УДК 62-50

РОБАСТНОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: УСТОЙЧИВОСТЬ И ЭЛЛИПСОИДНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА

Оморов Р.О., д.т.н., член-корреспондент НАН КР, romano_ip@list.ru
Акунов Т.А., к.т.н.
Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, Кыргызская Республика

Рассматривается алгебраический метод исследований робастной устойчивости непрерывных и дискретных интервальных динамических систем, а также метод эллипсоидных оценок качества многомерных систем управления. Как известно, основоположником алгебраического направления исследований робастности интервальных систем является российский, советский ученый В.Л. Харитонов. Им было установлено, что для устойчивости интервального полинома необходима и достаточна устойчивость лишь четырех угловых полиномов семейства, которые теперь носят название полиномов Харитонова. В данной работе представлены оригинальные результаты, полученные для исследования устойчивости непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные алгебраическим методом робастной устойчивости. Приведены основные результаты рассматриваемого метода для интервальных систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. В случае дискретных систем получен дискретный аналог теоремы Харитонова. Для исследования качественных свойств многомерных систем управления предложены эллипсоидные оценки качества, основанные на мажорантных и минорантных оценках сингулярных чисел, соответствующих критериальным матрицам этих свойств. Вычислительный аппарат определения эллипсоидных оценок построен на базе сингулярного разложения матриц с использованием стандартных SVD-процедур разложения матриц. Приведены базовые концепции метода эллипсоидных оценок.

Ключевые слова: интервальная динамическая система; робастная устойчивость; угловые полиномы Харитонова; интервальная матрица; многогранник матриц; дискретный аналог теоремы Харитонова; точка и интервал перемежаемости; эллипсоидные оценки качества многомерных систем; сингулярное разложение матриц; SVD-процедуры разложения матриц.

Введение. Вопросам робастности и грубости динамических систем в современной науке уделяется все больше внимания [1 - 9]. Интерес, который привлекает проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, связан с тем, что эти понятия относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемым при их реальном функционировании.

Что касается непосредственно систем управления, то в настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости, что связано прежде всего с основополагающими результатами В.Л. Харитонова, в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов [10].

К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления. При этом для инженерных применений следует отметить, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределены [11-13].

В теории робастной устойчивости решены многие задачи, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными – Я.З. Цыпкиным, Б.Т. Поляком, Ю.И. Неймарком – разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D –разбиения [8, 14-16].

В алгебраическом направлении исследований робастности систем управления получены оригинальные результаты касательно не только свойства устойчивости, но и других свойств качества систем (быстродействия, перерегулирования, точности и др.), которые основаны на использовании модальных оценок качества процессов, в современной терминологии именуемые эллипсоидными оценками [17-19].

В настоящей работе рассматривается *алгебраический метод* исследования робастности как непрерывных, так и дискретных интервальных динамических систем, основы которых заложены в работах [17-22]. При этом ввиду ограниченности объема работы вопросы эллипсоидных оценок представлены базовыми концепциями.

I. Алгебраический метод робастной устойчивости. Рассматриваются линейные динамические системы порядка n,

непрерывная

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

и дискретная

$$\mathbf{x}(m+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(m), m = 1,2,3,..., \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{x}(m)$ – вектора состояния, $\mathbf{A} \in R^{nxn}$ – интервальная матрица с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$, представляющие интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$.

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (1) и (2).

Непрерывные системы. В базовых для рассматриваемого метода работах [21, 22] получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости системы (1) по условиям гурвицевости четырех угловых полиномов Харитонова, составленным по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов системы (1):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + ... + b_n = 0\,. \tag{3}$$

Приведем эти теорему 1 и лемму.

Теорема 1. Для того чтобы положение равновесия **x**=0 системы (1) было асимптотически устойчиво при всех $\mathbf{A} \in D$ или чтобы интервальная матрица **A** была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловые полиномы Харитонова, составленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов (3) системы (1).

Данная теорема доказана на основе следующей леммы.

Лемма. Сепаратные угловые коэффициенты $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (3), либо при угловых значениях элементов $a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$, матрицы **A**, либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$, в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования.

К теореме 1, доказательство которой приведено в приложениях работ [21], необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

Замечание. Из основного аргумента доказательства теоремы 1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова, следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (1).

Случай, соответствующий приведенному **замечанию,** может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (3) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых коэффициентов до количества менее четырех.

Справедливость доказанной теоремы 1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Биаласа [19, 23].

Теорема 1 и лемма позволяют решить задачу о реберной гипотезе для многогранников матриц [3, 19].

Противоречия в реберной гипотезе [3] разрешены на основе следующей реберной теоремы 2, доказанной в работе [21].

Теорема 2. Для устойчивости многогранника матриц **P** необходимо и достаточно, чтобы выпуклые ребра **P** были устойчивы, т.е. матрица

$$s_1\mathbf{P}_i + s_2\mathbf{P}_j, \tag{4}$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1,m}, s_1 \in [-1.0], s_2 \in [0,1]$.

В данном случае многогранник матриц **P** представлен в виде:

$$\mathbf{P} = \left\{ \mathbf{P}_s = \mathbf{P}_{s1} + \mathbf{P}_{s2} : \mathbf{P}_{s1} = \sum_{i=1}^{m} s_{1i}\mathbf{P}_i, \quad \mathbf{P}_{s2} = \sum_{i=1}^{m} s_{2i}\mathbf{P}_i : s_{1i} + s_{2i} = s_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \sum_{1}^{m} s_i = 1 \right\} \tag{5}$$

Справедливость теоремы 2 также подтверждается аннулированием всех известных контрпримеров из работы [24].

Дискретные системы. Как известно, публикация работы [10] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова [3, 7, 22, 25-27]. Так, в работе [3] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены [25] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова. Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [3] . Эти ограничения были сняты в работах [22, 27] , где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура [28]. Также в [22, 27] сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [10] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Далее рассматривается обобщение результатов, полученных в работе [22], с учетом выводов, приведенных выше, для непрерывных систем.

Для дискретных систем, используя z - преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$f(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i}, b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \underline{b}_i \leq \overline{b}_i. \tag{6}$$

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура [28] , т.е. условиями вида

$$|b_0| > |b_n|, \tag{7}$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_i(z) = \left[b_0 f(z) - b_n f(1/z) z^n\right]/z, \ldots, f_{i+1}(z) = \left[b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(1/z) z^{n-1}\right]/z, \quad (8)$$

где $b_{0,i}, b_{n,i}$ – соответственно старший и младший коэффициенты i-го $(i = \overline{1, n-2})$) полинома $f_i(z)$.

Определение 1. *Точками перемежаемости* для коэффициентов $b_i, i = \overline{0,n}$ будем называть точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (6), через единичную окружность на плоскости корней, а *интервалами перемежаемости* – соответственно интервалы, в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга.

В работах [19, 22] сформулированы основные результаты по определению условий робастной устойчивости дискретных интервальных систем.

Справедливость результатов [21, 22] относительно аналога сильной теоремы Харитонова продемонстрирована на известных контрпримерах из [3, 25, 26] и др.

Алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем будет следующим.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 1 [22], оптимизацией по элементам $a_{ij} \in \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij},\right], i, j = \overline{1,n}$, интервальной матрицы **A**, находятся сепаратные угловые коэффициенты $b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right], i = \overline{0,n}$, интервального характеристического полинома (6).

2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (6)

$f_1(z): \{\underline{b}_0, \underline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4 \ldots,\}; f_2(z): \{\underline{b}_0, \overline{b}_1, \overline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4 \ldots,\};$

$f_3(z): \{\overline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4 \ldots,\}; f_4(z): \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \overline{b}_4 \ldots,\};$

3. Составляются n-неравенства вида (П.2), указанные в Приложении работы [22].

4.Относительно каждого коэффициента $b_i, i = \overline{0,n}$, считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки перемежаемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем n- неравенствам (см. п.3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки перемежаемости по всем коэффициентам $b_i, i = \overline{0,n}$, не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив в противном случае неустойчив.

II.Эллипсоидные оценки качества многомерных систем управления с интервальными параметрами. Как известно, основные показатели качества такие, как время переходного процесса, перерегулирование, коэффициенты ошибки, добротности, показатель колебательности, дисперсия ошибки выходной величины, полосы пропускания на уровне заданных значений частотных характеристик и спектральных плотностей и др. сформулированы в теории и практике одномерных систем. Логично желание перенесения этих показателей на случай многомерных систем. Однако в случае многомерных систем возникают проблемы, связанные со структурой пространства оператора, реализуемого многомерной системой. Использование показателей качества систем, разработанных в теории одномерных систем, может быть осуществлено только путем скаляризации векторных процессов [17]. Простейшим способом скаляризации является использование их норм. Однако при таком способе скаляризации может быть упущен учет специфики многомерных процессов. В этой связи авторы предпочли использование аппарата эллипсоидных оценок качества, который в рамках предлагаемого ниже подхода приводит к мажорантной и минорантной оценкам основных показателей многомерных процессов, используемых в теории одномерных систем [17, 18]. При этом даже в одномерном случае часть показателей носит явно мажорантный и минорантный характеры, порождаемые отношениями порядка типа “не больше” и “не меньше”. Очевидно, для случая интервальных многомерных систем все эти показатели будут носить интервальный характер.

Матричные способы описания динамики и алгебраические методы исследования обусловили в последнее время широкое использование сингулярного разложения матриц в теории многомерных систем [17, 18, 29, 30]. Сингулярное разложение матриц является эффективным аппаратом линейной алгебры, а с появлением SVD-процедуры стало мощным вычислительным средством для решения задач, связанных с матрицами [29, 31-34]. Интерес к сингулярному разложению вызван связью сингулярных чисел с нормами матриц, свойствами матричных компонентов разложения, а также возможностью использования информации, заложенной в компонентах сингулярного разложения в задачах анализа и синтеза систем управления. Таким образом, сформировалось направление в теории многомерных систем, основанное на SVD-подходе.

Использование в качестве инструментария SVD-разложения матриц позволило ввести в рассмотрение скалярные показатели качества векторных процессов в многомерных системах, аналогичных показателям качества для одномерных систем в форме мажорант и минорант и именуемых *эллипсоидными* в силу прозрачной геометрической интерпретируемости в виде отображения сферы в эллипсоид. Использование свойств компонентов сингулярного разложения матриц в линейной алгебраической задаче позволяет определить условия, порождающие заданные эллипсоидные показатели качества векторных процессов в многомерных системах.

Базовые концепции формирования эллипсоидных оценок. Методологическая основа эллипсоидного оценивания многомерных процессов, использующего свойства компонентов сингулярного разложения матриц, опирается на систему алгебраических концепций, приведенных ниже.

Концепция 1. Пусть задача исследования многомерных систем управления сводится к векторно-матричному представлению, параметризованному скаляром τ

$$\kappa(\tau) = \Pi(\tau)\chi(\tau), \ \forall\tau, \ \tau = t, k; \ \omega \tag{9}$$

где $\kappa \in R^{\rho}$, $\chi \in R^{\nu}$; $\Pi \in R^{\rho\times\nu}$– некоторая критериальная матрица, τ может принимать смысл непрерывного времени *t* в случае исследования непрерывных многомерных управляемых процессов и смысл дискретного времени *k*, выраженного в числе интервалов дискретности длительностью Δt так, что непрерывное время t и дискретное *k* связаны соотношением $t = \Delta t)k$ в случае исследования дискретных многомерных управляемых процессов, ω – частота источника внешнего гармонического воздействия. Пусть матрица $\Pi(\tau)$ имеет в силу сингулярного разложения представление

$$\Pi(\tau) = U(\tau)\Sigma(\tau)V^{T}(\tau) \tag{10}$$

где $\Sigma(\tau)$ – $(\rho\times\nu)$ диагональная матрица, имеющая на главной диагонали сингулярные числа матрицы $\Pi(\tau)$, $U(\tau)$ – ортогональная $(\rho\times\rho)$ матрица, столбцы которой образуют левый сингулярный базис матрицы $\Pi(\tau)$, $V(\tau)$– ортогональная $(\nu\times\nu)$ матрица, столбцы которой образуют правый сингулярный базис матрицы $\Pi(\tau)$. Если в (9) перейти к евклидовым векторным нормам, то становятся справедливыми оценочные неравенства

$$\alpha_m(\tau) \le \|\kappa(\tau)\| / \|\chi(\tau)\| \le \alpha_M(\tau), \forall \tau, \tag{11}$$

где $\alpha_m(\tau), \alpha_M(\tau)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\Pi(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\Pi(\tau)$. Наибольшее и наименьшее сингулярные числа $\alpha_M(\tau), \alpha_m(\tau)$ матрицы $\Pi(\tau)$ в (9) однозначно определяют на матрице правых сингулярных векторов $V(\tau)$, те из них, которые на сфере $\|\chi(\tau)\| = fix$ отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида, получаемого с помощью (9), причем длины этих полуосей $\alpha_M(\tau)\|\chi(\tau)\|$ и $\alpha_m(\tau)\|\chi(\tau)\|$ соответственно.

Концепция 2. Пусть задача исследования многомерных систем управления сводится к векторно-матричному представлению вида (9)

$$\kappa(\tau) = \Pi(\tau)\chi(\tau = 0), \quad \forall \tau \tag{12}$$

где вектор $\chi(\tau = 0) = \chi(0)$, в отличие от (9), является стационарным по τ. Тогда могут быть записаны оценочные неравенства вида (11)

$$\alpha_m(\tau) \le \|\kappa(\tau)\| / \|\chi(0)\| \le \alpha_M(\tau), \forall \tau, \tag{13}$$

где $\alpha_m(\tau), \alpha_M(\tau)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\Pi(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\Pi(\tau)$ (4), однозначно определяющие на матрице правых сингулярных векторов $V(\tau)$, те из них, которые на сфере $\|\chi(0)\| = \gamma = const$ отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида с полуосями $\gamma\alpha_M(\tau)$ и $\gamma\alpha_m(\tau)$ соответственно.

Концепция 3. Пусть задача исследования многомерных систем управления сводится к векторно-матричному представлению вида (9). Тогда в евклидовых векторных нормах справедлива эквивалентная форма записи неравенства (11)

$$\alpha_m(\tau)\|\chi(\tau)\| \le \|\kappa(\tau)\| \le \alpha_M(\tau)\|\chi(\tau)\|, \forall \tau. \tag{14}$$

Концепция 4. Пусть задача исследования многомерных систем управления сводится к векторно-матричному представлению вида (12). Тогда в евклидовых векторных нормах справедлива эквивалентная форма записи неравенства (13)

$$\alpha_m(\tau)\|\chi(0)\| \le \|\kappa(\tau)\| \le \alpha_M(\tau)\|\chi(0)\|, \forall \tau. \tag{15}$$

Концепция 5. Если матрица $\Pi(\tau)$ в (9), (12) представима в одной из форм

$$\Pi(\tau) = \overline{\Pi}R(\tau), \; \Pi(\tau) = N(\tau)\overline{\Pi}, \; \Pi(\tau) = N(\tau)\overline{\Pi}R(\tau), \tag{16}$$

где $R(\tau), N(\tau)$ – матрицы из класса ортогональных или унитарных, тогда становятся стационарными по τ оценочные неравенства (11) для задачи (9)

$$\overline{\alpha}_m \le \|\kappa(\tau)\| / \|\chi(\tau)\| \le \overline{\alpha}_M, \forall \tau \tag{17}$$

и оценочные неравенства (13) для задачи (12)

$$\overline{\alpha}_m \le \|\kappa(\tau)\| / \|\chi(0)\| \le \overline{\alpha}_M, \forall \tau \tag{18}$$

где $\overline{\alpha}_m, \overline{\alpha}_M$ являются экстремальными элементами алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\overline{\Pi}\}$ сингулярных чисел стационарной по τ матрицы $\overline{\Pi}$.

Концепция 6. Пусть задача исследования многомерных управляемых процессов, сведенная к (9), дополнена векторно-матричным соотношением

$$\zeta(\tau) = \Psi(\tau)\chi(\tau). \tag{19}$$

Пусть при этом в задаче исследования многомерных управляемых процессов представляет интерес изучение поведения отношения

$$\delta_{\kappa\varsigma}(\tau) \overset{\Delta}{=} \|\kappa(\tau)\| / \|\zeta(\tau)\| \tag{20}$$

евклидовых векторных норм. Тогда в силу обобщенного отношения Релея, которое является скалярной формой обобщенной задачи собственных значений, оказываются справедливыми оценочные неравенства

$$\lambda_{\Pi\Psi m}(\tau) \le \delta_{\varsigma\kappa}(\tau) = \|\kappa(\tau)\| / \|\varsigma(\tau)\| \le \lambda_{\Pi\Psi M}(\tau) \tag{21}$$

где скалярные оценки $\lambda_{\Pi\Psi m}(\tau)$ и $\lambda_{\Pi\Psi M}(\tau)$ при условии, что $\Psi^T(\tau)\Psi(\tau)$ $\forall\tau$ невырожденная матрица, вычисляются для $\forall\tau$ с помощью решения обобщенного характеристического уравнения

$$\det\left(\mu(\tau)\Psi^T(\tau)\Psi(\tau) - \Pi^T(\tau)\Pi(\tau)\right) = 0, \tag{22}$$

так что

$$\lambda_{\Pi\Psi}(\tau) = \left|\mu^{1/2}(\tau)\right|. \tag{23}$$

Если матрицы задачи $\Pi(\tau)$ и $\Psi(\tau)$ представимы в форме

$$\Pi(\tau) = Q\pi(\tau),\ \Psi(\tau) = R\pi(\tau), \tag{24}$$

где $\pi(\tau)$ – произвольная квадратная матрица, то оценочные неравенства (21) становятся стационарными по τ и принимают вид

$$\lambda_{QRm} \le \delta_{\kappa\varsigma}(\tau) = \|\kappa(\tau)\| / \|\zeta(\tau)\| \le \lambda_{QRM} \quad \forall\tau \tag{25}$$

где экстремальные оценки $\lambda_{QRm}(\tau)$, $\lambda_{QRM}(\tau)$ вычисляются при условии, что матрица $R^T R$ обратима, с помощью решения обобщенного характеристического уравнения, стационарного по τ

$$\det\left(\mu R^T R - Q^T Q\right) = 0.$$

Концепция 7. Пусть в задаче исследования многомерных управляемых процессов, сведенной к линейной алгебраической задаче вида (1), критериальная матрица является матричной функцией от вектора ρ так, что $\Pi(\tau) = \Pi(\rho, \tau)$. Очевидно, что если для *сепа-*

ратных (*частных*) реализаций вектора ρ в $\Pi(\tau)=\Pi(\rho,\tau)$ перейти к евклидовым векторным нормам, то справедливы оценочные неравенства

$$\alpha_m(\tau,\rho)\|\chi(\tau)\| \le \|\kappa(\tau,\rho)\| \le \alpha_M(\tau,\rho)\|\chi(\tau)\|, \forall\tau \quad (26)$$

где $\alpha_m(\tau,\rho), \alpha_M(\tau,\rho)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра сингулярных чисел *сепаратной критериальной* матрицы (24). Если соотношение (26) дополнить условием принадлежности вектора ρ сфере $\|\rho\|=const$, то тогда выполняются оценочные неравенства

$$\tilde{\alpha}_m(\tau)\|\chi(\tau)\| \le \alpha_m(\tau,\rho)\|\chi(\tau)\| \le \|\kappa(\tau)\| \le \alpha_M(\tau,\rho)\|\chi(\tau)\| \le \tilde{\alpha}_M(\tau)\|\chi(\tau)\|, \forall\tau \quad (27)$$

где $\tilde{\alpha}_m(\tau), \tilde{\alpha}_M(\tau)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра сингулярных чисел *глобальной критериальной* матрицы $\Pi(\tau)=\Pi(\rho\in\|\rho\|=const,\tau)$

Концепция 8. Относительные вариации элементов задачи (12) связаны с числом обусловленности $C\{\Pi(\tau)\}, \forall\tau$ в силу неравенства

$$\delta_\kappa(\tau) \le C\{\Pi(\tau)\}\left(\delta_{\chi(0)}+\delta_{\Pi(\tau)}+\delta_{\Pi(\tau)}\delta_{\chi(0)}\right) \quad (28)$$

где $\delta_{(*)} \overset{\Delta}{=} \|\Delta(*)\|/\|(*)\|$ – относительная вариация элемента (*) задачи (12).

Эллипсоидные показатели качества многомерных систем управления конструируются с использованием этих базовых алгебраических концепций. Если задача управления сведена к линейной (локально-линейной) алгебраической задаче, то авторы следовали положениям следующего определения.

Определение 2. Экстремальные элементы алгебраического спектра сингулярных чисел вида (11), (13), (14), (15), (26) и (27) соответствующих критериальных матриц $\Pi(\tau)$ являются скалярными оценками векторного процесса $\kappa(\tau)$, порожденного вектором χ, принадлежащим некоторой сфере $\|\chi\|=\gamma=const$, содержательно представляют собой оценки качества многомерных процессов в форме *эллипсоидных мажорант и минорант*, а полученные на них стандартные показатели качества носят название *эллипсоидных показателей качества.*

Использование сингулярного разложения матрицы (10) линейной алгебраической задачи (9) позволяет ввести в рассмотрение тройки, составленные из экстремальных элементов алгебраического спектра сингулярных чисел и согласованных с ними элементов левого и правого сингулярных базисов. Эти тройки задают соответственно точные нижнюю и верхнюю границы, на которых скалярные неравенства (11), (13), (14), (15), (26) и (27) в нормах обращаются в равенства, что является методологической основой построения минорирующего и мажорирующего эллипсоидных показателей качества многомерных процессов, сводящихся к линейной алгебраической задаче.

К оценкам вида (11), (13) и (14) сводятся практически все оценки качества многомерных процессов при конечномерном и стохастическом воздействиях. В зависимости от конструирования матрицы $\Pi(\tau)$ в проблемной постановке можно получить различные показатели качества многомерных процессов.

Вычисление элементов сингулярного разложения матриц, а также вычисление обобщенных собственных значений осуществляется с помощью вычислительно устойчивых SVD, GSVD и QZ процедур, соответственно имеющихся в среде MATLAB.

Использование возможностей SVD-разложения критериальных матриц позволяет решить задачи построения эллипсоидных показателей как структурных свойств объектов управления, таких как управляемость по состоянию, управляемость по выходу и наблюдаемость, так и эллипсоидных показателей качества процессов в многомерных системах при внешнем конечномерном воздействии.

Заключение. Алгебраический метод Харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в данной работе, является дальнейшим развитием основных результатов работ [21, 22], который позволяет решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы системы. При этом метод направлен для решения задач робастной устойчивости как для линейных непрерывных, так и для линейных дискретных интервальных динамических систем.

Следует отметить, что **Замечание** к теореме 1 существенным образом уточняет результаты работы [21], а именно подчеркивает необходимость полного набора из четырех угловых полиномов Харитонова (с учетом кратности полиномов) для определения робастной устойчивости интервальных динамических систем. Также условия необходимости и достаточности по теореме 1 соответствуют угловым сепаратным коэффициентам, определяемым последовательно от 1-го до n-го коэффициента характеристического полинома системы, которые могут быть найдены с использованием методов нелинейного программирования.

Аппарат модальных, или в современной терминологии эллипсоидных оценок, представленный в данной работе базовыми концепциями, позволяет получить оценки качества процессов в многомерных системах, аналогичных одномерным системам, через скалярные мажоранты и миноранты сингулярных чисел, соответствующих критериальным матрицам систем как в непрерывном, так и в дискретном случаях. Вычислительные процедуры эллипсоидных оценок строятся на базе SVD-разложения матриц, широко практикуемых при исследовании алгебраических задач.

Литература

1. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т.169). – М.: Наука, 1985. – С. 59– 93.
2. Dorato P.A. Historical review of robust control//IEEE Contr. Syst. Magazine. –1987. – V.7. – No 2. – Pp. 44–47.
3. Джури Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика, 1990. – №5. С.4-28.
4. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. –1991. – №8. – С. 36– 45.
5. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв. вузов. Электромеханика. –1991. – № 1. – С. 78– 85.
6. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I.Анализ с использованием

интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1991. – №1. – С. 3– 23.

7. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем// Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. – Т.32. – М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3–31.
8. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика.–1992. – №1. – С. 165–176.
9. Оморов Р.О. Модальная чувствительность, робастность и грубость динамических систем (обзорная статья) // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. –2021. –Т. 21. –№ 2. – С. 179–190.
10. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. –Т.14. – № 11. – С. 2086–2088.
11. Никифоров В.О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. –1998. – №9. – С. 87–99.
12. Пелевин А.Е. Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. – 1999. – № 2(25). – С. 63–74.
13. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев: Наук. Думка, 2006. – 264 с.
14. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №7. – С. 10–18.
15. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. –№ 9. – С. 45–54.
16. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. 1992. – № 7. – С. 25–31.
17. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. – Бишкек: Илим, 1991. – 59 с.
18. Акунов Т.А., Сударчиков С.А., Ушаков А.В. Эллипсоидные оценки качества систем с интервальными параметрами, конструируемые на харитоновской выборке из массива угловых реализаций // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2004. – № 14. – С. 54–61.
19. Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2020. – Т. 20. – № 3. – С. 364–370.
20. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления… Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992. – 188 с.

21. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I.Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. – №1. – С.22–27.
22. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II.Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. – 1995. –№3. – С.3–7.
23. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices// Int. J. Control 1983. –V.37. – No 4. – P. 717–722.
24. Barmish B.R., Fu M., Saleh S.// Stability of a polytope of matrices:. Counterexamples // IEEE Trans. Automatic. Control. 1988. V.AC-33. – No 6. – P. 569–572.
25. Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low order Shur polynomials // IEEE Trans. Circ. Systems. 1988. – V. CAS-35. – No 5. – P. 909–913.
26. Mansour M., Kraus F.J. On robust stability of Shur polynomials // Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH). Zurich, 1987. – 34 p.
27. Оморов Р.О. О дискретном аналоге теоремы Харитонова //Наука и новые технологии. 2002. –№3. – С. 5–10.
28. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. – М.: Физматгиз. 1958. – 724 с.
29. Maryak J.L., Hunter L.W. Favin S. Automated System Monitoring and Diagnosis via SVD. Automatica. Journal of IFAC, V.33. – N11, 1977. – Pp.2059–2063.
30. Ringwood J. Multivariable control using the singular value decomposition in steel rolling with quantitative robustness assessment. Control Engineering Pracrice. V. 3(4) 1995. Pp.495-503.
31. Hovd M., Braatz R.D., Skogestad S. Optimal and robust control of SVD processes. Technical report, University of Trondheim, Trondheim, Norway, 1996.
32. G.Ray, A.N. Prasad, G.D. Design of a robust load-frequency controller for interconnected power systems based on the singulaar-value decomposition method. Electric Power Systems Research. V.37 (3) 1996. – Pp.209–219.
33. Liu K. Application of SVD in optimization of structural modal test. Computers&Structures V. 63(1). –1997. – Pp. 51–59.
34. Zhu Z., Jutan A. Robust multivariable control using an SVD-based controller. Chemical Engineering Scince. V. 53 (6). – 1998. – Pp.1145–1151.