

УДК 004.8: 621.315.23

Бакасова А. Б. bakasovaaina@mail.ru

Институт машиноведения и автоматизации Национальной академии наук Кыргызской Республики. Кыргызстан, Бишкек, проспект Чуй, 265

Асан уулу Аскам asanaskat@gmail.com

Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан, Бишкек, проспект Ч. Айтматова, 66

ОБЗОР АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ОБСТАНОВКИ НА ВЫСОКОВОЛЬТНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДСТАНЦИИ

В области электромагнетизма краевые задачи – это задачи, для которых электромагнитное поле в заданной области пространства определяется из знания поля над границей области. Для решения краевых задач обычно используются традиционные численные методы, такие, как метод конечных разностей (МКР) во временной области и метод конечных элементов (МКЭ). Однако эти методы включают дискретизацию области для сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений более высокого порядка и поиска решения для них. Как известно, эти методы не являются локальными, т.е. они не дают значения решения непосредственно в произвольной точке, где необходимо определить поле, а его значение должно извлекаться из полного решения поля, и, следовательно, не поддаются параллельной обработке. В связи с этим в статье рассмотрено применение нейронных сетей для краевых задач с граничным условием Дирихле и со смешанными граничными условиями.

Ключевые слова: электромагнитное поле, электромагнитная совместимость, электромагнитная обстановка, краевые задачи, граничные условия, искусственный интеллект, нейронная сеть.

Введение

Вторичное оборудование высоковольтных электрических подстанций (ВЭП) на протяжении всего срока службы подвергается электромагнитным воздействиям разного вида. Невыполнение условий электромагнитной совместимости (ЭМС) приводит к повреждению вторичного оборудования, неправильным действиям (отказам, излишним или ложным срабатываниям) устройств релейной защиты и автоматизации, перекрытию изоляции кабелей вторичной коммутации и клемм шкафов вторичной коммутации, сбою в работе автоматизированных рабочих мест персонала и т.д., существенно снижает надежность работы энергообъекта.

Критерием выполнения условий ЭМС является обеспечение электромагнитной обстановки, при которой наибольшие возможные уровни электромагнитных воздействий всех видов на объекте электросетевого хозяйства не превышают допустимых значений для каждого конкретного вторичного оборудования.

Для обеспечения электромагнитной обстановки (ЭМО) на этапе проектирования ВЭП необходимы расчеты по определению электромагнитных полей в заданной области пространства.

Постановка задачи

Выбор альтернативного метода моделирования ЭМО на основе сравнительного анализа численных методов решения краевых задач электромагнетизма.

Решение задачи

Численный метод, основанный на нейронной сети (НС), обеспечивает альтернативный подход к решению краевых задач и может быть эффективно реализован на параллельных архитектурах, он может выиграть от достижений в компьютерных

архитектурах на основе искусственного интеллекта (ИИ) [1,2]. Основными преимуществами численного метода на основе НС являются дискретные точки данных, в которых вычисляется поле, которые могут быть неструктурированными, и, следовательно, вопросы построения сетки (однородной или неоднородной) не являются фактором, при котором решения находятся в дифференцируемой закрытой аналитической форме, что позволяет избежать необходимости интерполяции между точками данных, где решения получены с использованием других методов. Кроме того, разрабатываются и внедряются компьютерные архитектуры, оптимизированные для более эффективного выполнения задач обучения и логических выводов. В [3] представлен метод, основанный на использовании НС для решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, где рассматриваются только краевые задачи с граничным условием Дирихле на однородной прямоугольной сетке [4].

В этой работе вычисление поля на основе НС сформулировано и продемонстрировано для задач электромагнетизма, где была расширена задача, рассмотренная в [3], по двум направлениям: во-первых, анализируются краевые задачи со смешанными граничными условиями, во-вторых, исследуется неоднородная обучающая сетка, чтобы продемонстрировать, что этот метод не ограничен дискретизацией домена как традиционный метод.

Разработан, реализован и исследован метод на основе НС для решения уравнения Лапласа с граничным условием Дирихле и уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. Численные исследования проводились для того, чтобы понять эффективность метода, основанного на НС, и обеспечить качественное понимание различных задействованных параметров.

Рассмотрим краевые задачи, где электромагнитное поле $\psi(x)$ задается линейным дифференциальным уравнением в частных производных (УЧП) второго порядка с учетом граничного условия краевых задач:

$$G(x, \psi(x), \nabla \psi(x), \nabla^2 \psi(x)) = 0, \quad \forall x \in D. \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, где R^n — независимая переменная в области $D \subset R^n$, а $\psi(x)$ —

неизвестное (скалярнозначное) решение, $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ — оператор набла. Граничные

условия можно разложить в виде $\partial D = \partial_d D \cup \partial_\tau D$, а $\partial_d D$ часть ∂D , где задаются существенные граничные условия.

Для решения этих краевых задач методом на основе НС строится пробная форма решения, которая записывается в виде суммы двух частей: первая часть удовлетворяет граничным условиям и не содержит настраиваемых параметров, а вторая часть включает нейронную сеть с прямой связью. С регулируемыми параметрами строится так, чтобы не вносить вклад в граничные условия:

$$\psi_i(x, W, b) = \hat{\psi}(x) + F(x)N(x, W, b). \quad (2)$$

$N(x, W, b)$ представляет собой НС с прямой связью с весами W и смещениями b . $F(x)$ выбирается таким образом, чтобы вторая часть не вносила вклад в граничные условия.

В таком случае задача расчета поля сводится к изучению параметров НС, W и b , что делается путем предварительного преобразования уравнения (1) в дискретизированную версию и применения его в дискретной области:

$$\hat{D} = \{x^{(i)} \in D; i = 1, \dots, m\}, \quad (3)$$

$$G(x^{(i)}, \psi(x^{(i)}), \nabla \psi(x^{(i)}), \nabla^2 \psi(x^{(i)})) = 0, \quad \forall x^{(i)} \in D, \quad (4)$$

а затем обучение НС, где ошибка УЧП, соответствующая $x^{(i)}$, должна стать равной нулю.

$$W, b = \arg \min_{W, b} G(x^{(i)}, \psi_t(x^{(i)}, W, b), \nabla \psi_t(x^{(i)}, W, b), \nabla^2 \psi_t(x^{(i)}, W, b))^2, \quad (5)$$

Здесь следует обратить внимание, что вычисление этой функции принадлежности включает не только выход сети, но и производные выхода по отношению к любому из ее входов.

Архитектура нейронной сети. Нейронная сеть, которая будет реализована для решения данной задачи, представляет собой трехслойную сеть с входным слоем ($n+1$ узлов), скрытым слоем (H узлов) и выходным слоем (1 узел), как показано на рис.1. Сигмовидная функция ($\sigma(\cdot)$) будет использоваться как функция активации для скрытого слоя [5]:

$$\begin{aligned} h &= W^{[1]}x + b^{[1]} \\ N &= W^{[2]}\sigma(h), \end{aligned} \quad (6)$$

где $W^{[1]} \in R^{H \times n}$, $W^{[2]} \in R^{1 \times H}$ и $h, b^{[1]} \in R^{H \times 1}$. $W_j^{[1]}$ используется для обозначения j -го столбца $W^{[1]}$.

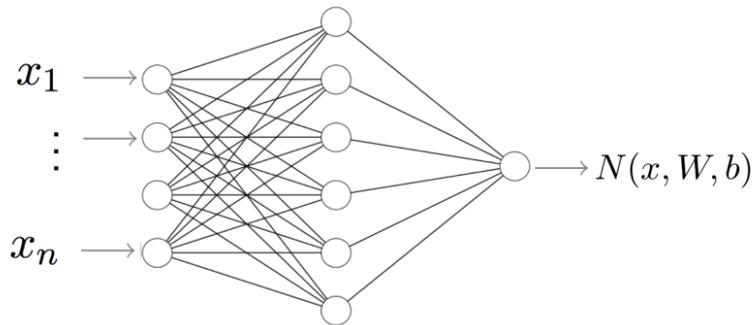


Рисунок 1—Архитектура нейронной сети с n - входными узлами, H -скрытыми узлами и 1- выходным узлом

Вычисление производной выходной сети. Для этой нейронной сети можно показать, что

$$\frac{\partial^{\lambda_1}}{\partial x_1^{\lambda_1}} \frac{\partial^{\lambda_2}}{\partial x_2^{\lambda_2}} \dots \frac{\partial^{\lambda_n}}{\partial x_n^{\lambda_n}} N = \sum_{i=1}^H W_i^{[2]} \left(\prod_{j=1}^n (W_{ij}^{[1]})^{\lambda_j} \right) \sigma^{(\lambda)}(h_i), \quad (7)$$

где $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ и $\sigma^{(\lambda)}(h_i)$ обозначает производную сигмоиды λ -го порядка.

Следовательно, производная первого порядка от N по любому входному параметру x_j определяется выражением

$$\frac{\partial N}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^H W_i^{[2]} (W_{ij}^{[1]}) \sigma^{(1)}(h_i) = (W^{[2]} \circ W_j^{[1]}) \sigma^{(1)}(h_i), \quad (8)$$

что можно интерпретировать как результат нейронной сети с прямой связью той же схемы, где функция активации для скрытого слоя задается производной первого порядка от сигмоиды вместо сигмоиды, а $W_i^{[2]}$ заменен на $W^{[2]} \circ W_j^{[1]}$.

Точно так же производная второго порядка N по x_j может быть интерпретирована как выход нейронной сети с прямой связью с той же архитектурой, где функция активации для скрытого слоя задается производной второго порядка сигмоиды и $W_i^{[2]}$ заменено на $W^{[2]} \circ (W_j^{[1]} \circ W_j^{[1]})$.

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^H W_i^{[2]} (W_j^{[1]})^2 \sigma^{(2)}(h_i) = (W^{[2]} \circ W_j^{[1]} \circ W_j^{[1]}) \sigma^{(2)}(h_i). \quad (9)$$

Для функции принадлежности, которая включает выход сети, а также производные от выхода сети, эти интерпретации становятся чрезвычайно полезными во время обучения, когда функция принадлежности оптимизируется [6].

Сформулированный метод реализован для нахождения решения двух краевых задач - уравнения Лапласа с граничным условием Дирихле и уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. В обоих примерах областью выбран квадрат $D = [0; 1] [0; 1]$. Нейронная сеть была реализована с использованием структуры Tensor Flow и оптимизирована с использованием стохастического градиентного спуска (СГС) с медленной скоростью обучения и регуляризацией [7].

Уравнение Лапласа с граничным условием Дирихле

Распределение электростатического потенциала внутри прямоугольной области, где задан потенциал на границе, задается уравнением Лапласа с граничным условием Дирихле в двумерной прямоугольной области. Метод на основе НС используется для вычисления решения и сравнения с аналитическим решением [3]:

$$\nabla^2 \psi(x) = 0, \quad \forall x \in D. \quad (10)$$

Граничные условия:

$$\psi(x) = 0, \quad \forall x \in (x_1, x_2) \in \begin{cases} \partial D |x_1| = 0 \\ \partial D |x_1| = 1 \\ \partial D |x_2| = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sin(\pi x_1), \quad \forall x \in (x_1, x_2) \in \partial D |x_2| = 1, \quad (11)$$

Аналитическое решение:

$$\psi_a(x) = \frac{1}{e^\pi - e^{-\pi}} \sin(\pi x_1) (e^{\pi x_2} - e^{-\pi x_2}). \quad (12)$$

Пробное решение, построенное для метода на основе НС:

$$\psi_i(x) = x_2 \sin(\pi x_1) + x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)N(x, W, b). \quad (13)$$

В этом случае функция принадлежности определяется выражением:

$$-\pi^2 x_2 \sin(\pi x_1) +$$

$$x_2(1-x_2) \left(x_1(1-x_1) \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} + (2-4x_1) \frac{\partial N}{\partial x_1} - 2N \right) +$$

$$x_1(1-x_1) \left(x_2(1-x_2) \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} + (2-4x_2) \frac{\partial N}{\partial x_2} - 2N \right) \quad (14)$$

Аналитическое решение (рис. 2) и решение на основе НС (рис. 3), рассчитанные путем минимизации функции принадлежности при $K=16$ и $H=15$, показаны ниже.

Абсолютное значение разницы между двумя решениями $|\psi_a(x) - \psi_t(x)|$ также изображено на рис. 4.

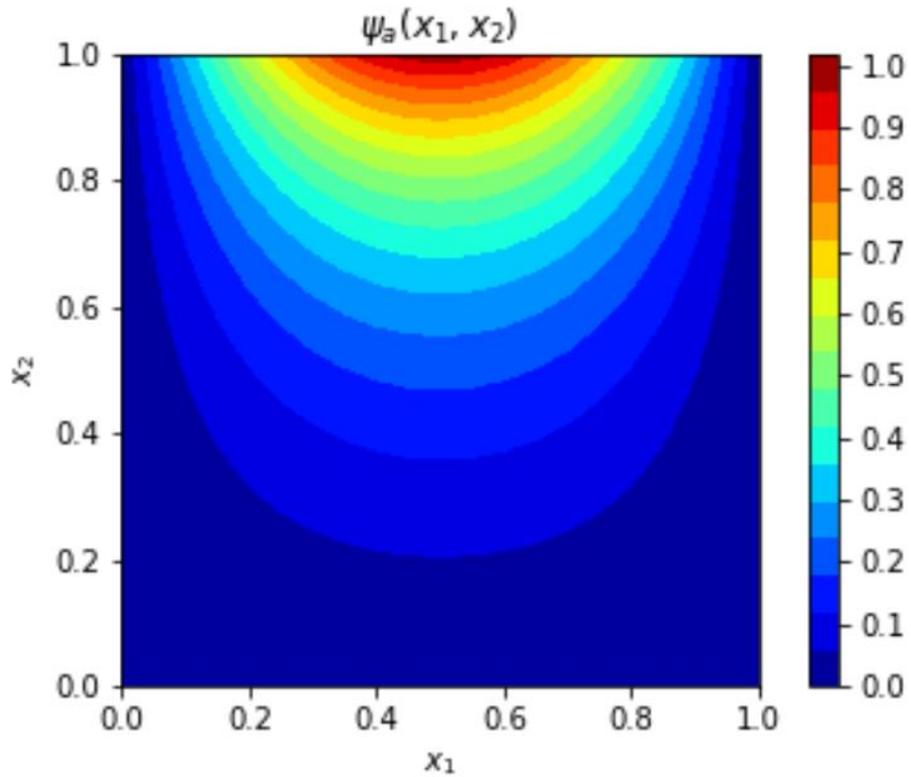


Рисунок 2 — Абсолютное решение

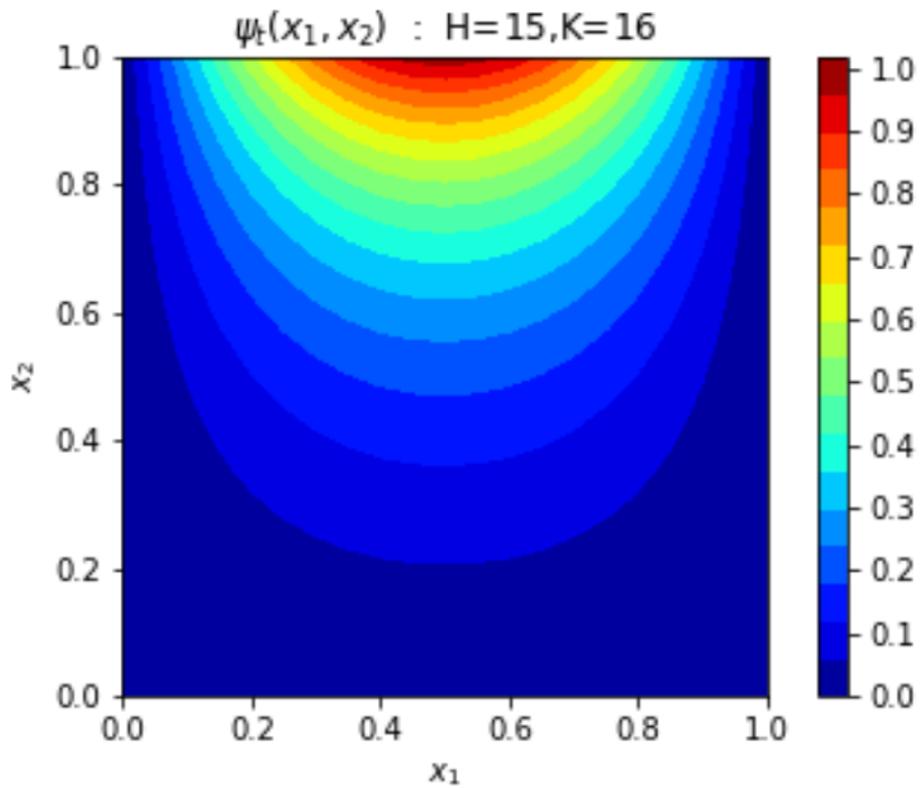


Рисунок 3 — Решение на основе нейронной сети

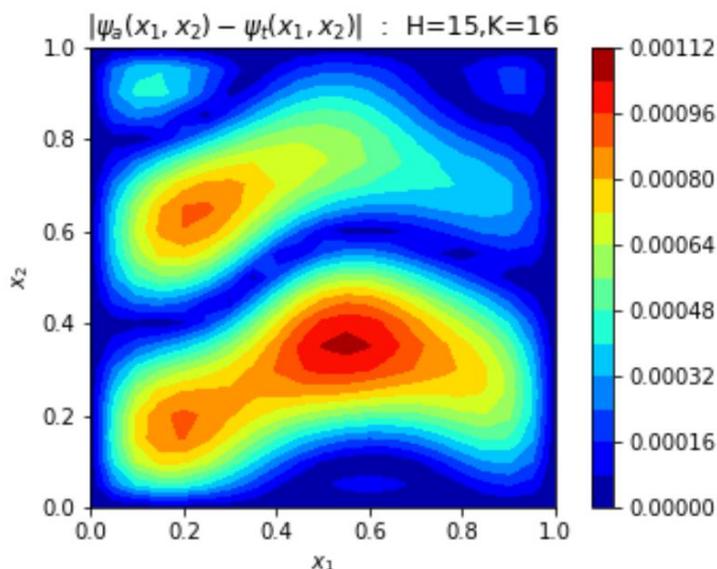


Рисунок 4 — Уравнение Лапласа: E_{abs}

Уравнение Пуассона со смешанным граничным условием

Здесь рассматривается электростатический потенциал при наличии распределения заряда внутри прямоугольной области, где на участке границы задан потенциал, а на остальной части задан градиент потенциала [8]:

$$\nabla^2 \psi(x) = (2 - \pi^2 x_2^2) \sin(\pi x_1), \quad \forall x \in D. \quad (15)$$

Смешанные граничные условия:

$$\psi(x) = 0, \quad \forall x \in (x_1, x_2) \in \begin{cases} \partial D|_{x_1} = 0 \\ \partial D|_{x_1} = 1 \\ \partial D|_{x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_2} = 2 \sin(\pi x_1), \quad \forall x \in (x_1, x_2) \in \partial D_n|_{x_2} = 1 \quad (16)$$

Аналитическое решение:

$$\psi_a(x) = x_2^2 \sin(\pi x_1) \quad (17)$$

Пробное решение, построенное для метода на основе НС:

$$\psi_t(x) = 2x_2 \sin(\pi x_1) + x_1(1-x_1)x_2 N(x_1, x_2, W, b) - x_1(1-x_1)x_2 \left[N(x_1, 1, W, b) + \frac{\partial N(x_1, 1, W, b)}{\partial x_2} \right] \quad (18)$$

В этом случае функция принадлежности определяется выражением:

$$\begin{aligned}
 & -(2 - \pi^2 x_2) \sin(\pi x_1) - 2\pi^2 x_2 \sin(\pi x_1) + \\
 & x_2 x_1 (1 - x_1) \left[\frac{\partial^2 N(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 N(x_1, 1)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^3 N(x_1, 1)}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right] + \\
 & 2x_2 (1 - 2x_1) \left[\frac{\partial N(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial N(x_1, 1)}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 N(x_1, 1)}{\partial x_1 \partial x_2} \right] - \\
 & 2x_2 \left[N(x_1, x_2) - N(x_1, 1) - \frac{\partial N(x_1, 1)}{\partial x_2} \right] + \\
 & x_2 x_1 (1 - x_1) \left[\left[\frac{\partial^2 N(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right] + 2x_1 (1 - x_1) - \left[\frac{\partial N(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Аналитическое решение и решение на основе НС, вычисленные путем минимизации функции принадлежности при $K=16$ и $H=15$, показаны ниже. Абсолютное значение разницы между двумя решениями $|\psi_a(x) - \psi_t(x)|$ при максимальном значении равно 0:0056 и представлено на рис. 5, что демонстрирует хорошее соответствие между двумя решениями.

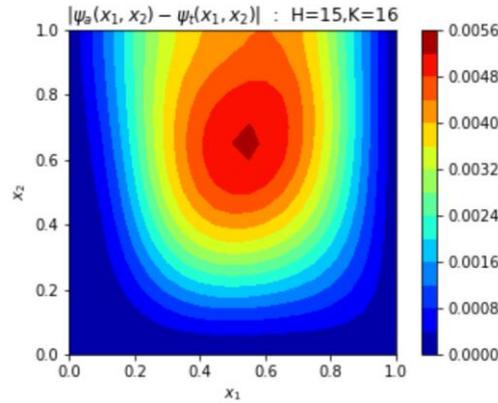


Рисунок 5 — Уравнение Пуассона: E_{abs}

Численное исследование свойств ошибок

Пусть $\hat{D}_{train} = x_{train}^{(i)} \in D; i = 1, \dots, m_{train}$ и $\hat{D}_{test} = x_{test}^{(i)} \in D; i = 1, \dots, m_{test}$ представляют собой набор обучающих и тестовых данных соответственно. Для случая равномерной дискретизации в 2D-области с разрешением обучающей сетки K , $m_{train} = K^2$, а также для неравномерной дискретизации, разрешение обучающей сетки, K , означает, что $m_{train} = K^2$. Разрешение сетки для всех экспериментов остается фиксированным на уровне 21, так как набор тестовых данных имеет размер $m_{test} = 441$, где 2D-область дискретизирована равномерно.

Показатели производительности, которые будут использоваться в этом исследовании, представляют собой абсолютное значение разницы между аналитическим решением и решением на основе НС:

$$E_{abs} = |\psi_a(x) - \psi_t(x)| \tag{20}$$

и норма относительной ошибки, как указано:

$$E_{norm} = \frac{\sqrt{\sum_x (\psi_a(x) - \psi_t(x))^2}}{\sqrt{\sum_x (\psi_a(x))^2}} \tag{21}$$

E_{abs} дает нам информацию о пространственном распределении расхождения между аналитическим и основанным на НС решением, в то время как E_{norm} рисует совокупную картину по всей области.

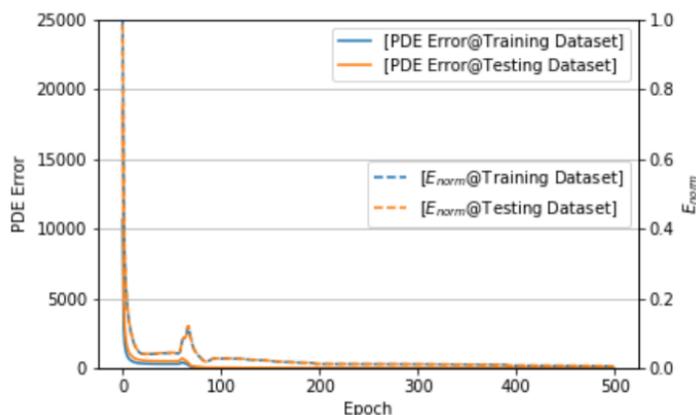


Рисунок 6 — Прогрессирование ошибки УЧП и E_{norm} во время обучения

Существует тонкий, но важный момент, который необходимо понимать при решении краевых задач с использованием НС, т. е. обучение управляется функцией принадлежности (или ошибкой УЧП), а производительность измеряется ошибкой в вычисляемом поле [2].

Во время оптимизации НС УЧП более точно удовлетворяется в точках обучения для каждой успешной эпохи обучения. Но уменьшение ошибки УЧП в обучающих точках не дает очевидной гарантии того, что решение, основанное на НС, сходится к аналитическому решению даже в обучающих точках. Кроме того, НС с плохим обобщением из-за переобучения может не удовлетворять УЧП в областях предметной области, удаленных от точек обучения, и, следовательно, решение на основе НС расходится с аналитическим решением в таких точках. Теорема о сходимости показывает, что разница между аналитическими решениями и решениями, основанными на НС, будет уменьшаться везде в области, когда ошибка УЧП также уменьшается повсюду в области [9]. На практике, однако, нельзя гарантировать, что ошибка УЧП будет уменьшаться во всем домене во время обучения. Однако графики сходимости, такие как показаны на рис. 6 для уравнения Лапласа, когда $H = 15$; $m_{train} = 256$; $m_{test} = 441$, следует использовать для отслеживания развития ошибки УЧП и E_{norm} во время обучения, чтобы убедиться, что ошибка обучения и набора тестов уменьшается вместе с ошибкой УЧП во время обучения. Разрешение обучающей сетки, количество скрытых узлов, распределение и размер набора обучающих данных могут быть изменены соответствующим образом, если это необходимо, чтобы обеспечить снижение E_{norm} , а также ошибки УЧП во время обучения [10].

Зависимость ошибки от разрешения обучающей сетки, K . Нейронная сеть обучалась для различных комбинаций числа скрытых узлов, H и разрешения обучающей сетки, K для краевых задач с уравнением Лапласа с граничным условием Дирихле. Для фиксированного $H = 15$ изменение ошибки тестовой выборки при разрешении обучающей сетки $K = 8; 16; 24; 30$ и 40 показано на рис.7. При увеличении K с 8 до 16 E_{abs} становится относительно уже, а E_{norm} уменьшается с 0,015 до 0,002, но уровень за пределами этого разрешения. Хотя интуитивно ожидается, что ошибка тестового набора улучшается с увеличением размера обучающего набора, поскольку модель обучения лучше обобщается, в этом конкретном случае это также можно вывести в контексте теоремы о сходимости. Поскольку ошибка УЧП сводится к минимуму в большем количестве обучающих точек, сходимость между аналитическим решением и решением на основе НС становится лучше.

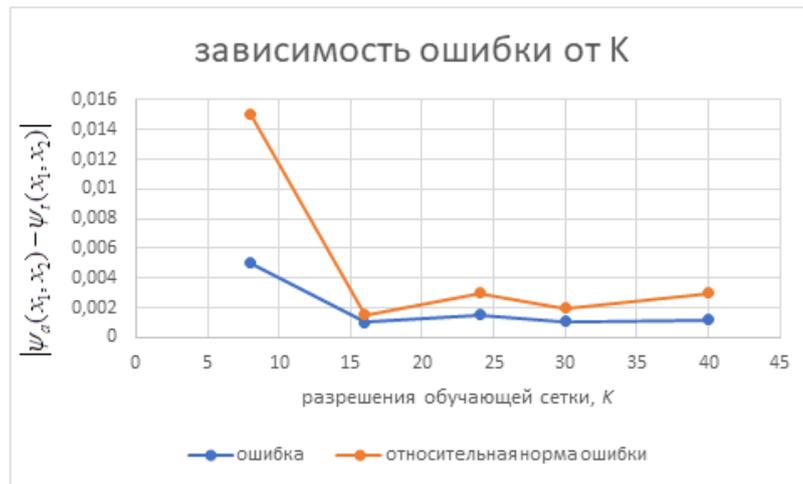


Рисунок 7 — Зависимость ошибки от разрешения обучающей сетки, K

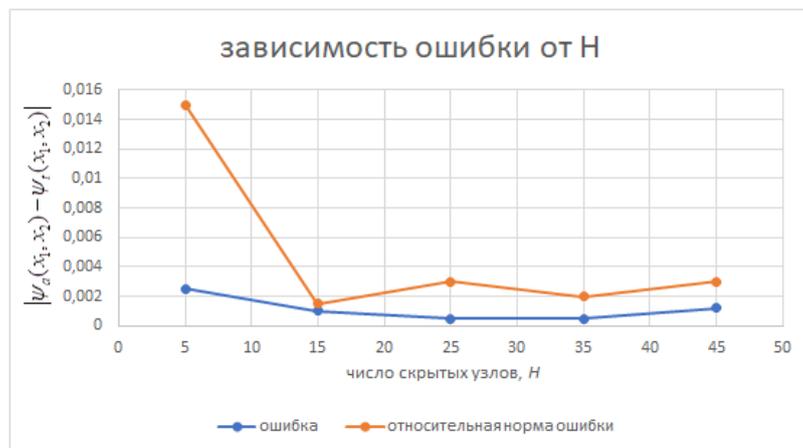


Рисунок 8 — Зависимость ошибки от числа скрытых узлов, H

Зависимость ошибки от количества скрытых узлов, H. Чтобы понять зависимость ошибки тестового набора от количества скрытых узлов, H, решение на основе НС вычисляется для $H = 5; 10; 15; 25; 35$ и 45 , для фиксированного $K = 16$. На рис. 8 показано, как ошибка значительно улучшается при увеличении H с 5 до 15, но после этого остается примерно такой же. Поскольку вычислительные требования растут с увеличением количества скрытых узлов и / или разрешения обучающей сетки, и только предельный выигрыш за пределами $H = 15; K = 16$; следовательно, этот выбор количества скрытых узлов и разрешения обучающей сетки считается подходящим для рассматриваемой проблемы.

Зависимость ошибок от неоднородной обучающей сетки

Как упоминалось ранее, одним из основных преимуществ метода на основе НС является то, что набор данных для обучения и тестирования может быть полностью неструктурированным, и, следовательно, они не страдают от проблемы создания сетки, как другие численные методы. Чтобы продемонстрировать это, исследуются четыре различные структуры сетки, показанные на рис. 9, где указана каждая точка обучения в наборе обучающих данных, $m_{train} = 256$. На рис. 9а показана «Сетка-1», равномерная дискретизация, которая будет использоваться в качестве основы в этом эксперименте. Два структурированных, но разных пространственных распределения рассматриваются в «Сетке-2», показанной на рис. 9б, в которой точки обучения плотно распределены ближе к границе и грубо удалены от нее, а пространственное распределение показывает противоположную тенденцию в «Сетке-3», показанной на рис. 9в. На рис. 9г показана «Сетка-4», обучающий набор данных, сгенерированный равномерным случайным распределением в $[0; 1] [0; 1]$.

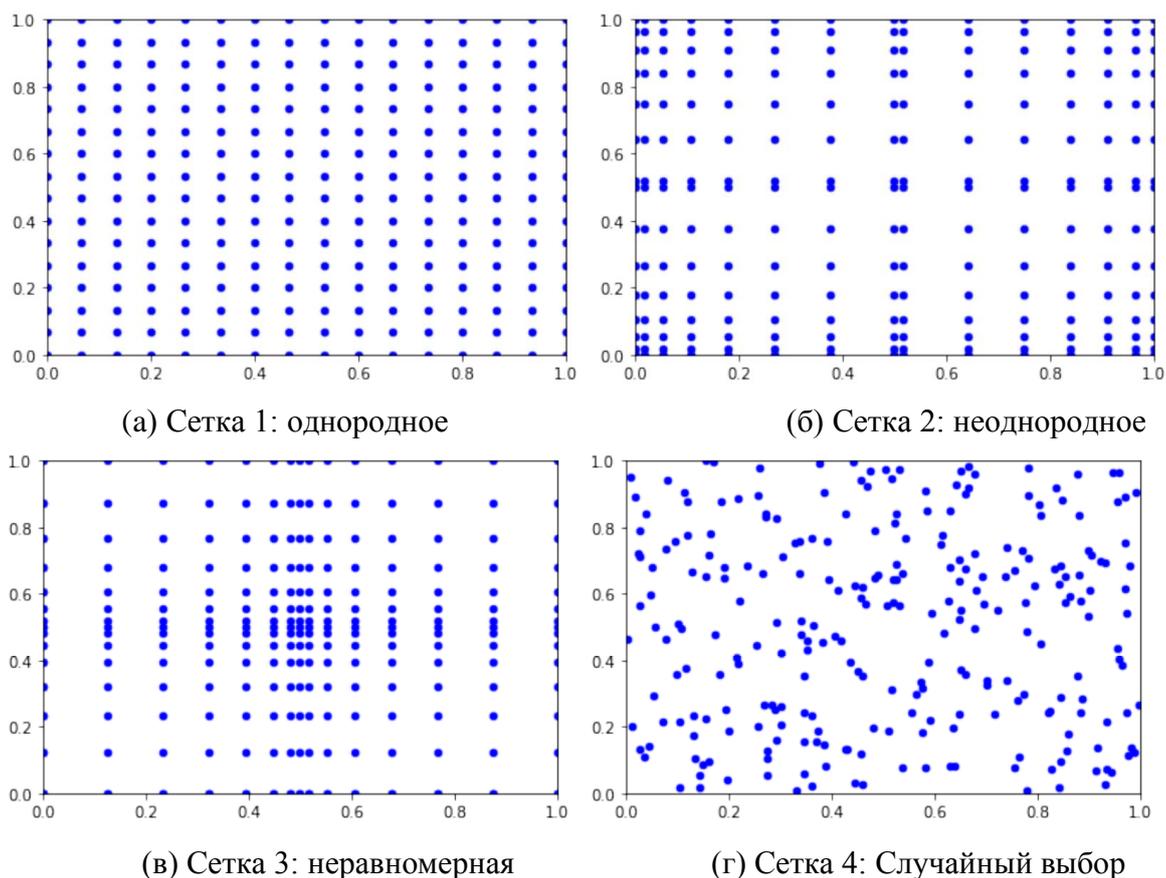


Рисунок 9 — Четыре различных пространственных распределения исследованных точек обучающих данных

На рис. 10 показана вычисленная ошибка набора тестов для четырех сеточных структур. «Сетка-4» имеет наилучшие показатели по ошибкам, за ней следует «Сетка-1», а «Сетка-2» и «Сетка-3» демонстрируют аналогичные показатели. Это может быть связано с тем, что распределение обучающего набора данных «Сетка-4» очень похоже на распределение тестового набора данных по сравнению с другими распределениями, поскольку тестовая сетка представляет собой равномерную дискретизацию с разрешением сетки 21. Это демонстрирует эффективность метода на основе НС преимущества при работе с неструктурированными данными и его потенциал для применения к краевым задачам с изогнутыми или неправильными границами [11].

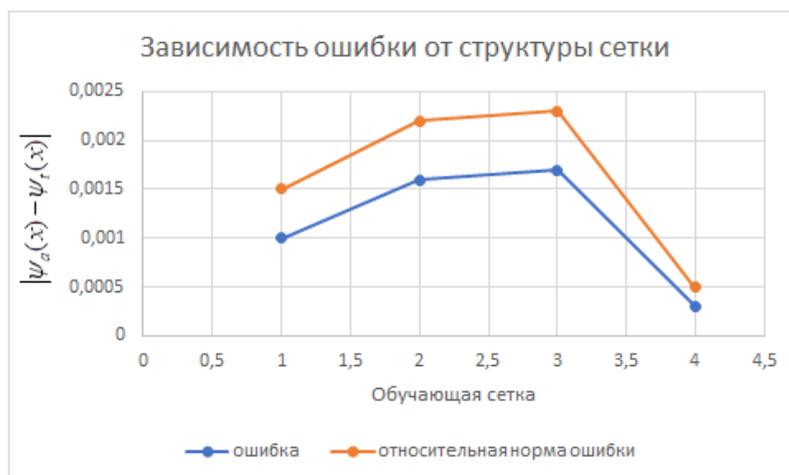


Рисунок 10 — Зависимость ошибки от распределения обучающего набора данных

Заключение

В этом исследовании был сформулирован, реализован и проверен численный метод на основе НС для двух примеров с граничными условиями Дирихле и смешанными граничными условиями. Были проведены численные эксперименты для оценки зависимости показателя ошибки от разрешения обучающей сетки и количества скрытых узлов. Чтобы продемонстрировать достоинства этого метода, также представлены численные результаты для структурированного и неструктурированного обучающего набора данных.

Литература

1. I. E. Lagaris, A. Likas and D. I. Fotiadis, "Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations," in IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 9, no. 5, pp. 987-1000, Sep 1998. doi: 10.1109/72.712178
2. К. С. Макфолл и Дж. Р. Махан, «Метод искусственной нейронной сети для решения краевых задач с точным удовлетворением произвольных граничных условий», в IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 20, нет. 8, стр. 1221-1233, август 2009 г. doi: 10.1109/TNN.2009.2020735
3. M. M. Chiaramonte, M. Kiener. Solving differential equations using neural networks. <http://cs229.stanford.edu/proj2013/ChiaramonteKiener-SolvingDifferentialEquationsUsingNeuralNetworks.pdf>.
4. СР. Харрингтон, Роджер. (1961). Гармоническое электромагнитное поле во времени. 10.1109/9780470546710.
5. Бакасова, А. Б. Применение нейронных сетей в задачах электромагнитных помех / А. Б. Бакасова, А. Асан Уулу // Проблемы автоматизации и управления. – 2022. – № 1(43). – С. 95-103. – EDN DJPYDH.
6. Верзунов, С. Н. Система искусственного интеллекта для онлайн мониторинга подземных силовых кабельных линий на основе технологий глубокого обучения / С. Н. Верзунов // Проблемы автоматизации и управления. – 2021. – № 3(42). – С. 83-94. – EDN DVCIKE.
7. Р. Йентис и М. Э. Заглул, «Реализация СБИС локально связанной нейронной сети для решения уравнений в частных производных», в IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43, нет. 8, стр. 687-690, август 1996 г. doi: 10.1109/81.526685
8. J. Han. Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations <ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/camreport/cam17-41.pdf>
9. К. Макфолл, Метод искусственной нейронной сети для решения краевых задач, Германия, Saarbrcken: VDM Verlag, 2006. https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/10506/mcfalLKevin_C200605_phd.pdf (Дата обращения 25.04.2022)
10. Библиотеки, используемые в этом проекте: Tensor Flow: <https://www.tensorflow.org/>; NumPy: <http://www.numpy.org/>; Matplotlib: <https://matplotlib.org/>; (Дата обращения 01.04.2022)
11. SH Kolluru, Preliminary Investigations of a Stochastic Method to solve Electrostatic and Electrodynamics Problems. Masters Thesis, UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS AMHERST, August 2008, <http://scholarworks.umass.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1261&context=theses>