УДК 519.633.550.34

Курманалиева Г.С., Сатыбаев А.Дж. **gulzat-kurmanalieva@mail.ru, abdu-satybaev@mail.ru**
Ошский технологический университет, Кыргызстан

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЕЙСТВИЙ ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

В данной статье исследована обобщенная обратная задача процесса распространения импульса по аксону, которая является задачей параболического типа. Эта задача с помощью преобразования Лапласа сведена к обобщенной обратной задаче гиперболического типа, и к этой задаче применены методы выделения особенностей и характеристик. В этом случае получаем регулярную обратную задачу с данными на характеристиках, и к данной задаче применен метод конечно-разностный, и получено приближенное решение обратной задачи. Из этого решения вычислено разностное решение обратной задачи параболического типа, которое сходится к точному решению.

Ключевые слова: одномерная обобщенная; обратная задача; параметры; потенциал действий; распространение; нервное волокно; численный алгоритм; параболическая; преобразование Лапласа; гиперболическая задача; метод характеристики; выделения особенностей; конечно-разностный; сходимость решения.

Введение. Потенциалом покоя называют разность электрических потенциалов мембраны внутренней и наружной части клетки.

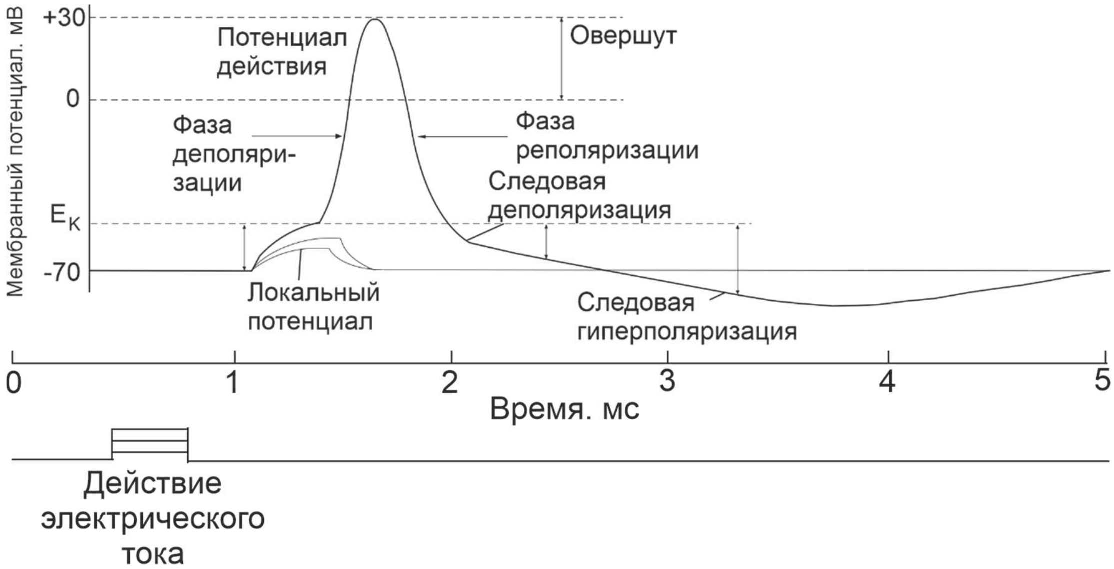
Потенциалом действия называют возбуждение клетки или быстрое колебание мембранного потенциала вследствие диффузии ионов в клетку и из клетки. Нервный импульс (потенциал действия) мембраны имеет следующие фазы: фазы реполяризации, фазы деполяризации, а также фазы гиперполяризации, а пиком, или спайком, называют высокоамплитудную быстропротекающую часть (они наглядно даны в следующем рисунке).

В работе Богатова Н.М. и др. [1] проведен анализ изменения формы потенциала действий при его распространении в нервном волокне и показано, что генерация заряда в нервном волокне обусловливает эффективность длины и уменьшение фазовой скорости распространения сигнала. Установили, что высокая эффективность распространения сигнала в миелиновых нервных волокнах достигается в результате сальтаторного механизма распространения.

Решение задачи распространения потенциала действий по нервному волокну для возбуждающего импульса произвольной формы дана в коллективной монографии под руководством профессора Богатова Н.М. [2].

В работе Селезова И.Т., Морозова Л.В. [3] получено точное аналитическое решение обобщенной задачи о распространении нервного волокна в рамках Ходжкина-Хаксли на основе интегрального преобразования Лапласа и теоремы Эфроса в случае, когда начальный импульс отклоняется от ступенчатой функции Хевисайда.

а



б

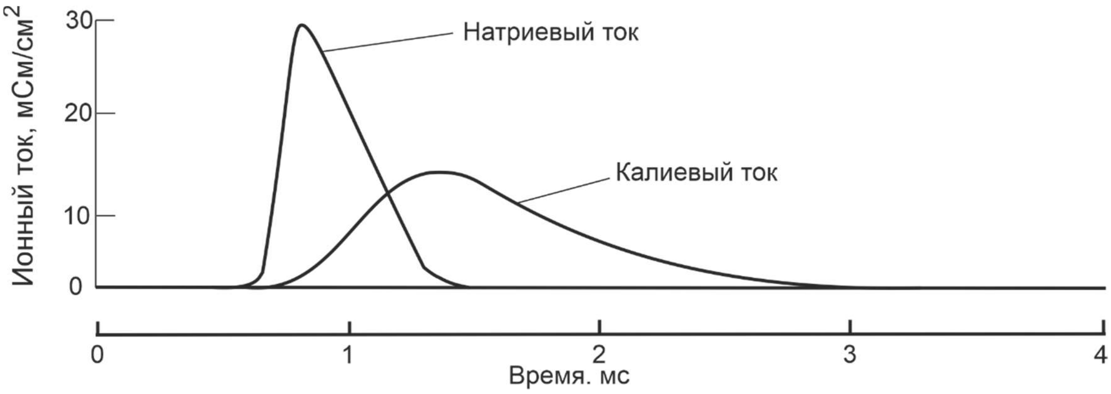


Рисунок 1 – Потенциал действия, его фазы и ионные токи (а, б).

Проведен сравнительный анализ расчетов с результатами, полученными ранее для случая возбуждающей функции Хевисайда, и анализировано влияние отклонения при приближении к решению, соответствующему функции Хевисайда.

При пространственно-однородном возбуждении волокна поведение мембранного потенциала описывается уравнением:

$$C\frac{d\varphi}{dt} = -I,$$

где C – емкость мембраны, I – ионный ток, который определяется формулой:

$$I = g_{Na}(\varphi - \varphi_{NA}) + g_k(g - g_k) + g_e(\varphi - \varphi_e),$$

где $g_{NA} = \bar{g}_{NA} \cdot m^3 h$, $g_K = \bar{g}_K n^4$, $\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1-m) - \beta_m \cdot m$, $\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1-h) - \beta_h \cdot h$, $\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1-n) - \beta_n \cdot n$, g_e – постоянная, $\varphi_k = (kT/e)\ln(C_k^0 / C_k^i)$ – калиевый мембранный по-

тенциал, T – абсолютная температура, e – заряд электрона, k – коэффициент, C_0^k, C_k^i – внешняя и внутренняя калиевая концентрация;
$\varphi_{NA} = (kT/e)\ln\left(C_{NA}^0 / C_{NA}^i\right)$, C_{NA}^0, C_{NA}^i – внешняя и внутренняя натриевая концентрация; m, h, n – параметры.

Распределение мембранного потенциала $j(x,t)$ в немиелинизированном волокне описывается следующим уравнением:

$$C\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - I, \tag{1}$$

где C – емкость мембраны, проходящая на единицу длины волокна, R – сумма продольных сопротивлений на единицу длины волокна, I – ионный ток, протекающий через мембрану волокна единичной длины, и является функционалом от потенциала $j(x,t)$, т.е. зависит от времени t, координата x.

При одновременном прохождении нервного импульса по двум волокнам описывается системой двух уравнений:

$$C_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{R_2 + R_3}{\gamma}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{R_3}{\gamma}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - I_1, \tag{2}$$

$$C_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = -\frac{R_3}{\gamma}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{R_1 + R_3}{\gamma}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - I_2, \tag{3}$$

где R_1, R_2 – продольные сопротивления первого и второго волокон, R_3 – продольное сопротивление внешней среды, $\gamma = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$, I_1, I_2 – ионные токи.

Постановка одномерной обобщенной обратной параболической задачи.

Математическая модель процесса распространения импульса по аксону (по нервному волокну) параболическим уравнением [4, 5] (см. также формулы (1)-(3)):

$$C_m(x)u_t'(x,t) = \frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)}u_{xx}'(x,t) - \frac{u(x,t)}{\rho_m(x)l}, \ (x,t) \in R_+^2, \tag{4}$$

где $C_m(x)$ – емкость на единицу площади мембраны, $r_a(x)$ – радиус нервного волокна, $\rho_m(x)$, $\rho_a(x)$ – удельное сопротивление плазмы и нервного волокна, l – толщина мембраны, $u(x,t)$ – внутриклеточный потенциал действий, индексы a и m – означают индексы аксоны (нервного волокна) и мембраны соответственно.

Для решения прямой задачи уравнения (4) задаем начальное и граничное условие следующего вида:

$$u(x,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \ u_x'(x,t)\big|_{x=0} = h_0\theta(t) + r_0\theta_1(t) + \rho_0\theta_2(t), \ t \in R_+, \tag{5}$$

где h_0, r_0, ρ_0 – заданные положительные числа, $\theta(t)$ – тета-функция Хевисайда, $\theta_1(t) = t\theta(t)$, $\theta_2(t) = \frac{t^2}{2}\theta(t)$.

Начальное условие (5) означает, что нервное волокно до некоторого времени $t=0$ находится в положении покоя, и начиная с времени $t=0$ задается определенное напряжение, и процесс распространения импульса начинается по нервному волокну.

Граничное условие (5) означает, что начиная с времени $t=0$ задается источник напряжение с силами h_0, r_0, ρ_0.

Для определения неизвестных коэффициентов $C_m(x)$ или $r_a(x)$ или $\rho_a(x)$ задаем дополнительную информацию в виде:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = g(t), t \in [0,T] \tag{6}$$

где T – положительное постоянное время.

Одномерная обобщенная обратная задача параболического типа (4) - (6) заключается в определении функций: $C_m(x)$ или $r_a(x)$ или $\rho_a(x)$, а также функцию $u(x,t)$.

Постановка одномерной обобщенной обратной гиперболической задачи

Используя методики С.И. Кабанихина [6] (преобразование Лапласа), из задачи (4) - (5) получим задачу уравнения гиперболического типа:

$$C_m(x)\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = \frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)} V''_{xx}(x,t) - \frac{V(x,t)}{\rho_m(x)l},\ (x,t)\in R_+^2, \tag{7}$$

$$V(x,t)\big|_{t<0} \equiv 0,\ \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h_0\delta(t) + r_0\theta(t) + p_0\theta_1(t),\ t\in R_+, \tag{8}$$

где $\delta(t)$– дельта-функция Дирака, h_0, r_0, p_0– заданные положительные числа. Решение этих задач $u(x,t)$ и $V(x,t)$ связано следующим интегралом

$$u(x,t) = \int_0^\infty V_t(x,\tau) G_t(t,\tau) d\tau = \int_0^\infty V(x,\tau) G_{tt}(t,\tau) d\tau, \tag{9}$$

где $G(t,\tau)$ – функция Грина, $G(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{\tau^2}{4t}}$.

Здесь для определения неизвестных параметров дополнительная информация будет

$$V(x,t)\big|_{x=0} = f(t),\ t\in[0,T], \tag{10}$$

где $f(t) = \int_0^\infty g(\tau) G_{tt}(t,\tau) d\tau$, $G(t,\tau)$– функция Грина.

Одномерная обобщенная обратная гиперболическая задача заключается в определении функции $V(x,t)$, а также неизвестных коэффициентов $C_m(x)$ или $r_a(x)$ или $\rho_a(x)$ из задачи (7), (8), (10).

Пусть относительно параметров уравнения выполнено следующее условие

$$C_m(x),\ r_a(x),\ \rho_a(x) \in \Lambda_0, \tag{11}$$

где $\Lambda_0 = \{C_m(x)\in C^6(R_+),\ (C_m)'_x(0)=0,\ 0<M_1\le C_m(x)\le M_2,\ \|C_m(x)\|_{C^2}\le M_3\}$.

M_1, M_2, M_3– положительно-постоянные.

Обозначим через $\overline{C}^2(x) = \dfrac{r_a(x)}{2C_m(x)\cdot\rho_a(x)}$, тогда уравнение (7) будет

$$V_{tt}''(x,t) = \overline{C}^2(x)V_{xx}''(x,t) - \frac{V(x,t)}{\rho_m(x)C_m(x)\cdot l}, \quad (x,t)\in R_+^2,$$

Выпрямляем характеристики, используя метод выпрямления характеристики, т.е. введем новую переменную

$$Z(x) = \int_0^x \frac{1}{\overline{C}(\lambda)}d\lambda, \quad Z(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} Z(x) = 0, \tag{12}$$

Введем также новые функции

$$C(Z(x)) = \overline{C}(x),\ \rho m(Z) = \rho_m(x),\ Cm(Z(x)) = C_m(x),\ U(Z(x),t) = V(x,t),$$

Проведем некоторые выкладки

$$V(x,t) = U(Z(x),t),\quad V_{tt}''(x,t) = U_{tt}''(Z(x),t),$$

$$V_x'(x,t) = U_x'(Z(x),t)\cdot Z_x'(x),$$

$$V_{xx}''(x,t) = U_{ZZ}''(Z(x),t)\cdot\left(Z_x'(x)\right)^2 + U_Z'(Z(x),t)Z_{xx}''(x),$$

$$\left(Z_x'\right)^2 = \left(\frac{1}{\overline{C}(x)}\right)^2 = \frac{1}{\overline{C}^2(x)};$$

$$Z_{xx}'' = \left(\frac{1}{\overline{C}(x)}\right)' = -\frac{\overline{C}_x'(x)}{\overline{C}^2(x)} = \frac{-C_Z'(Z)\cdot\dfrac{1}{\overline{C}(x)}}{\overline{C}^2(x)} = \frac{-C_Z'(x)}{C(Z)C^2(Z)};$$

Подставляя полученные выкладки в уравнение, получим

$$U_{tt}''(Z,t) = U_{ZZ}''(Z,t) - \frac{C'(Z)}{C(Z)}U_Z'(Z,t) - \frac{U(Z,t)}{\rho m(Z)Cm(Z)l}, \tag{13}$$

а начальное и граничное условие имеет вид

$$U(Z,t)\big|_{t<0} \equiv 0,\quad U_Z'(Z,t)\big|_{Z=0} = C(0)\left[h_0\delta(t) + r_0\theta(t) + \rho_0\theta_1(t)\right], \tag{14}$$

Дополнительная информация имеет вид

$$U(Z,t) = f(t),\ t\in[0,T]. \tag{15}$$

Обратная задача (13) – (15) заключается в определении функции $C(Z)$ и $U(Z,t)$ при известных коэффициентах $\rho m(Z)$, l.

Определив функцию $C(Z)$ из формулы

$$C(Z) = \frac{ra(Z)}{2C_m(Z)\rho_a(Z)} \tag{16}$$

можем определить один из этих коэффициентов, т.е. $ra(Z)$ или $C_m(Z)$ или $\rho a(Z)$.

Из принципа конечной зависимости области решения гиперболических задач от области определения его коэффициентов и от начальных граничных условий , а также продолжая все входящие функции в уравнении четным образом на полупространство $R_- = \{Z \in R, Z < 0\}$, задачу можно рассматривать в области:

$$\Delta(T) = \left\{ (Z,t) \in R \times R_+, \quad Z \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right), \quad Z < t < T \right\}.$$

Представим теперь решение прямой задачи (13) - (14) в виде

$$U(Z,t) = \widetilde{U}(Z,t) + \delta(Z)\theta(t-|Z|) + R(Z)\theta_1(t-|Z|), \tag{17}$$

здесь $\widetilde{U}(Z,t)$– непрерывная функция, т.е. выделим особенности решения задачи (13)-(14) по разработанному методу В.Г.Романова [7].

Вычитаем каждый производной:

$$U''_{tt}(Z,t) = \widetilde{U}''_{tt}(Z,t) + S(Z)\delta'(t-|Z|) + R(Z)\delta(t-|Z|),$$

$$U'_Z(Z,t) = \widetilde{U}_Z(Z,t) + S'_Z(Z)\theta(t-|Z|) - S(Z)\delta(t-|Z|) + R'_Z(Z)\theta_1(t-|Z|) + R(Z)\theta(t-|Z|),$$

$$U''_{ZZ}(Z,t) = \widetilde{U}_{ZZ}(Z,t) + S''_{ZZ}\theta(t-|Z|) - 2S'_Z(Z)\delta(t-|Z|) + S(Z)\delta'(t-|Z|) + R''_{ZZ}(Z)\theta_1(t-|Z|) -$$
$$- 2R'_Z(Z)\theta(t-|Z|) + R(Z)\delta(t-|Z|)$$

Подставляя все эти производные в уравнении (13), имеем:

$$\widetilde{U}_{tt}(Z,t) + S(Z)\delta'(t-|Z|) + R(Z)\delta(t-|Z|) =$$
$$= \widetilde{U}_{ZZ}(Z,t) + S''_{ZZ}(Z)\theta(t-|Z|) - 2S'_Z(Z)\delta(t-|Z|) + S(Z)\delta'(t-|Z|) +$$
$$+ R''_{ZZ}(Z)\theta_1(t-|Z|) - 2R'_Z(Z)\theta(t-|Z|) + R(Z)\delta(t-|Z|) -$$
$$- \frac{C'(Z)}{C(Z)}\left[\widetilde{U}'_Z(Z,t) + S'(Z)\theta(t-|Z|) - S(Z)\delta(t-|Z|) + R'_Z(Z)\theta_1(t-|Z|) - R(Z)\theta(t-|Z|)\right] -$$
$$- \frac{1}{Cm(Z)\rho m(Z)\cdot l}\left[\widetilde{U}(Z,t) + S(Z)\theta(t-|Z|) + R(Z)\theta_1(t-|Z|)\right]$$

После сокращения собираем члены при одинаковых $\delta(t)$, $\theta(t)$, $\theta_1(t)$ и приравниваем их к нулю:

$$\delta(t-|Z|):\ 2S'_Z(Z) - \frac{C'_Z(Z)}{C(Z)}S(Z) = 0,$$

$$\theta(t-|Z|): S''_{ZZ}(Z) - 2R'_Z(Z) - \frac{C'_Z(Z)}{C(Z)}S'_Z(Z) + \frac{C'(Z)}{C(Z)}R(Z) - \frac{1}{Cm(Z)\rho m(Z)l}\cdot S(Z) = 0$$

$$\theta_1(t-|Z|): R''_{ZZ}(Z) - \frac{C'_Z(Z)}{C(Z)}R'_Z(Z) - \frac{1}{Cm(Z)\rho m(Z)\cdot l}R(Z) = 0.$$

Из первого уравнения имеем

$$\frac{S'_Z(Z)}{S(Z)} = \frac{1}{2}\frac{C'(Z)}{C(Z)},\ \ln S(Z) = \ln\sqrt{C(Z)},\ S(Z) = \sqrt{C(Z)},$$

$$S(Z) = \sqrt{C(Z)} = \sqrt{\frac{ra(Z)}{\rho a(Z)Cm(Z)}},$$

$$\frac{ra(Z)}{\rho a(Z)Cm(Z)} = S^2(Z). \tag{18}$$

Учитывая (17) и связь $S(x)$ и $C(Z)$ из (13) - (15), имеем

$$U_{tt}''(Z,t)=U_{ZZ}''-2\frac{S'(Z)}{S(Z)}U_Z'(Z,t)-\frac{U(Z,t)}{Cm(Z)\rho m(Z)l},\quad (Z,t)\in\Delta(T), \tag{19}$$

$$U(Z,t)=\Big|_{t=|Z|}=S(Z),\ Z\in[0,T/2], \tag{20}$$

$$U(Z,t)\Big|_{Z=0}=f(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{21}$$

Задача (19) - (21) является одномерной регулярной обратной задачей с данными на характеристиках и заключается в определении функции $S(Z)$ и $U(Z,t)$.

Определив функцию из (19) - (21), мы по формуле (18) можем определить неизвестную функцию:

$$ra(Z)=S^2(Z)\cdot\rho a(Z)Cm(Z), \tag{22}$$

$$\text{или}\quad \rho a(Z)=ra(Z)/\left(S^2(Z)\cdot Cm(Z)\right), \tag{23}$$

Конечно - разностное решение обратной задачи (19) - (21) с данными на характеристиках.

Введем сеточную область:

$$\Delta_h(T)=\left\{x_i=ih, i=\overline{0,N};\ t_k=k\tau,\quad k=\overline{0,2N},\quad h=\tau=\frac{T}{N}\right\}, \tag{24}$$

h,τ - шаги сетки по x, t и $h=\tau$.

Запишем разностный аналог дифференциальной обратной задачи (19) - (21), используя сеточные обозначения [8], при этом отбрасываем малые члены.

$$U_{t\bar{t}}=U_{x\bar{x}}-2\frac{S_i-S_{i-1}}{hS_i}\left[\frac{U_i^k-U_{i-1}^k}{h}\right]-\frac{U_i^k}{Cm_i\rho m_i l},\quad (x_i,t_k)\in\Delta_h(T), \tag{25}$$

$$U_i^i=S_i,\quad i=\overline{0,N}, \tag{26}$$

$$U_0^k=f^k,\quad k=\overline{0,2N}. \tag{27}$$

Если ввести обозначения $\Phi_i^k=2\frac{S_i-S_{i-1}}{hS_i}\left[U_i^k-U_{i-1}^k\right]-\frac{U_i^k}{Cm_i\rho m_i l}$, то из уравнения (25) имеем

$$U_i^{k+1}=U_{i+1}^k-U_{i-1}^k+U_i^{k-1}-h^2\Phi_i^k. \tag{28}$$

Используя рекурентную формулу [9,10], мы можем получить разностный аналог интегральной формулы Даламбера второго порядка:

$$U_i^{k+1}=\frac{U_{i+k+1}^0+U_{i-k-1}^0}{2}-h^2\sum_{p=1}^{k}\sum_{M=1}^{p}\Phi_{i-k-M+2p}^M. \tag{29}$$

Теорема. Пусть решение дифференциальной задачи (19) - (20) существует и выполнены условия (11) - (12) и $U(x,t)\in C^4(\Delta(T))$.

Тогда приближенное решение обратной задачи (25) - (27), построенной конечно-разностным методом, сходится к точному решению обратной задачи (19) - (21) со скоростью порядка $O(h)$ и имеет оценку

$$\overline{U}^{k+1} \le O(h) * \exp\left[2\frac{\overline{S}}{\underline{S}} + h^2\frac{1}{\underline{CM}\cdot\underline{RM}\cdot l}\right], \tag{30}$$

где $\overline{U}^{k+1}$, $\overline{S},\underline{S}$, $\underline{CM}$, $\underline{RM}$ – верхние и нижние нормы функций $U_i^k, S_i, Cm_i, \rho m_i$.

Доказательство теоремы можно произвести по методике [11].

Определяя сеточную функцию S_i из (25) - (27), определяем и сеточные функции:

$$ra_i = S_i^2 * \rho a_i Cm_i, \quad i = \overline{0,N}, \tag{31}$$

$$\text{или} \quad \rho a_i = ra_i / \left(S_i^2 * Cm_i\right), \quad i = \overline{0,N}, \tag{32}$$

$$\text{или} \quad Cm_i = ra_i / \left(S_i^2 \rho a_i\right), \quad i = \overline{0,N}, \tag{33}$$

Из формулы (31) - (33), переходя к старому переменному x, методика перехода описана в работе [11], находим старые разностные функции $(r_a)_i$ или $(C_m)_i$, $(\rho_a)_i$, $i = \overline{0,N}$, т.е. неизвестные коэффициенты одномерной обобщенной обратной гиперболической задачи (7) - (9).

Из эквивалентности обратных задач (19) - (21) и (7) - (9), из разностной $U(Z,t)$ решение прямой задачи (19) - (20), переходя к старому переменному x, т.е. из U_i^k к V_i^k находим разностное решение обобщенной прямой задачи (7) - (8).

Так как одномерная обобщенная обратная гиперболическая задача (7)-(9) эквивалента к одномерной обобщенной обратной параболической задаче (4) - (6), то неизвестные коэффициенты обратной задачи (7) - (9), $(r_a)_i$ или $(C_m)_i$ или $(\rho_a)_i$, $i = \overline{0,N}$ являются и неизвестными коэффициентами обобщенной одномерной обратной задачи параболического типа (4) - (6).

Вывод. Доказана теорема о сходимости конечно-разностного решения одномерной обобщенной обратной задачи распространения потенциала действий по нервному волокну к точному решению указанной задачи.

Литература

1. Понетаева Е.Г., Григорьян Л.Р., Богатов Н.М. Расчет изменения потенциала действия в нервном волокне. Сентябрь 7,2016 admin Системы и приборы медицинского назначения.
2. Богатов Н.М., Григорьян Л.Р., Понетаева Е.Г. Моделирование рапространения электрического импульса в нервном волокне // Коллективная монография. Современные проблемы физики, биофизики и инфокоммуникационных технологий. – Краснодар: Краснодарский ЦНТИ, 2012. – С. 33–44.
3. Селезов И.Т., Морозова Л.В. Обобщение задачи возбуждения и распространения потенциала действия по нервному волокну // Прикладная гідромеханіка, 2010. – Т.12. – N.3. –С.75–83.
4. Hodgkin A.L., Rushton W.A. The electrical constans of a crustacean nerve fibre // Proc.Roy.Soc.London. 1946. Ser B. V.133. –P.444–479.
5. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J.Physiol. (London). 1952. – V.117.N4.–P 500–544.

6. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – С.457.
7. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. –М: Научный мир,2004.– С304.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М: Наука,1989.
9. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука,1988. –166с.
10. Алимканов А.А. Численное решение прямой задачи геоэлектрики с мгновенным и шнуровыми источниками. Вестник КазЫПУ имени Абая. Серия “физико-математические науки”, N4(60). –2017. – С. 103–109.
11. Сатыбаев А.Дж. Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа. – Ош: Ош обл.типография, 2001. – С.143.