АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.93

Р.О Оморов, д.т.н., член-корреспондент НАН КР, ***romano_ip@list.ru***
Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются основные положения метода исследования грубости динамических систем, основанного на понятии грубости по Андронову-Понтрягину и именуемого «методом топологической грубости». Приведены определения понятий «максимальной грубости» и «минимальной негрубости» динамических систем. Сформулированы соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости, а также возникновения бифуркаций топологических структур динамических систем, которые были доказаны в работах автора, приведенных в списке литературы. Метод позволяет управлять грубостью систем управления на основе теоремы, сформулированной с использованием матричного уравнения Сильвестра. Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы. В работах автора метод апробирован на примерах многих синергетических систем, таких, как аттракторы Лоренца и Рёсслера, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа, экономических систем Калдора и Шумпетера и др. Приложения метода проиллюстрированы на примере синергетической системы Чуа.

Ключевые слова: динамическая система; топологическая грубость; синергетическая система и хаос; грубость по Андронову-Понтрягину; бифуркация; максимальная грубость; минимальная негрубость систем; гиперболические особые точки.

Введение. Проблемам исследования грубости динамических систем, оценки робастности и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1-4].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото, или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову - Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε–близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 5].

В работе [6] на базе понятия грубости по Андронову- Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [7].

В данной статье представлены основные положения «метода топологической грубости», разработанного автором, а также приложения этого метода к синергетической системе Чуа [8].

Основы метода. В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций систем были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре [9], в частности, термин «бифуркация» впервые введен им и означает дословно «раздвоение», или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. «Грубость» динамических систем при этом определяется как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

$$\dot{z}(t) = F(z(t), \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n -$ вектор фазовых координат, $F - n -$мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову- Понтрягину в некоторой области $G,$ если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\widetilde{G},$ области G:

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \tag{2}$$

являются $\varepsilon -$ тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области $D,\ \widetilde{D}$ в n-мерном фазовом пространстве также, что $D \subset \widetilde{D} \subset \widetilde{G} \subset G$

$$\exists \varepsilon, \delta > 0:$$

если

$$\|f(\widetilde{z})\| < \delta,$$

$$|df_i(\widetilde{z}) / d\widetilde{z}_j| < \delta, \quad i, j = \overline{1, n},$$

то

$$|\|z\| - \|\widetilde{z}\|| < \varepsilon, \text{ или}$$

$$(\widetilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \tag{3}$$

иначе разбиение областей $\widetilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий (сепаратрис), замкнутых (периодических) траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [6] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» с использованием меры грубости в виде числа обусловленности $C\{M\}$ – нормированной матрицы $M,$ приведения системы каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости на отношениях пары δ и ε.

Определение 1. *Грубая в области G система (1) называется максимально грубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина δ – близо-*

сти систем (1) и (2), приводящая к ε-тождественности, будет (для каждого ε>0) максимальна.

Определение 2. *Негрубая в области G система (1) называется минимально негрубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина ε-тождественности систем (1) и (2), при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого δ>0) минимальна.*

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в работе [6].

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (z_0) была максимальна грубой, а в окрестности негиперболической – минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$$M^* = \operatorname{argmin} C\{M\},$$

где M – матрица приведения линейной части A системы (1) в особой точке (z_0) к диагональному (квазидиагональному) базису, C{M} – число обусловленности матрицы M.

Замечание 1. *Как следует из определений 1 и 2, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для которых C{M} = ∞. Иначе множество грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества со значениями C{M} от 1 до ∞. При этом системами с C{M}} = ∞ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц линейного приближения A.*

Очевидно, число обусловленности *C{M}* как меру грубости можно использовать для кусочно-гладких динамических систем, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей. Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

Теоретические результаты «метода топологической грубости», полученные в работах [6-8], позволяют управлять грубостью синергетических систем, в соответствии с теоремой, доказанной в работе [6].

Рассматривается система

$$\dot{z} = Q(z, u), \tag{4}$$

где $z \in R^n$, $u \in R^r$ – соответственно вектора фазовых координат и управлений системы, $Q(\cdot)$ – n – мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Возможности управления грубостью определяются условиями следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы в управляемой динамической системе (4), описываемой в n-мерном фазовом пространстве с помощью матриц линейного приближения A, B соответственно для фазовых координат и управлений, существовало управление u (t) , обеспечивающее в окрестности соответствующей особой точки замкнутой системы максимальную грубость или минимальную негрубость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия невырожденной разрешимости матричного уравнения Сильвестра.*

Управление $u = u(t) \in U$ ищется в классе систем с обратной связью $u = -Kx$, такое, что матрица замкнутой системы $F = A - BK$, вблизи особых траекторий, в частности особых точек, удовлетворяет условиям

$$G(F) = G(\Gamma), \qquad M\Gamma - AM = -BH, \qquad K = HM^{-1},$$

где $\Gamma \in R^{nxn}$ –диагональная (квазидиагональная) матрица состояния канонической модели, $H \in R^{mxn}$ – матрица, задаваемая произвольно с ограничением на наблюдаемость пары (Γ, H), $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ – матрицы координат и управления;

Вблизи особой точки:

$$F(z) = 0, \quad \dot{z} = Az + Bu,$$

управление $u = u(t) \in U$ синтезируется так, чтобы достичь требуемого значения показателя $C\{M\}$, используя какие-либо методы нелинейного программирования [10].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев, разработанных в работах [6-8]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций [11].

Теорема 3. *Для того чтобы в области G многомерной (n>2) ДС при значении параметра $q = q^*$, $q \in R^p$ возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:*

- либо 1), в рассматриваемой области G, ДС существуют негиперболические (негрубые) особые точки (ОТ), или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство

$$C\{M(q^*)\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i\{M(q)\}, \tag{5}$$

где p – количество ОТ или ПЦ в области G,

- либо 2), в области G ДС имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие

$$C\{M(q^*)\} = \infty. \tag{6}$$

Замечание 2. *Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (5) или (6) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория – ОТ или ПЦ, удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания («странные аттракторы»), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (5) удовлетворяют ОТ, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (5) отвечают ПЦ.*

Синергетика. В современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [12 – 14].

Синергетика в настоящее время вторгается во все области науки, начиная с естественных наук – физики, химии, биологии, геологии, геофизики и кончая неточными областями наук, такими, как экономика, социология, психология, философия, распознавание образов, а также в области техники и технологий [7, 8, 12-20].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит «метод топологической грубости», основы которого изложены выше.

Далее в работе возможности метода проиллюстрированы на примере широко известной синергетической системы Чуа [18].

Иллюстрация приложений метода к синергетической системе Чуа

Система (цепь) Чуа [18].

Как известно, система Чуа представляет собой электронную цепь с одним нелинейным элементом, которая способна генерировать разнообразные, в частности, хаотические колебания.

Система Чуа описывается уравнениями:

$$\dot{x} = p\,(y - f(x))\ ,\ \dot{y} = x - y + z\ ,\ \dot{z} = -\,q\,y\ , \qquad (7)$$

где $f(x) = M_1 x + 0.5\,(M_1 - M_0)(\,|\,x + 1\,| - |\,x - 1\,|\,)$.

При $p = 9,\ q = 14.3,\ M_1 = -\,6\,/\,7,\ M_0 = 5\,/\,7$ в системе (7) наблюдаются хаотические колебания.

В данном случае три особые точки (ОТ): ОТ_1 (0,0,0); $\text{ОТ}_{2,3}$(±11 / 6, 0, 11 / 6) .

Исследованиями установлены (см. рисунок), что хаотические движения обнаруживаются при значениях q: $-\,1.034 < q < -\,0.49$, а при $q = -\,3.8$ и $q = 1.05$ наблюдается максимальная грубость движений в системе (7).

Заключение. Рассмотренные в данной статье основные положения «метода топологической грубости», разработанного автором на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину, являются методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем показаны на примере синергетической системы Чуа, но в работах автора [7, 8] и др. метод апробирован для

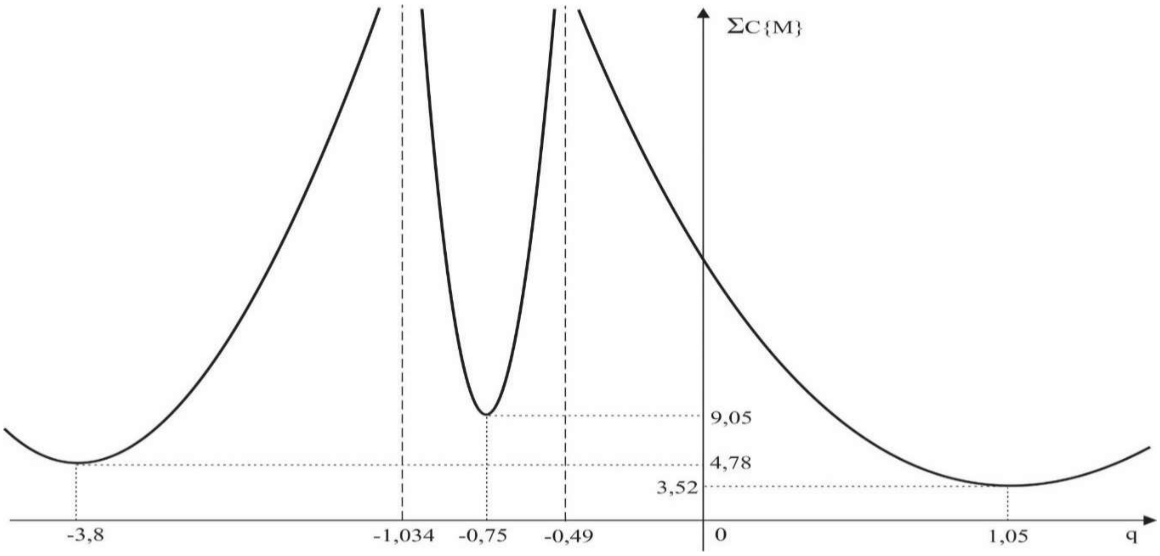

Рисунок – Зависимость $C\{M\}$ от параметра q в системе Чуа.

исследований синергетических систем Лоренца, Рёсслера, «хищник-жертва», динамо Рикитаке, отображений Хенона, бифуркаций Хопфа, моделях экономических систем типа Шумпетера и Калдора и др. При этом результаты метода, полученные на вышеперечисленных системах, согласуются с известными результатами других исследователей этих систем. Отметим, что метод может быть использован для исследований как других синергетических систем и хаоса в этих системах, так и для исследований динамических систем более широкого класса, в частности, при исследованиях колебательных систем и бифуркаций Хопфа, а также аттракторов дискретных отображений [7, 8, 12 - 20].

Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. – 1937. – Т.14. – №5. – С. 247–250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). – М.: Наука, 1985. – С. 59 –93.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. –Т. 32. – М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3–31.
4. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв. вузов. Электромеханика. – 1991. – № 1. – С. 78–85.
5. Peixoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. – Vol. 69. –No. 1. – P. 199–222.
6. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // А и Т. 1991. – № 8. – С. 36–45; Omorov R.O. Maximal coarseness of dinamical systems // Automation and Remote Control. 1992. – V. 52. – No 8 pt 1. – P. 1061–1068.
7. Оморов Р.О. Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. –2012. –№ 2. – С. 5–12; Omorov R.O. Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. – V. 44. – P. 61–70.
8. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. – Бишкек: Илим, 2019. – 288 с.
9. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями / Пер. с франц. под ред. А.А.Андронова. – М.–Л.: Гостехиздат, 1947. – 392 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
11. Оморов, Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления. Диссертация… на соискание ученой степени доктора технических наук. – СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992. – 188 с.
12. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
13. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение/Пер. с англ. – М.: Мир,1990. – 342 с.
14. Странные аттракторы / Сб. пер. с англ. под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. – М.: Мир, 1981. – 253 с.
15. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

16. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. 2-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
17. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В. Тунис 2011-2014. Бифуркация, революция и управляемая стабилизация // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2016. – № 4. – С. 92–103.
18. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // А и Т. 2003. –№ 5. – С. 3–45; Andrievsky B.R., Fradkov A.L. Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods // Automation and Remote Control. 2003. –V. 64. – No 5. – P. 678–720.
19. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. Изд-е 2-е. –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 240 с.
20. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 312 с.