УДК 517. 977

***А. Керимбеков*[1]**, **akl7@ramblerl.ru**
***З.С Кабаева*[2]**, **akbar2005-78@mail.ru**
***Э.Ф. Абдылдаева*[3]**, **efa_69@mail.ru**
[1]Кыргызско-Российский Славянский университет, Кыргызстан, Бишкек,
[2]Кыргызский Национальный университет имени Жусупа Баласагына, Кыргызстан, Бишкек,
[3]Кыргызско-Турецкий университет “Манас”, Кыргызстан, Бишкек

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА

В данной статье рассмотрена задача нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от двумерного векторного управления и минимизируется в интегральный квадратичный функционал. На примере численных расчетов исследовано влияние отдельных параметров задачи на скорость сходимости приближенных решений к точному решению. Результаты исследований приведены в виде таблиц.

Ключевые слова: тепловой процесс, векторное управление, обобщенное решение, приближенное решение, скорость сходимости.

Введение

При исследовании задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами [1,2] не всегда удается найти точное решение задачи. В этой связи на практике ограничиваются построением приближенного решения задачи [3]. При этом немаловажное значение имеет скорость сходимости приближенного решения, которая зависит от свойств параметров задачи [4,5], например, при определении номера приближенного решения, удовлетворяющего заданную точность. Поэтому результаты исследования скорости сходимости приближений в зависимости от свойств параметров задачи могут быть полезными при решении прикладных задач.

В этой статье на примере модельной задачи приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы работы [6] в случае двумерного векторного управления.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал

$$J[u]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}u_k^2(t)dt,\quad m-1,2.\quad \beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [5]

$$V_t=V_{xx}+g(t,x)f\left[t,u_1(t),u_2(t)\right],\ 0<x<1,\ 0<t\le T, \tag{2}$$

$$V(0,x)=\psi(x),\ 0<x<1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ 0<t\le T,\ \alpha>0, \tag{4}$$

где $u(t)=(u_1(t),u_2(t))\in H^2(0,T)=H(0,T)\times H(0,T)$ – вектор функции управления; $f[t,u_1(t),u_2(t)]\in H(0,T)$ – заданная функция внешнего воздействия, нелинейно-зависящая от вектор - функции управления, которая обладает свойством монотонности по каждой из функциональной переменной $u_1(t),u_2(t)$, т.е. имеет место условие

$$\frac{\partial f[t,u_1(t),u_2(t)]}{\partial u_1(t)} \neq 0, \quad \frac{\partial f[t,u_1(t),u_2(t)]}{\partial u_2(t)} \neq 0, \quad \forall t \in [0,T], \tag{5}$$

$\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция; $\psi(x) \in H(0,1)$ – известная функция начального состояния управляемого процесса; H – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций; T – фиксированный момент времени.

Слабо обобщенное решение и условия оптимальности

Слабо обобщенное решение краевой задачи (2) – (4) имеет вид

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau,u_1(\tau),...,u_m(\tau)]d\tau \right) z_n(x) \tag{6}$$

и является элементом гильбертова пространства $H(Q)$ [5].

Согласно принципу максимума, для распределенных систем приращение функционала вычисляется по формуле

$$\Delta J[u(t)] = J[u(t)+\Delta u(t)] - J[u(t)],$$

где $\Delta u(t)$ – произвольное приращение, для которого $u(t)+\Delta u(t)$ является элементом пространства $H^2(0,T)$. Согласно методике работы [2], приращение функционала $\Delta J[u(t)]$ непосредственным вычислением приводим к виду

$$\Delta J[u(t)] = -\int_0^T \Delta \Pi[t, \omega(t,x), u(t)]dt + \int_0^1 \Delta V^2(T,x)dx, \tag{7}$$

где

$$\Pi[t, \omega(t,x), u(t)] = \int_0^1 \omega(t,x)\, g(t,x)\, f\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]dx - \beta\sum_{k=1}^{m} u_k^2(t), \quad m = 1,2, \tag{8}$$

$$\Delta \Pi[t, \omega(t,x), u(t)] = \Pi[t, \omega(t,x), u(t)+\Delta u(t)] - \Pi[t, \omega(t,x), u(t)], \tag{9}$$

$\omega(t,x)$ – удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \omega_t + \omega_{xx} = 0, \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T, \\ \omega(T,x) + 2\left[V(T,x) - \xi(x)\right] = 0, \quad 0<x<1, \\ \omega_x(t,1) = 0, \quad \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \quad \alpha>0, \quad 0<t\le T. \end{gathered} \tag{10}$$

Согласно необходимому условию экстремума 1-го порядка, имеем систему равенств

$$\int_0^1 g(t,x)\,\omega(t,x)\,dx \frac{\partial f\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]}{\partial u_k} - 2\beta u_k(t) = 0, \quad k = 1,2, \tag{11}$$

Согласно необходимому условию экстремума 2-го порядка, матрица Гесса

$$\Gamma\ \Pi\ \cdot, u_1\ t\ , u_2\ t\ = \begin{pmatrix} -2\beta\, f_{u_1}\left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & -2\beta\, f_{u_1}\left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2} \\ -2\beta\, f_{u_m}\left(\dfrac{u_m}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & -2\beta\, f_{u_2}\left(\dfrac{u_m}{f_{u_m}}\right)_{u_2} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

должна быть отрицательно-определенной, т.е., согласно критериям Сильвестра, требуется выполнение следующих условий

$$f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} > 0, \quad \begin{vmatrix} -2\beta\, f_{u_1}\left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & -2\beta\, f_{u_1}\left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2} \\ -2\beta\, f_{u_2}\left(\dfrac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & -2\beta\, f_{u_2}\left(\dfrac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2} \end{vmatrix} = -2\beta\ ^2 f_{u_1} f_{u_2} \begin{vmatrix} \left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & \left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2} \\ \left(\dfrac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & \left(\dfrac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2} \end{vmatrix} > 0. \quad (13)$$

При выполнении условий (13) функция $\Pi\ \cdot, u_1\ t\ , u_2\ t$ достигает своего максимума при наборе управлений $u_1\ t\ , u_2\ t$, удовлетворяющих систему равенств (11). Соотношения (11) и (13) называются **условиями оптимальности**.

Функция $\omega(t,x)$ определяется как слабо обобщенное решение, сопряженной краевой задачей (10,) и имеет вид

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} g_n\ \tau\ \ f\left[\tau, u_1\ \tau\ , u_2\ \tau\ \right]d\tau - \xi_n\right] e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x). \qquad (14)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что эта функция является элементом пространства $H\ \ Q$.

Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений

Элементы оптимального векторного управления $u(\mathrm{t}) = u_1(t), u_2(t)$ удовлетворяют системе равенств (11). Вместо функции $\omega(t,x)$, подставляя ее значение (14), относительно элементов векторного управления $u(\mathrm{t}) = u_1(t), u_2(t)$, имеем систему равенств

$$\beta u_k\ \ t\ = \frac{\partial f[t, u_1(t), u_2(t)]}{\partial u_k}\sum_{n=1}^{\infty} G_n\ \ T, t\ \left[h_n - \int_0^T G_n\ \ T, \tau\ \ f[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)]d\tau\right], \qquad (15)$$

где

$$G_n\ \ T, t\ = g_n(t) e^{-\lambda_n^2(T-t)}, \quad h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n, \quad k = 1, 2.$$

Система равенств (15) обладает специфическим свойством, в частности, оно удовлетворяет системе равных отношений, т.е.

$$\vartheta\ \ t\ = \frac{\beta u_1\ \ t}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1}} = \frac{\beta u_2\ \ t}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2}}, \qquad (16)$$

где $\vartheta(t)$ – некоторая функция.

Заметим, что в силу монотонности функции $f(t,u_1,u_2)$ по каждой функциональной переменной $u_1(t), u_2(t)$ и, согласно условию оптимальности (13), из систем равенств (16) каждая из функций $u_1(t), u_2(t)$ однозначно выражается через функцию $\vartheta(t)$, т.е. имеет место следующая система равенств

$$u_1(t) = \varphi_1\left[t,\vartheta(t),\beta\right],$$
$$u_2(t) = \varphi_2\left[t,\vartheta(t),\beta\right]. \tag{17}$$

Тогда на основе соотношений (16) и (17) из (15) относительно функции $\vartheta(t)$ имеем следующее соотношение

$$\vartheta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t) \int_0^T G_n(t,\tau) f\left[\tau,\varphi_1\left[\tau,\vartheta(\tau),\beta\right],\varphi_2\left[\tau,\vartheta(\tau),\beta\right]\right] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t) h_n,$$

которое является нелинейным интегральным уравнением.

Это уравнение перепишем в операторной форме

$$\vartheta(t) = G\left[\vartheta(t)\right], \tag{18}$$

где

$$G\left[\vartheta(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\left[h_n - \int_0^T G_n(T,\tau) f\left[\tau,\varphi_1\left[\tau,\vartheta(\tau),\beta\right],\varphi_2\left[\tau,\vartheta(\tau),\beta\right]\right] d\tau\right] =$$
$$= h(t) + G_0\left[\vartheta(t)\right].$$

Доказано, что операторное уравнение (18) в пространстве $H^2(0,T)$ имеет единственное решение и найдены достаточные условия существования решения [6,7].

Решение операторного уравнения (18) находим методом последовательных приближений.

$$\vartheta_i(t) = G\left[\vartheta_{i-1}(t)\right], \qquad i = 1,2,3,\ldots,$$

где $\vartheta_0(t)$ – произвольный элемент пространства $H(0,T)$. Известно [8], что приближенное решение $\vartheta_i(t)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\vartheta(t) - \vartheta_i(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0(t)\right] - \vartheta_0(t)\right\|_H. \tag{19}$$

В силу произвольности если положить $\vartheta_0(t) = h(t)$, то неравенством (19) можно пользоваться в следующем виде

$$\left\|\vartheta(t) - \vartheta_i(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\vartheta_0(t)\right]\right\|_H. \tag{20}$$

Точное решение операторного уравнения (18) находим по формуле

$$\vartheta^0(t) = \lim_{i\to\infty}\vartheta_i(t), \quad \vartheta_i(t) = G\left[\vartheta_{i-1}(t)\right], \quad i = 1,2.$$

где $\vartheta_i(t)$ – последовательные приближения.

Далее, найденное решение уравнения (18) подставим в (17) и находим решение системы (15), т.е. оптимальное векторное управление $u^0(t)$ определим по формулам:

$$\begin{aligned} u_1^0(t) &= \varphi_1\left[t, \vartheta^0(t), \beta\right], \\ u_2^0(t) &= \varphi_2\left[t, \vartheta^0(t), \beta\right], \end{aligned} \qquad (21)$$

После того как было найдено векторное оптимальное управление $u^0(t)$, решение задачи оптимизации находим в виде тройки $(u^0(t), V^0(t,x), J\left[u^0(t)\right])$ по формулам

$$V^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_1^0(\tau), u_2^0(\tau)]d\tau\right) z_n(x) \qquad (22)$$

–оптимальный процесс,

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left[V^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^{m} (u_k^0(t))^2 dt, \quad m = 1,2. \qquad (23)$$

– минимальное значение функционала.

Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации и его сходимость

Для построения приближенного оптимального управления s- е приближение решения интегрального уравнения (18) подставим в (17). Тогда s- е приближение $u^s(t) = (u_1^s(t), u_2^s(t))$ векторного оптимального управления $u^0(t)$ определяется по формулам

$$u_k^s(t) = \varphi_k\left[t, \vartheta^s(t), \beta\right], \quad k = 1,2, \quad s = 0,1,2,3,\dots. \qquad (24)$$

Доказано, что s -е приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\left\| u^0(t) - u^s(t) \right\|_{H^m} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\varphi_k^0(\beta))^2} \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \left\| G\left[\vartheta_0(t)\right] - \vartheta_0(t) \right\|_H \qquad (25)$$

и сходится к оптимальному управлению $u^0(t)$ по норме пространства $H^2(0,T)$.

Приближенное векторное управление $u^s(t)$, подставляя в (6), находим s-е приближение $V_s^0(t,x)$ оптимального процесса $V^0(t,x)$, т.е.

$$V_s^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_1^s(\tau), u_2^s(\tau)]d\tau\right) z_n(x).$$

Доказано, что s -е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\left\| V^0(t,x) - V_s^0(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \sqrt{T\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)} \left\| g(t,x) \right\|_H m f_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \left\| G\left[\vartheta_0(t)\right] - \vartheta_0(t) \right\|_H \qquad (26)$$

и сходится к оптимальному процессу $V^0(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Поскольку $V_s^0\ t,x$ определяется как сумма бесконечного функционального ряда, то ее не всегда удается найти. Поэтому на практике целесообразно использовать приближение вида

$$V_s^r(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n\ \tau\ \ f[\tau,u_1^s(\tau),u_2^s(\tau)]d\tau\right]z_n(x),$$

которое назовем конечномерным $s,\ r$ - м приближением оптимального процесса.

Доказано, что $s,\ r$ - е приближение оптимального процесса при $r\to\infty$ сходится к функции $V_s^0(t,x)$ по норме пространства любо $H(Q)$ при м значении s=1,2,3,…

Доказано, что $s,\ r$ - е приближение оптимального процесса при $s,\ r\to\infty$ сходится к функции $V^0(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Поскольку оптимальный процесс имеет приближения $V_s^0(t,x)$ и $V_s^r(t,x)$, то будем различать два вида приближенного значения функционала (1). Значение функционала, вычисленное с учетом s - го приближения оптимального процесса, вычислим по формуле

$$J_s[u^s\ \ t\ \ ]=\int_0^1\left[V_s^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\ \ u_1^s\ \ t\ \ ^2+\ u_2^s\ \ t\ \ ^2\ \ dt,\ \ \beta>0 \tag{27}$$

и назовем s - м приближенным значением функционала.

Значение функционала, вычисленное с учетом $s,\ r$ – го приближения оптимального процесса, вычислим по формуле

$$J_s^r[u^s\ \ t\ \ ]=\int_0^1\left[V_s^r(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\ \ u_1^s\ \ t\ \ ^2+\ u_2^s\ \ t\ \ ^2\ \ dt,\ \ \beta>0 \tag{28}$$

и назовем $s,\ r$ - м приближенным значением функционала.

Доказано, что s - е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left|J\left[u^0\right]-J_s\left[u^s\right]\right|\le$$
$$\le\left(C_1\sqrt{T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)}\left\|g\ \ t,x\ \right\|_H mf_0\varphi_0\ \ \beta\ \ +C_2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\ \ \varphi_k^0\ \ \beta\ \ ^2}\right)\frac{\gamma^s}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0\ \ t\ \ \right]-\vartheta_0\ \ t\ \right\|_H, \tag{29}$$

где $C_1,\ C_2$– положительные постоянные, и сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказано, что s - е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left|J_s\left[u^s\right]-J_s^r\left[u^s\right]\right|\le 2C_3T\left(M\sum_{n=r+1}^{\infty}\psi_n^2+M\sum_{n=r+1}^{\infty}\int_0^T g_n^2\ \ \tau\ \ d\tau\int_0^T f[\tau,u_1^s(\tau),u_2^s(\tau)]d\tau\right), \tag{30}$$

где C_3 – положительное постоянное, и сходится к точному значению функционала $J_s[u^s]$.

Доказано, что $s,\ r$ – е приближенное значение функционала при $s,\ r\to\infty$ сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Пример. Для подтверждения вышеприведенных теоретических выводов рассмотрим модельный пример, где численные расчеты составлены с использованием программы MAT LAB при следующих данных

T=2 , $\xi(x)$=1+x, $g(t,x)=tx$, $f\left[\text{t}, u_1(t), u_2(t)\right]=e^{-u_1^2(t)}+e^{1-u_2^2(t)}$,
$\psi_1(x)=1-$ x , $0<x<1,\ \ 0<t\le 2$,

т.е. требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[V(2,x)-(1+x)\right]^2 dx+\beta\int_0^2\left(u_1^2(t)+u_2^2(t)\right)dt,\quad \beta>0, \tag{31}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t=V_{xx}+tx\left(e^{-u_1^2(t)}+e^{1-u_2^2(t)}\right),\ \ 0<x<1,\ \ 0<t\le 2, \tag{32}$$

$$V(0,x)=1-x,\ \ 0<x<1, \tag{33}$$

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \ 0<t\le 2,\ \ \alpha>0, \tag{34}$$

$\left(u_1(t),u_2(t)\right)\in H^2(0,2)=H(0,2)\times H(0,2)$ – вектор функции управления; H – гильбертово пространство.

Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса находим по формуле (5).

Условия, обеспечивающие монотонности функции $f[t,u_1(t),u_2(t)]$, выполняются, т.е.

$$\frac{\partial f[t,u_1(t),u_2(t)]}{\partial u_1(t)}=-2u_1(t)e^{-u_1^2(t)}\neq 0,\qquad \frac{\partial f[t,u_1(t),u_2(t)]}{\partial u_2(t)}=-2u_2(t)e^{1-u_2^2(t)}\neq 0\,. \tag{35}$$

Функция принципа максимума имеет вид

$$\Pi[t,\omega(t,x),u(t)]=\int_0^1\omega(t,x)g(t,x)dx\left(e^{-u_1^2(t)}+e^{1-u_2^2(t)}\right)-\beta\left(u_1^2(t)+u_2^2(t)\right). \tag{36}$$

Первое условие оптимальности определяется следующими соотношениями

$$\begin{gathered}\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\left(-2u_1(t)e^{-u_1^2(t)}\right)-2\beta u_1(t)=0\\ \int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\left(-2u_2(t)e^{1-u_2^2(t)}\right)-2\beta u_2(t)=0\end{gathered}\ . \tag{37}$$

$$f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1}=\left(-2u_1(t)e^{-u_1^2(t)}\right)\left(\frac{u_1(t)}{-2u_1(t)e^{-u_1^2(t)}}\right)_{u_1}=$$

$$=\left(-2u_1(t)e^{-u_1^2(t)}\right)\left(\frac{e^{u_1^2(t)}}{-2}\right)_{u_1}=\left(2u_1^2(t)e^{-u_1^2(t)}\right)\left(e^{u_1^2(t)}\right)=2u_1^2(t)>0$$
,

$$\begin{vmatrix}-2\beta f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & -2\beta f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2}\\ -2\beta f_{u_2}\left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & -2\beta f_{u_2}\left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2}\end{vmatrix}=(-2\beta)^2 f_{u_1}f_{u_2}\begin{vmatrix}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2}\\ \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2}\end{vmatrix}=, \tag{38}$$

$$=4\beta^2\begin{vmatrix}2u_1^2(t) & 0\\ 0 & 2u_2^2(t)\end{vmatrix}=16\beta^2u_1^2(t)u_2^2(t)>0$$

Первое условие оптимальности имеет вид

$$\beta e^{u_1^2(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t) =$$
$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} g_n(\tau) f\left[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)\right]d\tau - \xi_n\right] e^{-\lambda_n^2(T-t)} g_n(t)$$
$$\beta e^{u_2^2(t)-1} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t) = \tag{39}$$
$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} g_n(\tau) f\left[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)\right]d\tau - \xi_n\right] e^{-\lambda_n^2(T-t)} g_n(t)$$

Поскольку, согласно (38), второе условие оптимальности выполняется для любых управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, в частности и для оптимальных управлений $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$, то векторное оптимальное управление $u^0(t) = (u_1^0(t), u_2^0(t))$ определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений (11).

Для системы (11) выписываем соотношение равных отношений вида

$$\vartheta(t) = -\frac{\beta}{2} e^{u_1^2(t)} = -\frac{\beta}{2} e^{u_2^2(t)-1}.$$

Отсюда имеем следующие равенства

$$u_1(t) = \varphi_1\left[t, \vartheta(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta(t)}{\beta}\right)}, \qquad \left(u_1^2(t) = \ln\left(-\frac{2\vartheta(t)}{\beta}\right)\right)$$
$$u_2(t) = \varphi_2\left[t, \vartheta(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta(t)}{\beta}\right)+1}, \qquad \left(u_2^2(t) = \ln\left(-\frac{2\vartheta(t)}{\beta}\right)+1\right). \tag{40}$$

Согласно равенствам (39) и (40) относительно функции $\vartheta(t)$, имеем интегральное уравнение следующего вида

.

$$\vartheta(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^{2(T-\tau)}} g_n(\tau)\left(-\frac{2\vartheta}{\beta} - \frac{2\vartheta}{\beta}\right)d\tau - \xi_n\right] e^{-\lambda_n^2(T-t)} g_n(t).$$

Это уравнение перепишем в виде

$$\vartheta(t) - \frac{8}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\int_0^T G_n(T,\tau)\vartheta(\tau)d\tau = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)h_n, \tag{41}$$

где $G_n(T,t) = g_n(\mathrm{t})e^{-\lambda_n^{2(T-t)}}$, $h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^{2T}}\psi_n$.

Уравнение (41) является линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода, и его приближенное решение $\vartheta_i(t)$ удовлетворяет оценке

.

$$\left\|\vartheta(t) - \vartheta_i(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0(h(t))\right\|_H. \tag{42}$$

$g_0^2 = 0.03$.

Элементы векторного оптимального управления $u^0(t)$ определим по формулам:

$$u_1^0(t)=\varphi_1\left[t,\vartheta^0(t),\beta\right]=\pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^0(t)}{\beta}\right)},$$
$$u_2^0(t)=\varphi_2\left[t,\vartheta^0(t),\beta\right]=\pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^0(t)}{\beta}\right)+1}, \quad (43)$$

После этого, зная оптимальное управление $u^0(t)$, полное решение задачи нелинейной оптимизации находим в виде тройки $\left(u^0(t), V^0(t,x), J\left[u^0(t)\right]\right)$,

где $$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^{2(t-\tau)}}g_n(\tau)\left(e^{-\left(u_1^0(\tau)\right)^2}-e^{1-\left(u_2^0(\tau)\right)^2}\right)d\tau\right]z_n(x). \quad (44)$$

– оптимальный процесс,

$$J[u^0(t)]=\int_0^T\left[V^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^m\left(u_k^0(t)\right)^2dt, \quad (45)$$

– минимальное значение функционала.

Далее s - е приближение полного решения задачи нелинейной оптимизации находим в виде тройки $\left(u^s(t), V_s^0(t,x), J_s\left[u^s(t)\right]\right)$,

где

$$u_1^s(t)=\varphi_1\left[t,\vartheta^s(t),\beta\right]=\pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^s(t)}{\beta}\right)},$$
$$u_2^s(t)=\varphi_2\left[t,\vartheta^s(t),\beta\right]=\pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^s(t)}{\beta}\right)+1},$$

;

$$V_0^s(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^{2(t-\tau)}}g_n(\tau)\left(e^{-\left(u_1^s(\tau)\right)^2}-e^{1-\left(u_2^s(\tau)\right)^2}\right)d\tau\right]z_n(x).$$

. $$J_s[u^s(t)]=\int_0^T\left[V^s(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^m\left(u_k^s(t)\right)^2dt,$$

Численные расчеты, где была отражена зависимость скорости сходимости приближенного решения от свойств параметров задачи нелинейной оптимизации как по оптимальному управлению, так и по оптимальному процессу, были опубликованы в работе [8]. При этом были использованы отдельные численные результаты.

В этой статье рассмотрены вопросы влияния свойств параметров задачи нелинейной оптимизации на скорость сходимости приближений минимального значения функционала. При этом были использованы отдельные численные результаты работы [8] Вычисления проводились для следующих оценок:

1. Для s-го приближения:
$$\left|J[u^0]-J_s[u^s]\right|=C_1\left\|V^0(T,x)-V_s^0(T,x)\right\|_H+C_2\left\|u^0(t)-u^s(t)\right\|_{H^2}\xrightarrow[s\to\infty]{}0,$$,

где $C_1>0, C_2>0$.

2. Для r- го приближения, которое справедливо при каждом фиксированном . $s=1,2,3,...$

$$\left|J_s[u^s]-J_s^r[u^s]\right|\le C_3\left\|V_s^0(T,x)-V_s^r(T,x)\right\|_H\underset{r\to\infty}{\to}0,\quad C_3=const$$

3. Для конечномерного приближения.

$$\left|J[u^0]-J_s^r[u^s]\right|\le\left|J[u^0]-J_s[u^s]\right|+\left|J_s[u^s]-J_s^r[u^s]\right|\underset{s,r\to\infty}{\to}0$$

.

4.Численный анализ сходимости приближений минимального значения функционала

Таблица 1. Сходимость значений промежуточных приближений к минимальному значению функционала

	$\left|J\left[u^0\right]-J_s\left[u^s\right]\right|\le C_1\left\|V^0(T,x)-V_s^0(T,x)\right\|_H+C_2\left\|u^0\ t\ -u^s\ t\ \right\|_{H^m}$		
s	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	$\alpha=3/2$
1	204.0393	33.4854	15.2868
2	109.2513	10.8418	3.8828
3	58.4978	3.5103	0.98621
4	31.3222	1.1366	0.25049
5	16.7712	0.36799	0.063625
6	8.98	0.11915	0.01616
7	4.8083	0.038577	0.0041047
8	2.5746	0.01249	0.0010426
9	1.3785	0.004044	0.00026481
10	0.73812	0.0013094	6.726e-005

Численные результаты показывают, что скорость сходимости значений промежуточных приближений к минимальному значению функционала зависит от значения параметра α . С ростом значений параметра α скорость сходимости ощутимо увеличивается. Например, при s=7 точность епсилон, равного 0,1, достигается для значения α =1, а это точность для значения α =1,5 достигается при s=5 и т.д.

Таблица 2. Сходимость значений точных приближений к промежуточному приближению минимального значению функционала

	$\left|J_s\left[u^s\right]-J_s^r\left[u^s\right]\right|\le C_3\left\|V_s^0(T,x)-V_s^r(T,x)\right\|_H$		
r	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	$\alpha=3/2$
1	19.1614	17.6621	17.085
10	5.7232	5.4515	5.3494
100	1.7892	1.7892	1.6796

1000	0.565	0.53999	0.53062
10000	0.17864	0.17074	0.16778
100000	0.056491	0.053992	0.053056
1000000	0.017864	0.017074	0.016778
10000000	0.0056491	0.0053992	0.0053056
100000000	0.0017864	0.0017074	0.0016778
1000000000	0.00056491	0.00053992	0.00053056

Численные результаты этой таблицы показывают, что скорость сходимости значений промежуточных приближений к минимальному значению функционала зависит от значения параметра α . С ростом значений параметра α скорость сходимости увеличивается, но очень медленно.

Таблица 3. Сходимость значений точных приближений к минимальному значению функционала

	$\left\|J\left[u^0\right]-J_s^r\left[u^s\right]\right\| \le \left\|J\left[u^0\right]-J_s\left[u^s\right]\right\|+\left\|J_s\left[u^s\right]-J_s^r\left[u^s\right]\right\|$			
S	r = 1	r = 10	r = 100	r = 1000
1	32.3718	20.6362	16.9664	15.8174
2	20.9678	9.2322	5.5624	4.4134
3	18.0712	6.3356	2.6658	1.5168
4	17.3355	5.5999	1.9301	0.78111
5	17.1487	5.413	1.7432	0.59424
6	17.1012	5.3655	1.6958	0.54678
7	17.0891	5.3535	1.6837	0.53472
8	17.0861	5.3504	1.6807	0.53166
9	17.0853	5.3496	1.6799	0.53088
10	17.0851	5.3495	1.6797	0.53068

Приведенные здесь численные результаты показывают изменения скорости сходимости промежуточных приближений к минимальному значению функционала при фиксированном значении одного из индексов s и r.

Анализ численных результатов, приведенных в таблицах, показывает, что скорость сходимости значений промежуточных приближений к минимальному значению функционала зависит от значения параметра α , и с ростом значений параметра α скорость сходимости увеличивается.

Заключение

Установлено, что скорость сходимости приближений функционала к точному значению существенно зависит от значений параметра α. Аналогично можно показать зависимость скорости сходимости от других параметров задачи. Отметим, что одной из особенностей рассматриваемой задачи является то обстоятельство, что компоненты векторного оптимального управления определяются с использованием свойства равных отношений, который имеет место только для задач нелинейной оптимизации в случае, когда скалярная функция внешнего воздействия нелинейно зависит от векторного управления.

Литература

1. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 2017. – 288с.
2. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузными процессами. – М.: Наука, 1974. – 486с.
3. Akylbek Kerimbekov, Elmira Abdyldaeva. Optimal Distributed Control for the processes of Oscillation Described by Fredholm Integro-Differenrial Equations. Eurasian Mathematical Journal Dergisi, 6(2), 2015. ISSN 2077-9879. 18–40 pp.
4. Elmira Abdyldaeva, Zarina Kabaeva, and Kubat Karabakirov. Numerical analysis of convergence rate of approximation solutions to boundary value problem for oscillation processes. Third International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2019). Istanbul, Turkey. 4-8 September, 2019. AIP Conference Proceedings 2183.070005. (2019); https://doi.org/10.1063/1.5136167.
5. Керимбеков, А. К. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при точечном управлении / А. К. Керимбеков, У. Э. Дуйшеналиева // Проблемы автоматики и управления. – 2016. – № 2(31). – С. 57-62. – EDN XIAAIF.
6. Керимбеков А., Кабаева З.С. Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящем векторном управлении. //Proceedings VI International Scientific conference. Part I(Secnions1,2,3,4). Aktobe’s K.Zhubanov State University 14-17 October 2012.Aktobe, s.100–104.
7. Керимбеков А., Кабаева З.С. Приближенное решение задач нелинейной оптимизации тепловых процессов. // Научный журнал. МОиН, Казахстанская Республика, Изденис №1/2009. – Алматы. –С. 196–200.
8. Кабаева З.С. О влиянии значения параметров на скорость сходимости приближенного решения задачи оптимального управления тепловым процессом. //Наука, новые технологии иии инновации Кыргызстана. – №5. – 2017. – Бишкек. – С. 166–170.