КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рыскелдиева Н.Б., Джансеркеев А.Б.
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР
Кыргызская Республика, nur_r2009@mail.ru

Водные ресурсы, включающие в себя: речной сток, запасы воды в ледниках, пресных озерах и подземные воды, являются одним из главных богатств Кыргызской Республики.

Водные ресурсы нашей страны на современном этапе определяются в количестве [1]:

- среднегодовой речной сток – 51,9 км^3/год;
- запасы в ледниках – 494,7 км^3;
- запасы в озерах (без оз. Иссык-Куль) – более 6,2 км^3;
- подземные воды – 11 км^3;
- суммарные ресурсы составляют более 563,8 км^3.

В последнее время в качестве источника запасов пресной воды все больше используются подземные воды. Население использует подземные воды для питьевых и других хозяйственных целей, также за счет них удовлетворяется сельскохозяйственное водопотребление страны.

Коротко приведем данные о запасах подземных вод Кыргызстана.

Подземные воды оцениваются двумя показателями: возобновляемыми ресурсами и эксплуатационными запасами.

Возобновляемые ресурсы представляют собой поток подземных вод, протекающий по порам пластов пород и трещинам, и получающий питание за счет фильтрации под землю атмосферных осадков, вод поверхностных водотоков и водоемов.

Эксплуатационные запасы подземных вод - количество подземных вод, которое может быть получено рациональными в технико-экономическом отношении водозаборными сооружениями при заданном режиме эксплуатации и при качестве воды, удовлетворяющем требованиям в течение всего расчетного срока водопотребления.

Статические запасы подземных вод – объем подземных вод, содержащихся в поровом и трещинном пространстве пород.

Общая величина возобновляемых ресурсов пресных подземных вод в бассейнах подземных вод республики составляет порядка 350 м^3/с (в объемах 11 км^3/год). Объем статических запасов подземных вод равно 650 км^3, а эксплуатационные запасы составляют 188 м^3/с [2,3].

Подземные воды, как и водные ресурсы в целом не являются постоянной величиной. За последние годы водные ресурсы нашей республики увеличились количественно, но актуальной остается проблема их рационального использования.

Знание движения подземных вод необходимо для предотвращения таких нежелательных процессов, как истощение и загрязнение месторождений подземных вод (МПВ). В настоящее время одним из методов исследования МПВ с целью оценки ресурсов подземных вод является математическое моделирование.

Теоретическая оценка ресурсов МПВ и прогнозирование их качество и запасы с учетом естественных и искусственных факторов с помощью математического моделирования является достаточно трудоемкой работой. Для достоверного описания процесса фильтрации необходимо решить нелинейные дифференциальные уравнения с начально-краевыми условиями и с помощью идентификации привести соответствие модели к изучаемому объекту. В ходе исследования возникают проблемы по моделированию процесса фильтрации, связанные с некорректностью и недоопределенностью самой математической модели. Эти трудности можно решить с помощью метода квазиоптимальных преобразований дифференциальных уравнений. Предложенная методика использует достаточно удачные преобразования, которые переводят исследуемую модель в инвариантную ей и вполне определенную систему уравнений.

В данной работе рассмотрено трехмерное течение подземных вод в неоднородной пористой среде. Поскольку состояние гидрогеологических систем изменяется во времени и пространстве, основные уравнения записываются относительно изменений зависимых переменных в пространстве и во времени. Общее дифференциальное уравнение фильтрации подземных вод в частных производных можно вывести, объединив закон Дарси с уравнением неразрывности, представляющим собой закон сохранения массы жидкости [4].

Итак, математическая модель процесса описывается уравнением неразрывности

$$\mu\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \overset{1}{v}}{\partial x}+\frac{\partial \overset{2}{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overset{3}{v}}{\partial z}=F \tag{1}$$

и динамическими уравнениями

$$\overset{1}{v}=-k\frac{\partial h}{\partial x},\qquad \overset{2}{v}=-k\frac{\partial h}{\partial y},\qquad \overset{3}{v}=-k\frac{\partial h}{\partial z}, \tag{2}$$

которые называют обобщенным законом Дарси.

Здесь, (x,y,z) – прямоугольные координаты, [м]; t – время, [сек]; h=h(x,y,z,t) – искомая гидравлическая функция напора, [м]; k = k(x,y,z,h) – неизвестный коэффициент фильтрации, $k \neq 0$, [м/сек]; $\mu = \mu(x, y, z)$ – неизвестная удельная влагоемкость (или в отношении инфильтрации влагопроводность), [1/м]; F=F(x,y,z,t) – неизвестная интенсивность источников (и стоков), [1/сек]; $\vec{v} = (u, v, w)$– искомый вектор плотности потока которые зависит от (t,x,y,z), [м/сек].

Неизвестный коэффициент фильтрации k ищем в следующем виде:

$$k=\varphi(x,y,z)\cdot\alpha(h) \tag{3}$$

В недоопределенной системе (1) и (2) неизвестными переменными являются u, v, w, μ, h, k, F, а количество уравнений равно четырем, поэтому произвольных функций должно быть четыре.

В практике заданные точечные значения коэффициента фильтрации малочисленны, так как они получаются в результате дорогих опытно-фильтрационных работ. Рассматриваемая математическая модель недоопределена из-за того, что коэффициент фильтрации неизвестен.

С целью преодоления недоопределенности математической модели, к системе (1), (2) используем метод квазиоптиального преобразования дифференциальных уравнений [5,6].

Согласно методу в рассматриваемой модели:

1) t,x,y,z – независимые переменные;

2) $h, \overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \overset{3}{v}$ – искомые функции;

3) F, k, μ – произвольные функции от своих аргументов.

Для системы (1), (2) инфинитезимальным оператором будет следующий оператор:

$$X = \overset{0}{\xi}\frac{\partial}{\partial t} + \overset{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \overset{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial y} + \overset{3}{\xi}\frac{\partial}{\partial z} + \overset{0}{g}\frac{\partial}{\partial h} + \overset{1}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}} + \overset{2}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}} + \overset{3}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}}, \tag{4}$$

где $\overset{0}{\xi}, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \overset{3}{\xi}, \ldots, \overset{3}{g}$ – координаты инфинитезимального оператора X и они зависят только от $t, x, y, z, h, \overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \overset{3}{v}$.

Действуя на (1) и (2) оператором (4), после необходимых вычислений приходим к системе определяющих уравнений:

$$\overset{0}{\xi} = \overset{0}{\xi}(t),$$

$$\overset{1}{\xi} = A_1\left(x^2 - y^2 - z^2\right) + 2x\left(A_2 y + A_3 z\right) + B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_5,$$

$$\overset{2}{\xi} = A_2\left(y^2 - x^2 - z^2\right) + 2y\left(A_1 x + A_3 z\right) - B_2 x + B_1 y + B_4 z + B_6,$$

$$\overset{3}{\xi} = A_3\left(z^2 - x^2 - y^2\right) + 2z\left(A_1 x + A_2 y\right) - B_3 x - B_4 y + B_1 z + B_7. \tag{5}$$

$$\overset{1}{g} = \left(\frac{Xk}{k} + \overset{0}{g}_h - \overset{1}{\xi}_x\right)\overset{1}{v} - \overset{2}{v}\overset{2}{\xi}_x - \overset{3}{v}\overset{3}{\xi}_x - k\overset{0}{g}_x,$$

$$\overset{2}{g} = -\overset{1}{v}\overset{1}{\xi}_y + \left(\frac{Xk}{k} + \overset{0}{g}_h - \overset{2}{\xi}_y\right)\overset{2}{v} - \overset{3}{v}\overset{3}{\xi}_y - k\overset{0}{g}_y,$$

$$\overset{3}{g} = -\overset{1}{v}\overset{1}{\xi}_z - \overset{2}{v}\overset{2}{\xi}_z + \left(\frac{Xk}{k} + \overset{0}{g}_h - \overset{3}{\xi}_z\right)\overset{3}{v} - k\overset{0}{g}_z, \tag{6}$$

$$\left(\frac{Xk}{k}\right)_h = -\overset{0}{g}_{hh}. \tag{7}$$

$$\frac{\mu}{\varphi\alpha}\overset{1}{\xi}_t + \overset{1}{\xi}_{xx} + \overset{0}{g}_{hx} + \frac{\alpha'}{\alpha}\overset{0}{g}_x = 0, \qquad \frac{\mu}{\varphi\alpha}\overset{2}{\xi}_t + \overset{2}{\xi}_{yy} + \overset{0}{g}_{hy} + \frac{\alpha'}{\alpha}\overset{0}{g}_y = 0,$$

$$\frac{\mu}{\varphi\alpha}\overset{3}{\xi}_t + \overset{3}{\xi}_{zz} + \overset{0}{g}_{hz} + \frac{\alpha'}{\alpha}\overset{0}{g}_z = 0. \tag{8}$$

$$\mu\overset{0}{g}_t + F\left(\overset{0}{g}_h - \overset{0}{\xi}_t + \frac{X\mu}{\mu}\right) - \left(k\overset{0}{g}_x\right)_x - \left(k\overset{0}{g}_y\right)_y - \left(k\overset{0}{g}_z\right)_z = XF. \tag{9}$$

$$\frac{X\varphi}{\varphi} - \frac{X\mu}{\mu} + \overset{0}{g}\frac{\alpha'}{\alpha} = 2\overset{1}{\xi}_x - \overset{0}{\xi}_t. \tag{10}$$

Из (10) рассмотрим случаи:

a)

$$\alpha' = 0, \tag{11}$$

b)

$$\alpha' \neq 0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай a). Тогда решением уравнения (11) будет:

$$\alpha = c = const \neq 0. \tag{13}$$

Из (13) приходим к выводу, что функция k зависит только от x,y,z. Тогда из (7) приходим к следующему уравнению:

$$\overset{0}{g}_{hh} = 0\,. \tag{14}$$

Из последнего уравнения имеем:

$$\overset{0}{g} = M(x,y,z)h + N(x,y,z)\,. \tag{15}$$

где M, N – неизвестные функции от перечисленных аргументов.

В рассматриваемом случае функции $\overset{1}{\xi},\ \overset{2}{\xi},\ \overset{3}{\xi},\ \overset{0}{\xi},\ \overset{0}{g}$ принимают следующий вид:

$$\overset{0}{g} = C_1 h\,,\quad \overset{1}{\xi} = \tilde{N}_1 x + \tilde{N}_3\,,$$

$$\overset{2}{\xi} = \tilde{N}_1 y + \tilde{N}_4\,,\quad \overset{3}{\xi} = \tilde{N}_1 z + \tilde{N}_5\,,\quad \overset{0}{\xi} = \tilde{N}_2 t + \tilde{N}_6\,. \tag{16}$$

Рассмотрим базисный оператор, отвечающий параметру C_1. Для этого согласно теории квазиоптимального преобразования дифференциальных уравнений положим, что

$$C_1 = 1 \quad \text{è} \quad C_i = 0 \quad (i = 2,3..6). \tag{17}$$

Учитывая выше полученные выражения, находим произвольные функции:

$$\mu = y^{-3}\bar{\mu}\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right),\quad k = cy^{-1}\bar{\varphi}\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right),\quad F = y^{-2}\bar{F}\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right). \tag{18}$$

Учитывая (16) и (18) перепишем систему (6)

$$\overset{1}{g} = -\overset{1}{v},\quad \overset{2}{g} = -\overset{2}{v},\quad \overset{3}{g} = -\overset{3}{v}. \tag{19}$$

Базисный оператор, отвечающий параметру C_1, имеет следующий вид:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + h\frac{\partial}{\partial h} - \overset{1}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}} - \overset{2}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}} - \overset{3}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}}. \tag{20}$$

Далее находим инварианты оператора (20). Для этого решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dh}{h} = \frac{d\overset{1}{v}}{-\overset{1}{v}} = \frac{d\overset{2}{v}}{-\overset{2}{v}} = \frac{d\overset{3}{v}}{-\overset{3}{v}}. \tag{21}$$

Решая систему (21) находим:

$$J_1 = \frac{x}{y},\quad J_2 = \frac{z}{y},\quad J_3 = \frac{h}{y},\quad J_4 = \overset{1}{v}y,\quad J_5 = \overset{2}{v}y,\quad J_6 = \overset{3}{v}y. \tag{22}$$

В силу инвариантов (22) напишем представление искомой системы (1) и (2):

$$h(t,x,y,z) = y\bar{h}(t,\xi\eta),\quad \overset{1}{v}(t,x,y,z) = y^{-1}\bar{u}(t,\xi\eta),$$

$$\overset{2}{v}(t,x,y,z) = y^{-1}\bar{v}(t,\xi\eta),\quad \overset{3}{v}(t,x,y,z) = y^{-1}\bar{w}(t,\xi\eta), \tag{23}$$

где

$$\xi = \frac{x}{y},\quad \eta = \frac{z}{y}. \tag{24}$$

При этом функции k, μ, F представляются в виде:

$$k = cy^{-1}\bar{\varphi}(\xi,\eta),\quad \mu = y^{-3}\bar{\mu}(\xi,\eta),\quad F = y^{-2}\bar{F}(\xi,\eta). \tag{25}$$

Подставляя (23) и (25) в (1) и (2) с учетом (24) после необходимых упрощений имеем систему уравнений:

$$\bar{\mu}\bar{h}_t + \bar{u}_\xi - \bar{v} - \bar{v}_\xi \xi - \bar{v}_\eta \eta + \bar{w}_\eta = \bar{F},$$

$$\bar{u} = -c\bar{\varphi}\bar{h}_\xi, \qquad \bar{v} = -c\bar{\varphi}\left(\bar{h} - \bar{h}_\xi \xi - \bar{h}_\eta \eta\right), \qquad \bar{w} = -c\bar{\varphi}\bar{h}_\eta. \tag{26}$$

В результате применения к системе (1)–(2) метода квазиоптимальных преобразований выяснилось, что:

а) нами получена относительно искомых функций $h, \overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \overset{3}{v}$, эквивалентная к первоначальной системе, вполне определенная система уравнений (26);

б) для произвольных функций F, k, μ получили явные их выражения, зависящие от новых переменных и произвольных постоянных. Последние определяются с помощью экспериментальных измерений и/или данных наблюдений;

в) полученная после преобразования система состоит из четырех дифференциальных уравнений в частных производных, которые содержат коэффициенты, состоящие от произвольных постоянных и от произвольных функций, представленных в явном виде;

г) после определения входящих в систему произвольных постоянных и произвольных функций, далее следует организовать начально-краевые условия, необходимые для описания исследуемого процесса.

Литература:

1. Маматканов Д.М., Бажанова Л.В., Романовский В.В. Водные ресурсы Кыргызстана на современном этапе. –Бишкек: Илим, 2006. –265 с.
2. Мангельдин Р.С. Ресурсы пресных подземных вод внутригорных впадин Тянь-Шаня. –Бишкек: Илим, 1991. –151 с.
3. Григоренко П. Г. Подземные воды межгорных впадин Киргизии и перспективы их использования // Тр. Института геологии АН Киргизской ССР. –Вып. 9. –Фрунзе, 1957. –243 с.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. –М.: Наука, 1977. –664 с.
5. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А. Математическое моделирование переноса влаги и солей. –Бишкек: Илим, 2008. –200 с.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.