;$ (22)

3) $\alpha_{\theta\theta}=\bar{c}\alpha_\theta$, если $B\neq 0;$ (23)

4) $\alpha_{\theta\theta}=\bar{c}$, если $B\neq 0;$ (24)

5) $\alpha_\theta=\bar{c}$, если $\overset{1}{\xi}_z\neq 0,$ (25)

где $\bar{c}$ – некоторая отличная от нуля постоянная.

Подставляя (11), (12), (16), (17) и (19) в (9) имеем:

$$(A\psi)_z\theta\alpha_\theta+(B\psi)_z\alpha_\theta+\left[\overset{1}{\xi}\psi_{zz}-\left(A-\overset{0}{\xi}_t\right)\psi_z\right]\alpha+\left[A_t+c(\psi A_z)_z\right]\theta+$$

$$+B_t+F\left(A-\overset{0}{\xi}_t\right)+c\left(\psi B_z\right)_z=XF. \tag{26}$$

В данной работе ограничимся выполнением условия (21). Решая это уравнение имеем:

$$\alpha=\begin{cases}\tilde{c}\theta^{\bar{c}+1}+\tilde{\tilde{c}}, & \text{если} \quad \bar{c}\neq-1,\\ \tilde{c}\ln\theta+\tilde{\tilde{c}}, & \text{если} \quad \bar{c}=-1,\end{cases} \tag{27}$$

где $\tilde{c},\tilde{\tilde{c}}$ – некоторые постоянные интегрирования, причем $\tilde{c}\neq 0$.

Подставляя (27) в (20) и (26) отдельно выделим следующие подслучаи:

а) $\bar{c}=1$; (28)

б) $\bar{c}=-1$; (29)

в) $\bar{c}\neq\pm 1$. (30)

Пусть выполняется условие (28). Из (27) имеем

$$\alpha=\tilde{c}\theta^2+\tilde{\tilde{c}}\,. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (20) и расщепляя по θ, получим

$$A(t,z)+\overset{1}{\xi}_z=0,\quad 2\tilde{c}B(t,z)+c\left(2A_z+\overset{1}{\xi}_{zz}\right)-\frac{\overset{1}{\xi}_t}{\psi}=0. \tag{32}$$

При подстановке (31) в (26) из условия разрешимости имеем:

$$2(A\psi)_z+\overset{1}{\xi}\psi_{zz}-\left(A-\overset{0}{\xi}_t\right)\psi_z=0,\quad 2\tilde{c}(B\psi)_z+A_t+c(\psi A_z)_z=0,$$

$$\tilde{\tilde{c}}\left[\overset{1}{\xi}\psi_{zz}-\left(A-\overset{0}{\xi}_t\right)\psi_z\right]+B_t+F\left(A-\overset{0}{\xi}_t\right)+c(B_z\psi)_z=XF. \tag{33}$$

Из (32) находим

$$A(t,z)=-\overset{1}{\xi}_z,\quad B(t,z)=\frac{1}{2\tilde{c}}\left(c\overset{1}{\xi}_{zz}+\frac{\overset{1}{\xi}_t}{\psi}\right) \tag{34}$$

и подставляя это в первое уравнение системы (33), получим

$$\left(\overset{1}{\xi}\psi_z\right)_z-2\left(\overset{1}{\xi}_z\,\psi\right)_z+\overset{0}{\xi}_t\,\psi_z=0. \tag{35}$$

Учитывая (17) из уравнения (35) видно, что оно удовлетворяется автоматически. Заметим что, при условии (34) второе уравнение системы (33) превращается в тождество.

Если же уравнение (17) решим относительно $\overset{1}{\xi}$, считая ψ и $\overset{0}{\xi}_t$ известными, то приходим к следующему выражению

$$\overset{1}{\xi}=\varphi_1(z)\gamma(t)+\varphi_2(z)\overset{0}{\xi}_t, \tag{36}$$

где φ_1 и φ_2 – функции от z, а функция γ зависит от t, причем функции γ(t) и $\overset{0}{\xi}_t$ линейно-независимы или один из них равен нулю.

Пусть γ(t) и $\overset{0}{\xi}_t$ линейно-независимы. Подставляя (36) в (17), получим

$$\left[\varphi_1(z)\frac{\psi_z}{\psi}-2\varphi_1'(z)\right]\gamma(t)+\left[\varphi_2(z)\frac{\psi_z}{\psi}-2\varphi_2'(z)+1\right]\overset{0}{\xi}_t=0,$$

откуда, используя условия линейно-независимости функции γ(t) и $\overset{0}{\xi}_t$, имеем

$$\varphi_1\frac{\psi_z}{\psi}-2\varphi_1'=0,\quad \varphi_2\frac{\psi_z}{\psi}-2\varphi_2'+1=0$$

или решая их относительно ψ, получим

$$\psi(z)=\chi_1\varphi_1^2(z),\quad \psi(z)=\chi_2\varphi_2^2(z)e^{-\int\frac{dz}{\varphi_2(z)}}, \tag{37}$$

где χ_1, χ_2 – некоторые ненулевые постоянные числа. Приравнивая их, находим

$$\varphi_2(z) = \frac{\varphi_1(z)}{2}\int\frac{dz}{\varphi_1(z)}. \tag{38}$$

Итак, имеем

$$\overset{1}{\xi} = \varphi_1(z)\gamma(t) + \frac{\varphi_1(z)}{2}\int\frac{dz}{\varphi_1(z)}\overset{0}{\xi}_t. \tag{39}$$

Объясним, как надо использовать представление (39).

Сначала следует выбрать функции $\gamma(t)$ и $\overset{0}{\xi}_t$, при выборе может быть три случая:

α) $\gamma(t)$ и $\overset{0}{\xi}_t$ – отличны от нуля и линейно-независимы;

β) $\overset{0}{\xi}_t = 0$;

γ) $\gamma(t) = 0$.

Рассмотрим первый случай. Здесь нам необходимо субъективно взять три функции $\gamma(t)$, $\overset{0}{\xi}_t$, $\varphi_1(z)$, и далее подставляя их в (39) получим $\overset{1}{\xi}$.

В случае β) субъективно берем функции $\gamma(t)$, $\varphi_1(z)$ и из (39) аналогично имеем $\overset{1}{\xi}$.

В последнем случае, субъективно взяв $\overset{0}{\xi}_t$, $\varphi_1(z)$ из (36) также получим $\overset{1}{\xi}$.

Для применения выше сказанных замечаний, продемонстрируем следующий случай:

$$\overset{0}{\xi}_t = 2, \quad \gamma(t) = \beta t, \tag{40}$$

где β – некоторое ненулевое постоянное число. Здесь функции 2 и βt линейно-независимы, т.е. выполняется случай α). В качестве $\varphi_1(z)$ берем

$$\varphi_1(z)=1. \tag{41}$$

Подставляя $\overset{0}{\xi}_t$, $\gamma(t)$ и $\varphi_1(z)$ в (39), имеем

$$\overset{1}{\xi} = \beta t + z. \tag{42}$$

В силу (41) из (37) имеем

$$\psi(z) = \tilde{\tilde{c}}. \tag{43}$$

Подставляя (42) в (34), получим

$$A(t,z) = -1, \quad B(t,z) = \frac{\beta}{2\tilde{c}\tilde{\tilde{c}}}. \tag{44}$$

Для простоты записи обозначим

$$M = \frac{\beta}{2\tilde{c}\tilde{\tilde{c}}}. \tag{45}$$

Учитывая (40), (42)-(44) из (33), имеем

$$XF = -3F. \tag{46}$$

Интегрируя по t первое уравнение системы (40) , получим

$$\overset{0}{\xi} = 2t.$$

Здесь мы учли замечание по поводу переноса по времени. Решением уравнения (46) является

$$F(t,z) = t^{-\frac{3}{2}}\overline{F}(\xi), \tag{47}$$

где

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{t}} - \beta\sqrt{t} \tag{48}$$

и $\overline{F}(\bullet)$ – произвольная функция от одной переменной.

В силу (44) и (45) из (19) напишем

$$\overset{0}{\eta} = -\theta + M. \tag{49}$$

Подставляя (16), (31), (42), (43) (47) и (49) из (7) найдем

$$\overset{1}{\eta} = (-1+1-2)\left[w - \tilde{\tilde{c}}\left(\tilde{c}\theta^2 + \tilde{\tilde{c}}\right)\right] + \tilde{\tilde{c}}(-\theta + M)2\tilde{c}\theta = -2w + \beta\theta + N. \tag{50}$$

Здесь использовали соотношение (45) и

$$N = 2\tilde{\tilde{c}}\tilde{\tilde{c}}. \tag{51}$$

Напишем соответствующий инфинитезимальный оператор

$$X = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\beta t + z)\frac{\partial}{\partial z} + (-\theta + M)\frac{\partial}{\partial \theta} + (-2w + \beta\theta + N)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Найдем инварианты этого оператора, для этого решим ОДУ

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dz}{\beta t + z} = \frac{d\theta}{-\theta + M} = \frac{dw}{-2w + \beta\theta + N}.$$

Инвариантами будут

$$J_1 = \frac{z}{\sqrt{t}} - \beta\sqrt{t}, \quad J_2 = (\theta - M)\sqrt{t}, \quad J_3 = tw - \beta t(\theta - M) - \frac{\beta M + N}{2}t. \tag{52}$$

С помощью инвариантов напишем представление решения:

$$\theta(t,z) = \frac{1}{\sqrt{t}}\bar{\theta}(\xi) + M,$$

$$w(t,z) = \frac{1}{t}\bar{w}(\xi) + \frac{\beta}{\sqrt{t}}\bar{\theta}(\xi) + \frac{\beta M + N}{2}, \tag{53}$$

где ξ определяется согласно (48) и $\bar{w}(\xi)$ и $\bar{\theta}(\xi)$ новые искомые функции от одной переменной. При этом произвольные функции имеют вид:

$$k = \psi\,\alpha(\theta) = \tilde{\tilde{c}}\left(\tilde{c}\theta^2 + \tilde{\tilde{c}}\right) = \tilde{\tilde{c}}\left[\tilde{c}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\bar{\theta}(\xi) + M\right)^2 + \tilde{\tilde{c}}\right], \quad f = \psi m(\theta) = \tilde{\tilde{c}}c. \tag{54}$$

и функция F(t,z) определяется (47).

Подставляем (47), (48), (53) и (54) в (3), (4)

$$\bar{w} = \tilde{\tilde{c}}c\bar{\theta}_{\xi} + \tilde{\tilde{c}}\tilde{c}(\theta)^2, \quad -\frac{1}{2}\bar{\theta} - \frac{\xi}{2}\bar{\theta}_{\xi} + \bar{w}_{\xi} = \bar{F}. \tag{55}$$

Итак, мы продемонстрировали, как использовать представление (36). Точно так же можно получить другое преобразование, выбрав функции $\overset{0}{\xi}_t, \gamma(t), \varphi_1(z)$.

Преобразованная модель представлена в виде вполне определенной и корректно поставленной системы уравнений. Она является эквивалентной к начальной модели изучаемого процесса. С целью прогнозирования процесса переноса влаги в моделируемом объекте, необходимо с помощью данных, полученных путем экспериментальных измерений и/или наблюдений, образовать начальные, краевые и внутренние условия.

Литература

1. Жылчиев Н.М., Рыскелдиева Н.Б., Уралиев А.А. Математическое моделирование одномерного движения влаги в почвогрунте // Вестник Иссык-Кульского университета. – Каракол, 2004, №11. – С. 44–51.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. –644с.
3. Изотермическое передвижение влаги в зоне аэрации. – Л.: Гидрометеоиздат, 1972/ Пер. с англ. Ю.Н.Никольского / Под ред. С.Ф.Аверьянова.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. –564 с.