

УДК 519.633.9

*Джураев Х.Ш., Джураева Г.Х.**НИИ Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан**E-mail: hayrullo_58@mail.ru*

О ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дан метод приближенного аналитического решения краевых задач сингулярно-возмущенных уравнений стационарной теплопроводности, которое близко к решению задачи для невозмущенного уравнения. Исследованы основные задачи, которыми и определяется структура статьи: разработка математических и компьютерных моделей стационарной теплопроводности в конденсированных средах и модельного диффузионно-реактивного переноса энергии в зависимости теплопроводности. Представлены интерпретации полученных результатов, численных экспериментов зависимости теплового потока от значения температуры. При проведении численных экспериментов использовали существующие литературные паспортные данные одной из типичных задач. На основе полученных результатов можно заключить, что с ростом температуры поток тепла остается неизменным, а теплопроводность иллюстрируется наличием двух пограничных слоев и качественным совпадением с литературными данными.

Ключевые слова; модель, малый параметр, сингулярно-возмущенный, методы малого параметра, пограничные и переходные слои, поток тепла, теплопроводность.

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим уравнение с частными производными

$$\frac{\varepsilon^2}{x^\mu} \cdot \frac{d}{dx} \left(x^\mu \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = f(x), \quad (1)$$

которое соответствует сингулярно-возмущенным дифференциальным уравнениям второго порядка и учитывает стационарную теплопроводность в конденсированных средах и модельный процесс диффузионно-реактивного переноса. Здесь μ и ε параметры, удовлетворяющие условиям: $\mu \geq 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Если $\mu = 0$, то уравнение (1) является математическим моделированием процесса диффузионно-разностного переноса в декартовой системе координат, если $\mu = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{r}$, то уравнение (1) рассматривается в цилиндре с радиусом r , а при $\mu = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{r}$ уравнение (1) будет сферическим. Считая, что функции $q(x)$ и $f(x)$ заданы и, по крайней мере, непрерывны на отрезке $[0, 1]$, причем $q(x) \geq 0$ будем искать решение уравнения (1) при предельных условиях:

$$\left(\gamma_1 \frac{du}{dx} + \gamma_2 u \right) \Big|_r = \begin{cases} |u(0)| < +\infty & \text{при } x = 0, \\ \psi & \text{при } x = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь γ_1, γ_2 – числа, а ψ – заданное число. Если $\gamma_1 = 0$, то имеем первую краевую задачу, если $\gamma_2 = 0$ – вторую, а при $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$ третью.

Для уточнения решения, полученного из модели, а также для выяснения погрешности этого решения применяются различные варианты метода возмущения, и им посвящена обширная литература [1-3]. Удачный выбор модели для невозмущенного и возмущенного решения позволяет во многих обстоятельствах, даже при действии начального приближения, получить решение с допустимой точностью при относительно незначительной себестоимости исследования.

Пусть нас интересуют колебания, описываемые уравнением (1), при заданных краевых условиях (2). Может показаться, что надо просто выбросить первый член в уравнении (1), то есть перейти к уравнению

$$q(x)v(x) + f(x) = 0 \quad (3)$$

Но ведь произвольно заданные условия (2) могут не удовлетворять уравнению (3) при $x = 0$ или $x = l$. Если невозмущенное уравнение (3) при $x = 0$ или $x = l$ противоречит условиям (2), то это означает, что сила инерции в этот момент отлична от нуля, то есть в так называемом релаксационном этапе движения пренебрегать первым членом в уравнении (1) нельзя.

Задачи, при решении которых применяется прием малого аргумента, бывают двух типов. В задачах начального типа малый аргумент включается в самую их постановку, и цель исследования состоит в выяснении влияния этого параметра на решение; метод приводит к асимптотическим формулам, из которых видно это влияние [4-8].

Задачи второго типа, в которых применяется метод малого параметра, в своей постановке такого параметра не содержат, и его приходится ввести, чтобы можно было применить данный метод. Для этого надо сначала «организовать» нулевое приближение, то есть постараться так видоизменить задачу, по возможности мало, чтобы ее решение можно было найти легко или сравнительно легко. После этого в видоизмененную задачу так ввести параметр, например ε , чтобы при $\varepsilon = 0$ получилась видоизмененная задача, а при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon_0$ – исходная. Затем надо решение задачи, включающее ε , разложить по степеням этого параметра, после чего в полученном решении положить $\varepsilon = \varepsilon_0$. Если эту программу удастся осуществить, то при благоприятном стечении обстоятельств мы получаем в итоге решение исходной задачи [9-13].

Для дифференциального уравнения, включающего некоторый параметр при старшей производной, вырождением обычно называют понижение порядка этого уравнения. Пример такого вырождения, это уравнение (3), полученное из уравнения (1) при $\varepsilon = 0$. Видно, что для сингулярно-возмущенного уравнения возникает кратковременный этап релаксации, на протяжении которого значение $u(x, \varepsilon)$ существенно изменяется. Продолжительность этого этапа пропорционально ε , а изменение $u(x, \varepsilon)$ на нем идет по некоторому закону, «крутизна» которого обратно пропорциональна значению ε . При построении такой зависимости (во всяком случае, ее главной части) в мало меняющейся на релаксационном этапе правой части уравнения решение $u(x, \varepsilon)$ можно «заморозить», заменив их соответствующими значениями при $x = 0$.

Если в уравнение входит малый параметр ε и при $\varepsilon = 0$, он вырождается, понижая порядок на единицу, но при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение сингулярно-возмущенной задачи остается конечным в некотором интервале (c, d) , то вблизи точек a и b могут возникнуть зоны, ширина которых имеет порядок ε и на которых решение или его производные изменяются по

описанному выше «крутому» закону: вне этих зон решение возмущенной задачи близко к решению вырожденного уравнения. Поэтому представляет интерес нахождение приближенно аналитического решения граничных задач сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения как в зонах пограничного слоя, так и вне этих зон, а также методы выяснения того, что действительно ли решение возмущенной задачи остаётся конечным, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, если это не ясно из физических соображений.

Теперь рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (1) с предельными условиями:

$$u(0, \varepsilon) = |u(0)|, \quad u(l, \varepsilon) = \psi \quad (4)$$

Если положить $\varepsilon = 0$, то есть отбросить возмущение, то получим уравнение (3) с условиями:

$$v(0) = \frac{f(0)}{q(0)}, \quad (q(0) \neq 0); \quad v(l) = \frac{f(l)}{q(l)}, \quad (q(l) \neq 0) \quad (5)$$

Видно, что порядок невозмущенного уравнения на единицу меньше, чем порядок возмущенного дифференциального уравнения. Это означает, что любое дифференциальное уравнение лишь приближенно описывает процесс развития. Поэтому учет каких-то факторов, влияние которых на исследуемый процесс подразумевается «малым», сводится к анализу зависимости решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений от малых параметров. В модельной постановке прикладных задач всегда возникает проблема действия решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (1)-(2) при значениях коэффициентов, характеризуемых «малыми» параметрами. Изучение решения задачи с малым параметром в силу ее прикладной важности (приложение теории этих уравнений в гидро- и аэродинамике, нелинейной механике, химической и биологической кинетике, экологии, теории оболочек и многих других областях) стало одним из важных направлений в области дифференциальных уравнений и математической физики (см. [1, 2, 6, 14]).

В [15] анализировался вопрос нахождения доверенных аналитических решений начальных задач сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений, которые близки к решению задачи Коши для невозмущенного уравнения. Поэтому, согласно этому анализу, представляет интерес нахождение приближенного аналитического решения задачи (1) - (2), которое близко к решению задачи (3) - (2).

2. Метод построения приближенно-аналитического решения

Будем исходить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^\mu \frac{du}{dx} = \omega - \vartheta_1 u, \\ \frac{\varepsilon^2}{x^\mu} \frac{d\omega}{dx} = f(x) - \vartheta_2 \omega, \end{cases} \quad (6)$$

где $u = u(x, \varepsilon)$, $\omega = \omega(x, \varepsilon)$, $\vartheta_1 = \frac{x^\mu}{\varepsilon} \sqrt{q(x)}$ и $\vartheta_2 = -\frac{\varepsilon}{x^\mu} \sqrt{q(x)}$ – число компонентов, характеризующих коэффициенты уравнения (1).

Рассмотрим состояние равновесия и устойчивость системы. Приравняв левые части уравнений (6) к нулю, получим:

$$\begin{cases} \omega - \vartheta_1 u = 0, \\ f(x) - \vartheta_2 \omega = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Решение системы уравнений (7) позволяет определить особую точку в фазовой плоскости (u, ω) . В зависимости от значения функции $f(x)$ можно иметь бесконечное число

равновесных состояний, то есть уравнения (7) могут иметь бесконечное множество решений, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Однако часто бывает невозможным найти аналитическое решение системы уравнений (6). В этих случаях применяются известные методы из теории дифференциальных уравнений, которые позволяют, не решая в явном виде уравнения (6), определить характер стационарного состояния, устойчивость или неустойчивость её решения. При этом используются некоторые свойства правых частей уравнений (6), а также особенности переходных процессов вблизи стационарного состояния $f(x)$. Следовательно, состояние равновесия является особой точкой, в которой плотность теплового потока сливается с потоком энергии [17], то есть

$$-\lambda \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x^*} = \omega(x^*) \quad (8)$$

где $u = u(x^*)$ – температура в точке x^* , (K или C), $\omega = \omega(x^*)$ – теплового потока, λ – коэффициента теплопроводности конденсированных сред. Подчеркнем, что такого рода общие характеристики сложных систем уравнений представляют, как правило, наибольший интерес.

Сложная система может обладать несколькими стационарными состояниями, что соответствует существованию нескольких корней в алгебраических уравнениях (7) для определения координат стационарной точки. В случае одной переменной кривая пересекает ось абсцисс в нескольких точках, в каждой из которых функция $f(x)$ обращается в нуль. Любая из этих точек \bar{x}_1, \bar{x}_2 и другие, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль, являются состоянием равновесия. В зависимости от значений тех или иных параметров системы или констант, а также теплового потока изменяется состояние равновесия, и, кроме того, в системе могут реализоваться различные стационарные структуры.

При дальнейшем нагреве вещества плотность теплового потока изменяется в пространстве. Поэтому для исследования характера изменения величины ω в пространстве с температурой определим, используя уравнения (6), отношение $\frac{d\omega}{du}$:

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{x^\mu f(x) + \varepsilon \sqrt{q(x)} \omega}{\varepsilon \omega - x^\mu \sqrt{q(x)} u} = F(u, \omega) \quad (9)$$

Обозначение правой части (9) через $F(u, \omega)$ значит, что нас интересует характер и число состояний равновесия в системе в зависимости от величины ω .

Стационарные точки $\omega = \bar{\omega}$ определяются из уравнения:

$$F(u, \omega) = 0 \text{ или } x^\mu f(x) + \varepsilon \sqrt{q(x)} \omega = 0. \quad (10)$$

Используя уравнение (9), проследим, как будет двигаться изображающая точка по интегральным кривым на фазовой плоскости. Так как ω представляет $\varepsilon \omega > x^\mu \sqrt{q(x)} u$, то в этом случае в верхней фазовой полуплоскости изображающая точка движется так, что ω возрастает, а при $\varepsilon \omega < x^\mu \sqrt{q(x)} u$ в нижней полуплоскости она уменьшается. Таким путем определяется направление движения температуры по фазовым траекториям.

Из уравнения (10) непосредственно вытекает уже отмеченное нами обстоятельство, что во всякой точке фазовой плоскости изображающая точка имеет конечную и отличную от нуля скорость, за исключением состояний равновесия, в которых

$$x^\mu f(x) = -\varepsilon \sqrt{q(x)} \omega \text{ и } \varepsilon \omega = x^\mu \sqrt{q(x)} u.$$

В силу этих условий все состояния равновесия расположены в фазовой плоскости на оси x , причем их абсциссы удовлетворяют уравнению

$$x^\mu f(x) = -\varepsilon \sqrt{q(x)} \omega.$$

Предположим, что на фазовой плоскости задана точка (ω_0, u_0) . Спрашивается, можно ли всегда найти интегральную кривую, которая проходила бы через заданную точку и будет ли такая кривая единственной? Уравнение (6) определяет в каждой точке фазовой структуры единственное направление касательной, за исключением состояния равновесия, где $x^\mu f(x) = -\varepsilon \sqrt{q(x)} \omega$ и $\varepsilon \omega = x^\mu \sqrt{q(x)} u$.

Теперь, дифференцируя уравнение (8) по температуре, будем искать экстремум функции:

$$\frac{dF}{du} = - \frac{(x^\mu f(x) + \varepsilon \sqrt{q(x)} \omega) x^\mu \sqrt{q(x)}}{(\varepsilon \omega - x^\mu \sqrt{q(x)} u)^2}. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что условие $\varepsilon \omega = x^\mu \sqrt{q(x)} u$ есть геометрическое место точек на фазовой траектории, где критерий Коши нарушен.

Далее рассмотрим характер изменения u в зависимости от изменения значения теплового потока ω . Тогда из дифференциального уравнения (6) получим:

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{\varepsilon \omega - x^\mu \sqrt{q(x)} u}{x^\mu f(x) + \varepsilon \sqrt{q(x)} \omega} = G(\omega, u). \quad (12)$$

Причем $\frac{dG}{d\omega} = - \frac{(\varepsilon \omega - x^\mu \sqrt{q(x)} u) \varepsilon \sqrt{q(x)}}{(x^\mu f(x) + \varepsilon \sqrt{q(x)} \omega)^2}$. Условие $x^\mu f(x) = -\varepsilon \sqrt{q(x)} \omega$ приводит к нарушению критерия непрерывности, и, следовательно, для этого уравнения критерий Коши не выполняется.

Таким образом, дифференциальные уравнения (9) и (12) с разных точек зрения дают различные результаты. Эти результаты отнюдь не противоречивы, так как критерий Коши является только достаточным, но не необходимым условием единственности решения. Следовательно, можно утверждать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая, за исключением, может быть, точек, где одновременно выполняются следующие условия:

$$x^\mu f(x) = -\varepsilon \sqrt{q(x)} \omega \text{ и } \varepsilon \omega = x^\mu \sqrt{q(x)} u.$$

Теперь исследуем кривые на фазовой плоскости (ω, u) , в которых касательные к фазовым траекториям имеют один и тот же наклон. Если динамическая система описывается уравнением (9), касательные к фазовым траекториям определяются выражением

$$\frac{x^\mu f(x) + \varepsilon \sqrt{q(x)} \omega}{\varepsilon \omega - x^\mu \sqrt{q(x)} u} = k. \quad (13)$$

где k – constant. Придавая k различные значения, получаем семейство касательных к фазовой траектории. На фазовой плоскости построим определенное число касательных, необходимых для построения фазовой траектории. Чем ближе друг к другу расположены касательные, тем точнее можно будет провести фазовую траекторию.

Уравнение касательной к фазовой траектории можно получить из выражения (13):

$$\omega = \frac{x^\mu (f(x) + k \sqrt{q(x)} u)}{\varepsilon (k - \sqrt{q(x)})}, \text{ при } \varepsilon \neq 0, \sqrt{q(x)} \neq k. \quad (14)$$

3. Численный расчёт зависимости теплового потока от температуры

Для наглядной интерпретации полученных результатов, используя выражение (13), проведем численный расчёт зависимости ω от u . При проведении численных расчётов функцию $f(x), q(x)$ и параметры принимаем в следующем виде: $q(x) = 1, f(x) = 4, \varepsilon = 0.01 (0,015; 0,020), \mu \geq 0(0;1;2)$ взяты из работ [16, 17]. Результаты численного расчета при различных значениях числа k представлены на рис. 1.

Как видно из рис.1, при $k = -2$ кривые пересекаются, координаты этой точки (0, 2). Для данного частного случая $u=2$ формула (8) справедлива в интервале (-200К, 200К) с точностью до 2-3%. Функция $f(x)$ является функцией источника и при температуре горения порядка 200К пересекается с функцией ω в виде (13), а при дальнейшем возрастании температуры она остается неизменной.

Функция ω вида (13) в зависимости от изменения температуры при различных значениях число k либо возрастает, либо уменьшается. Если функция ω вида (13) с увеличением температуры возрастает, то в горячей среде возможен взрыв, если ω вида (13) с ростом температуры уменьшается, то в среде возможно прекращение горения.

Теперь найдем критическое условие для температуры горения или взрыва среды. Для этого подставим значение ω в виде (14) во второе уравнение системы (6) и получим:

$$u(x, \varepsilon, \mu) = \frac{f(x) \left[\varepsilon \mu (k - \sqrt{g(x)}) - x (k^2 - \varepsilon (\sqrt{g(x)})') \right]}{k \mu \sqrt{g(x)} (1 - \sqrt{g(x)}) - x (k^2 g(x) - \varepsilon (\sqrt{g(x)})')}. \quad (15)$$

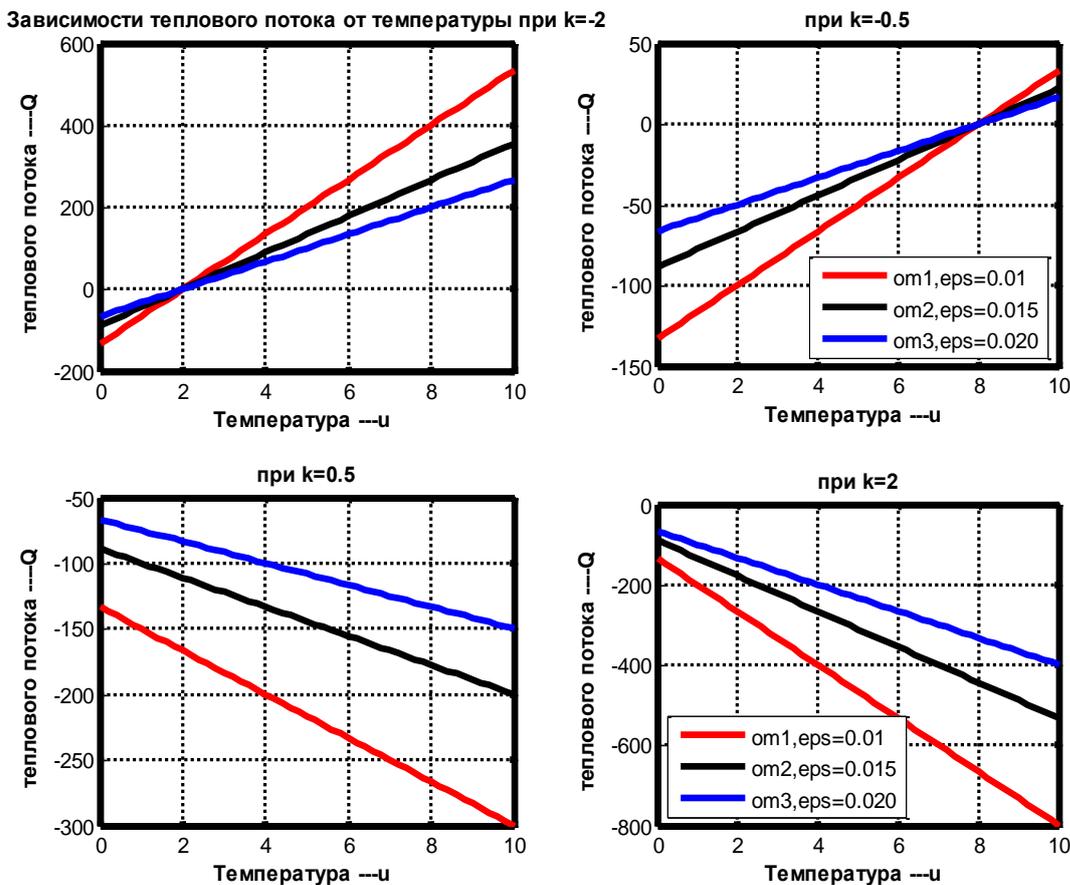


Рисунок 1 – Температурная зависимость теплового потока при разных значениях числа ε

Из условия (8) касания обеих кривых при температуре u^* (температура особой точки) следуют равенства самих функций и их первых производных.

Применяя эти условия к выражению (15), определим зависимости функции температуры u от значения координат x при различных значениях параметров: $q(x) = 1$, $f(x) = 4$, $\varepsilon = 0.01$ (0,015; 0,020), $\mu \geq 0$ (0; 1; 2). Численные расчёты представлены на рис. 2. При проведении численных расчетов были использованы данные работ [16, 17].

Как видно из рис.2, графики иллюстрируют наличие двух пограничных слоев и качественное совпадение с литературными данными [18].

4. Выводы

Таким образом, проведенный анализ сингулярно-возмущенных уравнений стационарной теплопроводности, близкий к решению задачи для невозмущенного уравнения, показал, что сформулированный алгоритм и расчёты на его основе могут быть использованы для исследования полей и связанных полей температуры и теплового потока, концентрации и других задач.

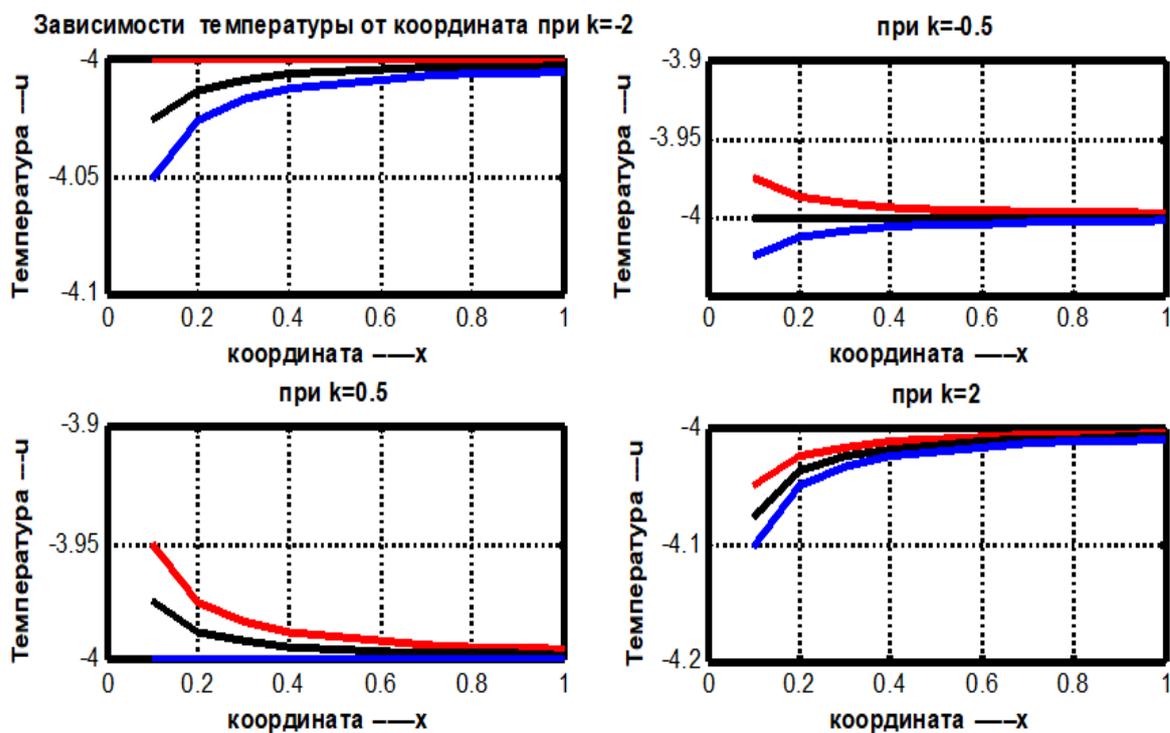


Рисунок 2 – Зависимости функций u от значений координат и числа ε

В заключение отметим, что предложенное модельное исследование схемы решения сингулярно-возмущенных уравнений стационарной теплопроводности, которое близко к решению задачи для невозмущенного уравнения, позволило исследовать изменение потока тепла и температуры в широком интервале температур и является более общим методом по сравнению с другими методами.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно-возмущенные уравнения в критических случаях. – М.:Изд-во МГУ, 1978. –108 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. –М.: Наука, 1974. – 410 с.
3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. –227 с.
4. Бутузов В.Ф. Сингулярные возмущения. // Математика, кибернетика. –1988. –№1. –50 с.
5. Джакаля Г.Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 455 с.
6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
7. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Начала. К.1.Ч.1. –Киев: Освіта України,2012. – 602 с.
8. Пененко В. В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985. –209 с.
9. Алиев Б., Джураев Х.Ш. О корнях сингулярно- возмущенных алгебраических уравнений /Б. Алиев, Х.Ш. Джураев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2004. –Т. 47, №4. – С.92–98.
10. Крутов Ю.М. Моделирование горения пылевидной коксовой частицы в присутствии водяного пара / Ю.М. Крутов, Д.В. Решетняк, И.И.Токарев // Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2013. – №5(111). – С.47–57.
11. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
12. Латтес Р. Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир,1970. – 507 с.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. –288 с.
14. Джураева Г.Х. Исследование математических моделей и соответствующих краевых задач с сингулярными коэффициентами: Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – 2019. – 26 с.
15. Джураев Х.Ш. О решениях задачи Коши для сингулярно - возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами / Х.Ш. Джураев // Матер. I I Между.- науч. кон. «Перспективы развития науки и образования в XXI веке», часть 2. –Душанбе: ТТУ им. акад. М.С. Осими, 2006 г. – С.21–23.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616с.
17. Джураев Х.Ш. Модельное исследование и оптимизация явлений переноса энергии и массы в конденсированных средах: Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – 2019. – 40 с.
18. Скляр С.Н., Бакиров Ж.Ж. Проекционный метод построения разностных схем для задач с пограничными слоями // Известия НАН Кыргызской Республики. Эхо науки, 1997. – №2–3. –С.36–47.