

**Р.Н. Аскарбеков<sup>1</sup>, Т.Б. Дуйшеналиев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,  
Бишкек, Кыргызстан

<sup>2</sup>НИУ «Московский энергетический институт», Москва, Россия

E-mail: [askarbekovu@gmail.com](mailto:askarbekovu@gmail.com), [duishenaliev@mail.ru](mailto:duishenaliev@mail.ru)

## БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ МНОГОСЛОЙНЫХ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

При описании деформации резинометаллических элементов появляется необходимость рассмотрения геометрической и физической нелинейности. Изучая все существующие методы, в статье предложен альтернативный подход. В статье рассматривается аналитический метод описания большой упругой деформации резинового слоя. Аналитические методы механики деформируемого твердого тела содержат идеи, которые во многих случаях помогают и при численном решении задач.

**Ключевые слова:** деформация резинового слоя, аналитический метод, краевая задача, резинометаллическая опора.

### Введение. Статическая краевая задача

В теории упругости известны различные варианты общих решений статической краевой задачи. Обзор известных решений приведен в первой главе диссертации Аскарбекова Р.Н. [1]. В большинстве решений напряжения или перемещения представлены через произвольные независимые функции (например, гармонические или бигармонические) таким образом, чтобы уравнения равновесия или движения удовлетворялись тождественно. На данный момент имеется множество вариантов решений уравнений линейной теории упругости [8] в перемещениях или напряжениях [4, 6, 11, 12]. В подавляющем все они опираются на устоявшийся подход к постановке и решению краевых задач. В статье применен другой подход, аналитический метод для моделирования напряженно-деформированного состояния резинометаллических элементов.

### Аналитический метод моделирования

Для рассмотрения процесса сжатия многослойных резинометаллических опор (РМО) воспользуемся математической моделью, предложенной Дуйшеналиевым Т.Б. [1, 3]. Торцы закреплены жестко, смещений нет. Запишем через напряжения приложенные усилия к РМО. Тело с заданными силами внутри своего объема  $V$  и на его поверхности  $S$  находится в равновесии. Необходимо найти напряжения и деформации внутри тела. Тут объем тела  $V$  и его поверхность  $S$ , разумеется, должны быть заданы [1]. Пусть  $f_i$  и  $p_i$  – соответственно внешние силы, заданные в  $V$  и на  $S$ . Обозначая через  $\sigma_{ij}$  компоненты тензора напряжений, представим постановку математически, где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, x_i \in V, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, x_i \in V, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji}n_j = P_i, \quad x_i \in S. \quad (3)$$

Величины внешних сил в статической краевой задаче могут быть разными. Зададимся областью определения уравнений статической краевой задачи. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в самом центре, что соответствует положению  $(X,Y,Z)=(0,0,0)$ . Итак, под обозначением  $V$  будем подразумевать следующую область в миллиметрах:

$$-0.05 \leq x_1 \leq 0.05, \quad -0.05 \leq x_2 \leq 0.05, \quad 0 \leq x_3 \leq 0.1. \quad (4)$$

Рассмотрим вторую краевую задачу без массовых сил. Резинометаллическая опора с усилиями (7) на своей поверхности находится в равновесии.

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad x_i \in V, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0, \quad x_i \in V, \quad (6)$$

$$\sigma_{ji}n_j = \delta_{i2}cx_3, \quad x_i \in S, \quad (7)$$

где  $V$  определяется выражениями (4).

Более подробное описание нового аналитического метода приводится в главе 3 [1], где в пункте 3.4 приводится решение для резинометаллических опор.

В системе MATLAB был создан программный код по предложенной математической модели. Результаты расчета приводятся на рис.1. При расчете рассматриваются четыре вида резинометаллической опоры (РМО), которые отличаются друг от друга. Геометрические параметры сохраняются, изменяется толщина резиновых слоев и количество металлических пластин. На рис. 1 сплошным цветом показаны металлические пластины, а в виде сетки – однородные резиновые слои.

При действии нагрузки резиновые слои, как правило, выпучиваются по краям, и происходит ее осадка (деформация). Резиновые элементы могут допускать значительные относительные деформации, достигающие более 100% с полным восстановлением геометрической формы и размеров [5, 7, 9, 10], если нагрузка статическая или имеет медленно изменяющийся характер. Из-за наличия в резине значительного внутреннего сопротивления расчет деталей, работающих при статических нагрузках, существенно отличается от расчета на динамические нагрузки. С использованием нового аналитического метода и реализацией программного кода в MATLAB можно получить значения перемещений точек резинового слоя.

Для подтверждения эффективности используемого метода воспользуемся уже общеизвестным методом конечных элементов [14], реализованным в таком программном вычислительном комплексе, как ANSYS.

### Моделирование сжатия при помощи МКЭ

Для создания РМО в системе ANSYS будем использовать те же геометрические и физические параметры, которые были заданы в MATLAB. Точно такие же условия, распределённая сжимающая сила приложена к верхнему торцу. Разбиваем на сетки РМО и приложим постепенно силу сжатия.

Разделение области на конечные элементы является первым шагом в методе конечных элементов (МКЭ). Это эквивалентно замене области, имеющей бесконечное число степеней свободы, на область, имеющей конечное число степеней свободы. На рис. 2 приведен результат расчета цилиндрического резинометаллического элемента, параметры которого: высота – 0,1м, диаметр – 0,1м, модуль упругости – 12 МПа, плотность резины – 1350кг/м<sup>3</sup>.

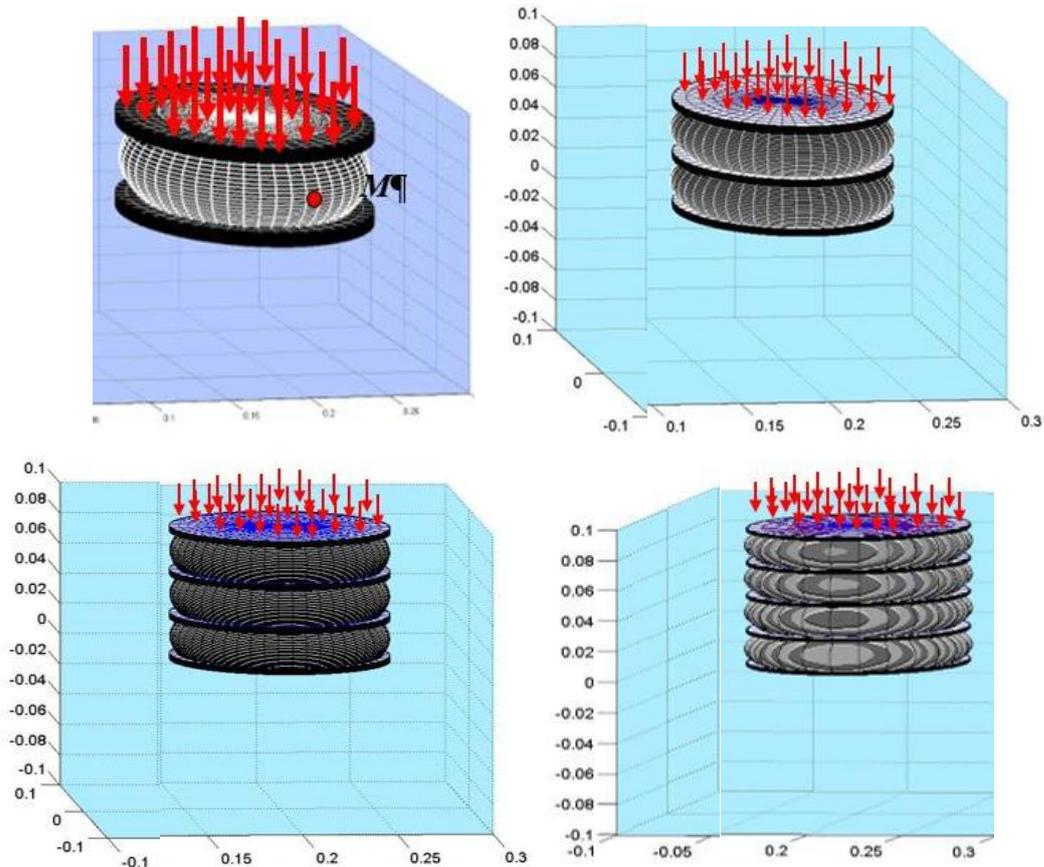


Рисунок 1 – Деформация РМО при сжатии в системе MATLAB

В процессе сжатия большие напряжения и деформацию испытывает только резиновый слой, а металлические пластины распределяют усилия по всему телу. Поэтому на рис. 2 видно, как резина деформируется и образует бочку.

Для корректности использования таких программных расчетных комплексов приведем ниже результаты натуральных экспериментов РМО на сжатие.

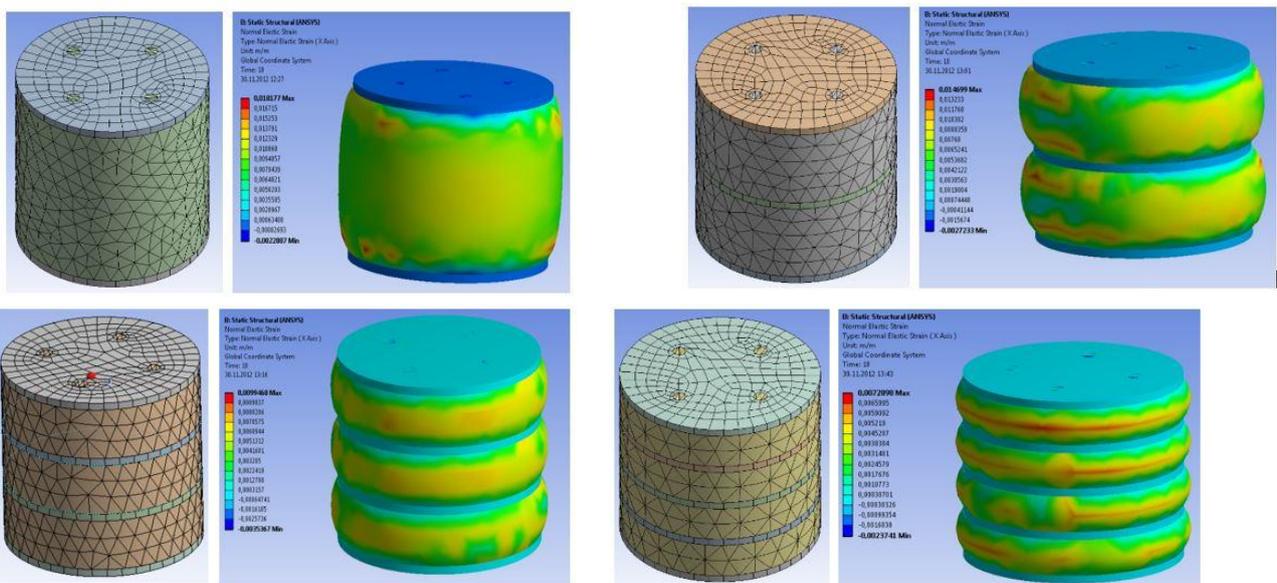


Рисунок 2 – Конечно-элементная сетка и распределение напряжений в резиновых слоях РМО

### Сжатие резинометаллических опор

Эксперимент на сжатие РМО был проведен в лаборатории кафедры «Механика» Кыргызского государственного технического университета им.И.Раззакова на прессе УМ-100. Нагружение выполнялась постепенно (1тонна/мин), максимальная нагрузка равна 6 тоннам. Параметры РМО точно такие же, как и в системе MATLAB, так и в ANSYS. При сжатии наблюдаются большие упругие деформации резинового слоя. Это объясняется наличием трения в зоне соприкосновения резины и металлической пластины, а также относительно большой высотой резинового слоя. Металлические пластины не деформируются и лишь равномерно распределяют нагрузку на резиновый слой. При разгрузке резиновый слой полностью восстанавливается и приобретает первоначальный вид. Деформации происходят в упругой зоне. Никаких внешних повреждений при восстановлении после сжатия не наблюдалось.



Рисунок 3 – Испытание на сжатие РМО на прессе УМ-100

Из рисунка видно, что чем больше высота резинового слоя, тем больше упругие деформации такой опоры. Высота резинового слоя, несомненно, влияет и на частоту собственных колебаний самой опоры. При увеличении количества металлических пластин жесткость и прочность РМО заметно повышаются, что позволяет использовать их как опоры зданий и сооружений. При достижении максимальной деформации резины в резиновом слое начинается процесс накопления упругой энергии, что позволяет резиновому слою сохранять полученную форму и продолжать сопротивляться приложенной нагрузке. Процесс сжатия происходит в упругих пределах.

### Результаты расчетов

Приведем по вышеизложенным методам и экспериментальным данным результаты расчетов. Напряженно-деформированные состояния резинометаллических опор, определенные по предлагаемой математической модели, сопоставлялись с результатами экспериментальных исследований и численными расчетами, выполненными МКЭ. Предложенный метод по своим результатам ничем не уступает методу МКЭ и относится к аналитическим методам. И данный метод позволяет моделировать большие упругие деформации.

Из выше приведенных графиков (рис. 4) видно, что расчеты, выполненные на основе аналитического метода (разработанная авторами модель), хорошо совпадают с экспериментальными данными, а также с результатами, полученными при расчетах по МКЭ.

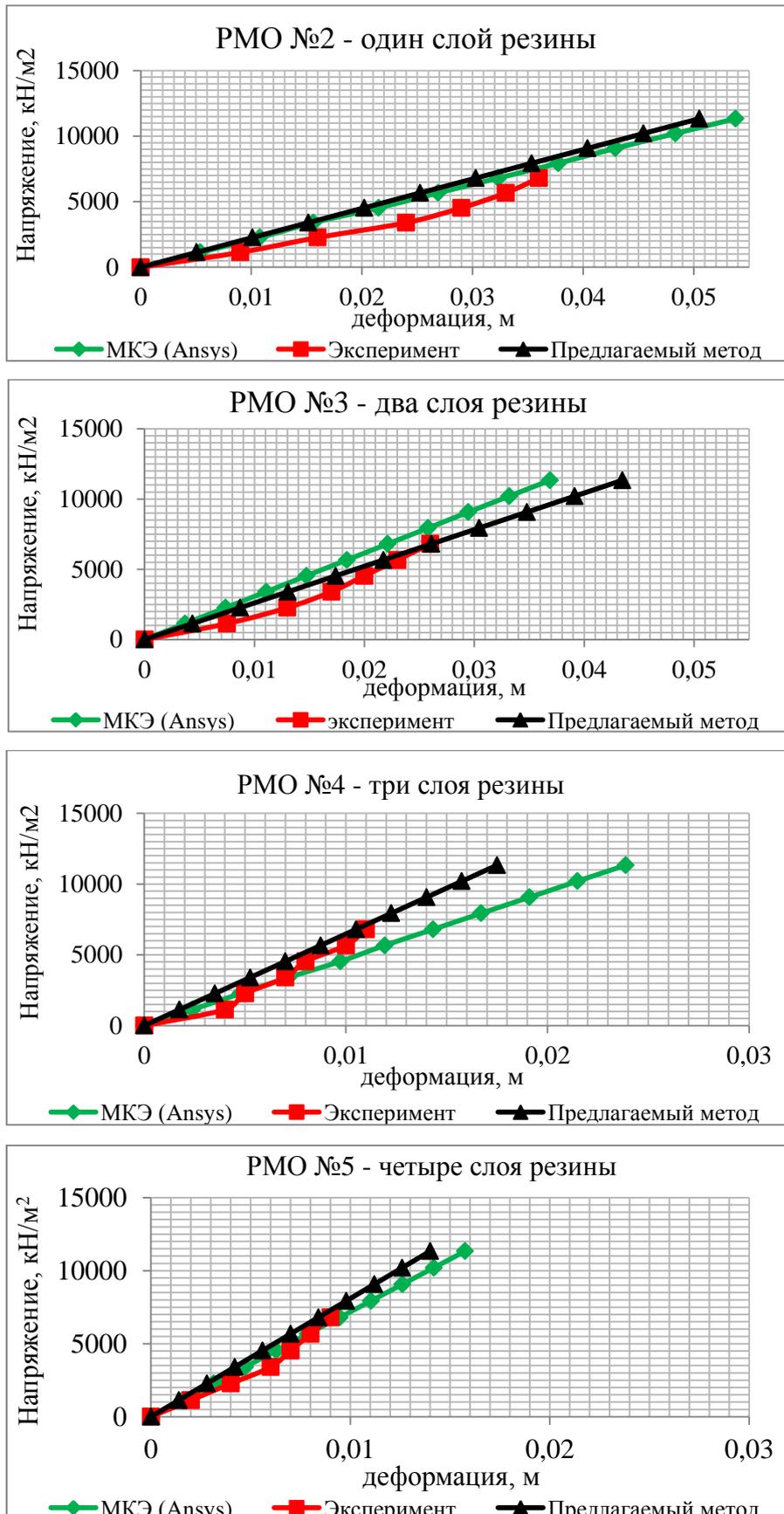


Рисунок 4 – Расчетные данные в системе MATLAB, ANSYS и результаты экспериментов

Экспериментальные линии, как видно из рис. 4, имеют точку преломления, что говорит о нелинейном поведении резины при сжатии. Описать этот процесс можно следующим образом: при росте нагрузки микропоры и микропустоты резинового тела могут закрываться, увеличивая однородность и сплошность. Модуль упругости растет, сама резина как бы упрочняется.

### **Заключение**

Предлагаемая математическая модель развивает применительно к резиноподобным материалам аналитический метод решения статических краевых задач теории упругости, предложенный Т.Б.Дуйшеналиевым, и удобна для использования современных компьютерных программ.

Новые результаты получены на основе применения фундаментальных положений и законов механики сплошных сред. Хорошо согласуются с данными экспериментальных и численных исследований, в т. ч. в системе ANSYS и MATLAB, а также с результатами исследований других авторов.

Результаты данной работы и разработанной математической модели, реализованные в системе MATLAB, могут найти применение при решении и других задач механики деформируемого твердого тела, механики горных пород, механики композиционных материалов, а также в инженерной практике. Экспериментальные данные и полученные теоретические результаты представляют интерес при проектировании систем активной сейсмо- и вибрационной защиты инженерных сооружений.

### **Литература**

1. Аскарбеков Р.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния вибро- и сейсмоизолирующих резинометаллических элементов: Дис.... канд. физ.-матем. наук. – Бишкек, 2017. – 126 с.
2. Дуйшеналиев Т.Б., Аскарбеков Р.Н. Нетрадиционный метод расчета напряженно-деформированного состояния резинометаллических опор // Труды университета РГКП Карагандин. гос. техн. ун-т. – 2016. – Вып. 1 (62). – С. 96–100.
3. Жакыпбек А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела. – Бишкек: [Б.И.], 1999. – 238 с.
4. Лавендел, Э.Э. Расчёт резинотехнических изделий. – М.: Машиностроение, 1976 – 232 с.
5. Мальков В.М., Круглякова В.И. Критические нагрузки многослойных резинометаллических элементов // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 298, № 5. – С. 1090–1093.
6. Мирошкин К.П. Нелинейное деформирование неоднородных элементов машиностроительных конструкций из резинометаллических материалов с учетом старения: Дис.... канд. техн. наук. – Москва, 2007. – 157 с.
7. Мондрус В.Л., Сизов Д.К. Определение собственных частот резинометаллического виброизолятора в конечно-элементных программных комплексах // Сборник научных трудов Института строительства и архитектуры. – М., 2008. – С. 63–65.
8. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
9. Потураев В.Н. Резиновые и резинометаллические детали машин. – М.: Машиностроение, 1966. – 298 с.
10. Ормонбеков Т.О., Бегалиев У.Т., Деров А.В. и др. Применение тонкослойных резинометаллических опор для сейсмозащиты зданий в условиях территории Кыргызской

Республики. – Бишкек: «Учкун», 2005. – 212 с.

11. Сергаева М.Ю. Обоснование работоспособности резинометаллических виброизоляторов систем виброзащиты авиационного оборудования: Дис.... канд. техн. наук. – Омск, 2005. – 163 с.
12. Сизов Д.К. Статика и динамика резинометаллического виброизолятора: Дис.... канд. техн. наук. – Москва, 2008. – 149 с.
13. Duishenaliev T.B., Askarbekov R.N. Calculation of deformation of rubber layer in rubber metal elements // Proceedings of 15th International Scientific Conference Engineering for Rural Development. – Jelgava, Latvia, 2016. – P. 1402–1410.
14. Zienkiewicz, O.C. The generalized finite element method-state of the art and future direction // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1983. – No. 50. – P. 1210–1217.