

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

---

УДК 537.527

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИНТОВОЙ ФОРМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СЕТОЧНОГО ШАГА

*И.Р. Урусова<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., [moon4ik\\_29@mail.ru](mailto:moon4ik_29@mail.ru)*

*Т.Э. Урусова<sup>2</sup>, д.ф.-м.н., [urusova\\_tolkun@mail.ru](mailto:urusova_tolkun@mail.ru)*

*Э.М. Бакирова<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., [elizabetha\\_83@mail.ru](mailto:elizabetha_83@mail.ru)*

*А.Н. Сапаралиева<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., [saparalieva1980@mail.ru](mailto:saparalieva1980@mail.ru)*

<sup>1</sup>*Институт фундаментальных наук при КНУ им. Ж.Баласагына,  
Бишкек, Кыргызстан*

<sup>2</sup>*Высшая аттестационная комиссия Кыргызской Республики  
Бишкек, Кыргызстан*

Выполнены расчёты открытой электрической дуги в однородном внешнем аксиальном магнитном поле при различных значениях сеточного шага  $\Delta = 0,1$  и  $0,2$  мм. Установлено, что численная реализация винтовой формы дуги не зависит от величины сеточного шага и формируется в результате воздействия схемного аналога флуктуаций.

*Ключевые слова:* винтовая форма электрической дуги; численное моделирование, влияние сеточного шага.

**Введение.** Электрическая дуга во внешнем магнитном поле широко используется в научных исследованиях и технологических процессах [1–3]. Из опыта известно, что в однородном внешнем аксиальном магнитном поле (ВАМП) протяженная электрическая дуга может терять цилиндрическую устойчивость и принимать винтовую пространственную форму [4–6]. Такие режимы горения дуги во внешнем аксиальном магнитном поле имеют прикладное значение и вызывают научный интерес [7–10]. В частности, в теоретических работах [11–14] в рамках нестационарной трехмерной математической модели в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы предложен алгоритм численной реализации винтовой формы электрической дуги. Указанный алгоритм основан на применении в итерационном процессе схемного аналога флуктуаций температуры электронов.

Вместе с тем известно, что численные методы обладают рядом особенностей по сравнению с аналитическими методами решения дифференциальных уравнений. Так, например, результаты расчета могут зависеть от величины сеточного шага [15–18].

В этой связи необходимо провести тестирование алгоритма и исследовать влияние сеточного шага на формирование винтовой формы электрической дуги.

В настоящей работе приведены результаты тестирования алгоритма [11–14] при значениях сеточного шага  $\Delta = 0,2$  и  $0,1$  мм. Следует показать, что винтовая форма дуги может быть получена не только при значении  $\Delta=0,5$  мм [11–14], но и при меньших

значениях  $\Delta=0,1$  и  $0,2$  мм. При этом не обязательно решать одну и ту же краевую задачу с одинаковыми внешними параметрами. Важен сам факт численной реализации винтовой формы дуги при значениях  $\Delta=0,2$  мм и  $\Delta=0,1$  мм.

**Математическая модель и метод численного решения уравнений. Граничные условия.** Рассматривается открытая электрическая дуга постоянной силы тока  $I$ , межэлектродным расстоянием  $L$ , горящая в аргоне при давлении 1 атм. На дугу накладывается внешнее однородное аксиальное магнитное поле  $H^{Ext}$ .

Нестационарная трехмерная система МГД-уравнений электрической дуги в приближении модели частичного локального термодинамического равновесия плазмы может быть записана следующими уравнениями [2, 11]:

уравнение непрерывности газа тяжелых частиц

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

уравнение непрерывности газа электронов

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div}(N_e \mathbf{V}_e) = R_e, \quad (2)$$

уравнение баланса энергии газа электронов

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} k T_e N_e \right) + \text{div} \left( \frac{5}{2} k T_e N_e \mathbf{V}_e \right) = \text{div}(\lambda_e \text{grad} T_e) + \mathbf{j}^2 / \sigma - \psi - B(T_e - T) - U_i R_e, \quad (3)$$

уравнение баланса энергии газа тяжелых частиц

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} k T (N_i + N_a) + \text{div} \left( \frac{5}{2} k T (N_i + N_a) \mathbf{V} \right) = [\text{div}(\lambda \text{grad} T) + B(T_e - T)], \quad (4)$$

уравнение баланса импульса газа вдоль осей координат  $x, y, z$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V} u) = \text{div}(\mu \text{grad} u) - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_x + s_x + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V} v) = \text{div}(\mu \text{grad} v) - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_y + s_y, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V} w) = \text{div}(\mu \text{grad} w) - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_z + s_z, \quad (7)$$

уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

закон Ома в обобщенной форме

$$\mu_0 (\mathbf{V}_e \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} = \mathbf{j} / \sigma + (\mu_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) - \text{grad } P_e) / q_e N_e, \quad (9)$$

закон Дальтона

$$P / k T = N_i + N_a + N_e T_e / T. \quad (10)$$

Принято, что дуговая плазма аргона атмосферного давления является однократно ионизованной, квазинейтральной, течение ламинарное, дозвуковое, излучение объемное; вязкой диссипацией энергии пренебрегается, приэлектродные процессы не рассматриваются. В уравнениях (1–10) использованы общепринятые обозначения.

Электромагнитная часть задачи решается в переменных  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ , где  $\varphi$  – скалярный потенциал электрического поля  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал магнитного поля, связанный с  $\mathbf{H}$  соотношением  $\text{rot}\mathbf{A}=\mathbf{H}$ .

Коэффициенты переноса и теплофизические свойства неравновесной аргоновой плазмы рассчитываются в соответствии с методикой [2].

Систему уравнений (1–10) путём преобразований можно представить в виде обобщенного дифференциального уравнения [17]. Численное решение обобщенного уравнения проводим методом контрольного объема на основе конечных разностей. Используется неявная разностная схема, динамические переменные (скорость и давление) рассчитываются по алгоритму SIMPLE'R [17]. Полученная система алгебраических уравнений решена итерационным методом Зейделя–Гаусса.

Для рассчитываемых переменных граничные условия являются аналогичными [13, 14] и задаются по периметру прямоугольной расчетной области, показанной на рисунке 1. Начальные условия задаются в некоторый условный момент времени  $t = 0$ .

На внешних границах  $ABCD$ ,  $EFGH$ ,  $DHGC$ ,  $AEFB$ ,  $AEHD$  и  $BFGC$  расчетной области значения температуры и концентрации электронов равны значениям температуры  $T_e^{\min}$  и концентрации  $N_e^{\min}$  «холодного» не ионизованного газа:  $T_e = T_e^{\min} = 3$  кК,  $N_e = N_e^{\min} = 10^{17}$  м<sup>-3</sup>. Температура тяжелых частиц принята равной температуре холодного газа  $T = 300$  К. При отсутствии электрического тока потенциал электрического поля  $\varphi$  рассчитывается из условия  $\partial\varphi/\partial\mathbf{n} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности границы. Отметим, что в математической модели направлением электрического тока является направление движения электронов от катода к аноду.

На внешней токоведущей торцевой поверхности катода  $S_c$  и анода  $S_a$  потенциал электрического поля  $\varphi$  рассчитывается из условия протекания электрического тока  $I$  по нормали к поверхности. Такое же условие используется для  $\varphi$  на границе «катод–плазма». Вне катода и анода электрический ток отсутствует.

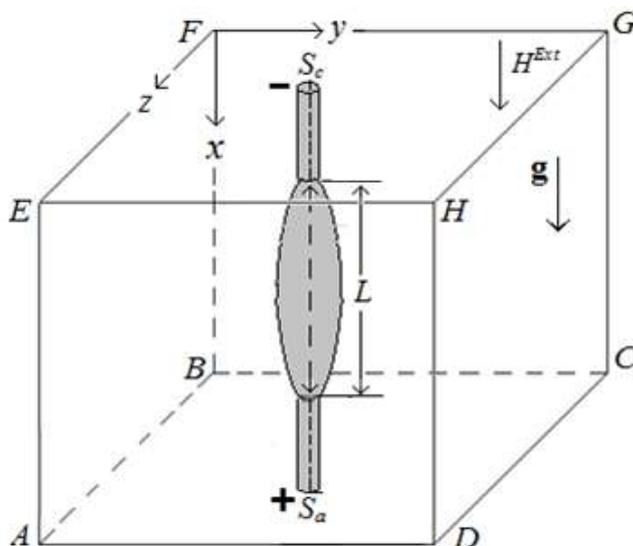


Рис. 1. Схема расчетной области в декартовых координатах  $(x, y, z)$ .

Пунктирная линия - - - центральная ось дуги.

Компоненты векторного потенциала  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  магнитного поля определяются из условия равенства нулю первой производной  $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{n} = 0$  по нормали к границе.

Давление  $P$  полагается равным относительному значению  $P = 1$  Па. Компоненты скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  определяются из условия равенства нулю  $\partial^2 \mathbf{V} / \partial \mathbf{n}^2 = 0$ .

В начальный момент между электродами задаётся высокотемпературная ( $T = 9$  кК) зона с неподвижным газом в форме цилиндра.

Как отмечалось выше, для численного моделирования винтовой формы дуги во внешнем аксиальном магнитном поле в вычислительный алгоритм дополнительно вводится схемный аналог флуктуаций температуры электронов. Схемный аналог флуктуаций является искусственным приемом, который генерирует случайным образом асимметрию распределения температуры электронов. Как следствие, возникает асимметрия распределения других характеристик дуги.

Сущность схемного аналога флуктуаций состоит в следующем. Рассмотрим фрагмент разностной сетки, который показан на рисунке 2. Пусть в процессе вычислений в какой-либо узловой точке с индексами  $(i, j, k)$  температура электронов  $T_e$  оказывается меньше температуры электропроводности плазмы  $T_\sigma$ , т.е. выполняется условие  $T_e < T_\sigma$ . Тогда в этом случае температура электронов в данной узловой точке  $(i, j, k)$  и прилегающих к ней четырех соседних узловых точках с индексами  $(i, j-1, k)$ ;  $(i, j+1, k)$ ;  $(i, j, k-1)$ ;  $(i, j, k+1)$  приравнивается минимальному значению  $T_e = T_e^{\min}$ . В противном случае при выполнении условия  $T_e \geq T_\sigma$  вновь рассчитанное значение  $T_e$  в узловой точке с индексами  $(i, j, k)$  сохраняется неизменным. Проверка проводится только для узловых точек в плоскости  $y-z$ . В аксиальном направлении по оси  $x(i)$  проверка указанного выше условия не проводится.

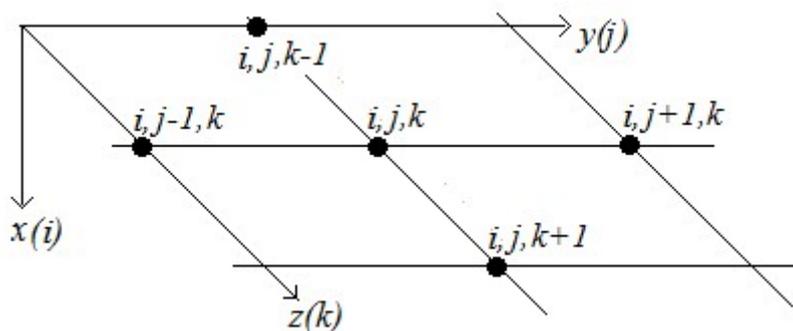


Рис. 2. Фрагмент разностной сетки в направлениях осей координат  $y(j)$  и  $z(k)$

Численное значение  $T_\sigma$  задается близким к реальному значению для плазмы аргона атмосферного давления и принято равным  $T_\sigma = 3,5$  кК (см. [2]).

Таким образом, для каждой узловой точки схемный аналог флуктуаций температуры электронов дуговой плазмы определяется следующими условиями:

$$\begin{cases} \text{если } T_e < T_\sigma & \text{тогда } T_e = T_e^{\min} \\ \text{если } T_e \geq T_\sigma & \text{тогда } T_e = T_e \end{cases} \quad (11)$$

Условия (11) проверяются на каждой итерации на протяжении всего численного расчета. Физический смысл схемного аналога флуктуаций является достаточно ясным: вблизи токопроводящей границы дуги в отдельных узловых точках расчетной области

случайным образом температура электронов уменьшается на величину  $\Delta T = T_\sigma - T_e^{\min} = 0,5$  кК. Детальное описание схемного аналога флуктуаций приведено в [11–14].

**Анализ результатов расчета. Сеточный шаг  $\Delta = 0,2$  мм.** Выполнен расчет открытой электрической дуги силой тока  $I = 20$  А и межэлектродным расстоянием  $L = 20$  мм, горящей в однородном внешнем аксиальном магнитном поле с  $H^{Ext} = 15$  кА/м (рис.1). Дуга горит между электродами из графита с торцевой токоведущей поверхностью диаметром  $d = 0,4$  мм. Сеточный шаг по координатам  $(x, y, z)$  одинаковый и равен  $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,2$  мм, временной шаг равен  $\tau = 10^{-4}$  с.

С начала процесса вычислений до выхода расчетных характеристик дуги на стационарное распределение к моменту времени  $t = 25$  мс численный расчет выполняется без внешнего магнитного поля, т.е. принято  $H^{Ext} = 0$ . Затем, начиная с момента времени  $t = 25$  мс задается внешнее аксиальное магнитное поле величиной  $H^{Ext} = 15$  кА/м. На рисунке 3 показана эволюция пространственной формы столба дуги на начальном интервале времени  $\Delta t = 27 \div 30$  мс при наложении ВАМП. Видно, что уже через несколько секунд столб дуги теряет устойчивость и принимает винтовую форму.

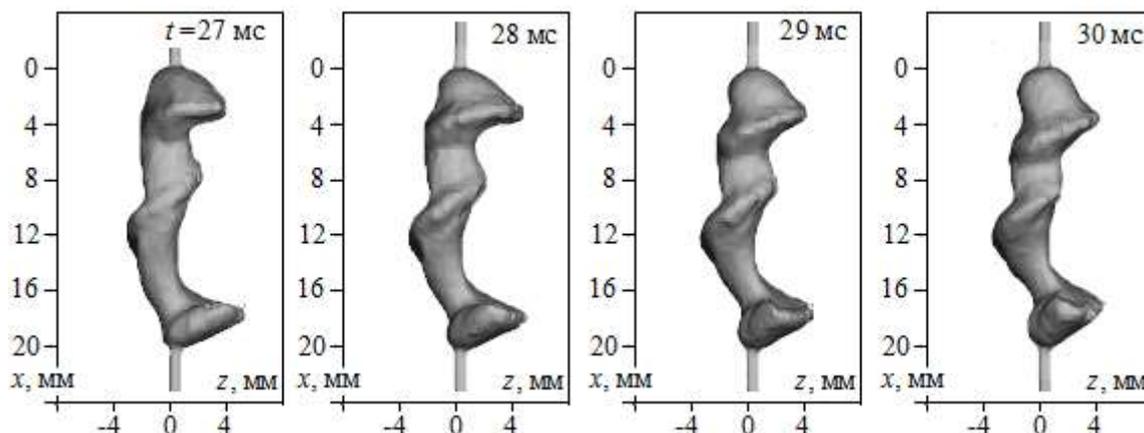


Рис. 3. Эволюция формы столба дуги на интервале времени  $\Delta t = 27 \div 30$  мс.

$$\Delta = 0.2 \text{ мм}, L = 20 \text{ мм}, I = 20 \text{ А}, H^{Ext} = 15 \text{ кА/м}$$

**Сеточный шаг  $\Delta = 0,1$  мм.** Выполнен расчет открытой электрической дуги во внешнем аксиальном магнитном поле при значении сеточного шага  $\Delta = 0.1$  мм и внешних параметрах разряда  $I = 15$  А,  $L = 10$  мм,  $H^{Ext} = 15$  кА/м. Дуга горит между графитовыми электродами диаметром  $d = 0,4$  мм с торцевой токоведущей поверхностью. На рисунке 4 приведена расчётная эволюция пространственной формы столба дуги на интервале времени  $\Delta t = 50 \div 53$  мс. Численное решение показывает, что при значении сеточного шага  $\Delta = 0.1$  мм столб дуги также теряет устойчивость и принимает винтовую форму.

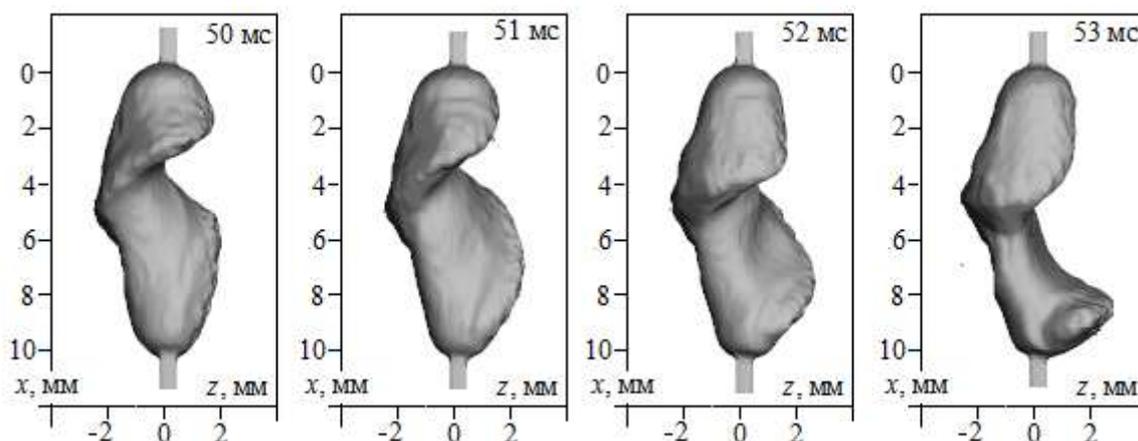


Рис. 4. Эволюция формы столба дуги на интервале времени  $\Delta t = 50 \div 53$  мс.

$$\Delta = 0.1 \text{ мм}, L = 10 \text{ мм}, I = 15 \text{ А}, H^{Ext} = 15 \text{ кА/м}$$

**Заключение.** Выполнен расчёт открытой электрической дуги во внешнем аксиальном магнитном поле при различных значениях сеточного шага  $\Delta = 0,1$  и  $0,2$  мм. Для обоих значений сеточного шага  $\Delta = 0,1$  и  $0,2$  мм численно реализована винтовая форма электрической дуги. Установлено, что численная реализация винтовой формы дуги не зависит от величины сеточного шага. Винтовая форма дуги формируется в результате воздействия именно схемного аналога флуктуаций температуры электронов дуговой плазмы.

### Список литературы

1. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. – М.: Иностран. лит., 1961. – 370 с.
2. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др. Низкотемпературная плазма. –Т.1.– Теория столба электрической дуги. – Новосибирск: Наука, 1990. – 374 с.
3. Лебедев А.Д., Урюков Б.А., Энгельшт В.С. и др. Низкотемпературная плазма. Т. 7. Сильноточный дуговой разряд в магнитном поле. – Новосибирск: Наука, 1992. – 267 с.
4. Новиков О.Я. Устойчивость электрической дуги. – Л.: Энергия, 1978. – 160 с.
5. Недоспасов А.В. Токово-конвективная неустойчивость газоразрядной плазмы // УФН. This game requires at least Shader Model 3.0 . – 1975. – N.16. – №4. – С.643– 661.
6. Ментель Ю. Магнитная неустойчивость электрической дуги // Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1977. – 182 с.
7. Асиновский Э.И., Кузьмин А.К., Пахомов Е.П. Измерение геометрических параметров винтовой дуги // ТВТ. – 1980. – Т. 18. № 1. – С. 9–18.
8. Синкевич О.А. Нелинейная теория винтовой неустойчивости электрической дуги во внешнем магнитном поле // ДАН. 1985. – Т. 280. – № 1. – С. 99–101.
9. Sinkevich O.A. Instabilities, waves, and nonequilibrium structures in a dense low-frequency plasma, High Temperature, 2013. – V. 51. № 3. – P. 306.
10. Глинов А. П., Головин А. П., Шалеев К. В. Влияние внешнего магнитного поля на устойчивость протяженного дугового разряда и формирование многоканальных токовых структур // Прикладная физика. – 2018. – № 2.– С. 21– 28.

11. Урусов Р.М., Урусова И.Р. Численное моделирование винтовой формы электрической дуги во внешнем аксиальном магнитном поле // Теплофизика высоких температур. – 2017. – Т. 55. – № 5. – С. 661– 668.
12. I.R. Urusova, T.E Urusova «Evolution of space open electric arc burning in the external axial magnetic field», *Physics of Plasmas* 25, 063511 (2018).
13. Урусов Р.М., Урусова И.Р. О механизмах формирования винтовой формы электрической дуги во внешнем аксиальном магнитном поле // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57.– № 3. – С. 328– 337.
14. R. M. Urusov and I. R. Urusova Shunting the electric arc helical spiral turns (numerical simulation) // *Phys. Plasmas* 27, 103510 (2020).
15. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир,1980. – 616 с.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: 1983. – 616 с.
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 146 с.
18. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепломассообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
19. Урусова И.Р. Численный эксперимент шунтирования витков спирали электрической дуги винтовой формы // Проблемы автоматки и управления. – 2019. – № 1 (36). – С. 72– 76.