

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 517.977.54-57

Ж.Ш. Шаршеналиев

Институт автоматики и информационных технологий НАН КР

Бишкек, Кыргызстан.

E-mail: avtomatika_nankr@mail.ru

О ПРОБЛЕМАХ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ И АГРЕГИРОВАННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В статье рассматриваются особенности синтеза оптимальных и агрегированных регуляторов в динамических SISO и MIMO системах.

Ключевые слова: синтез регуляторов, физическая теория управления, АКОР, АКАР.

Основным устройством в структуре динамических систем управления является регулятор. Исторически значительно важные результаты решения задачи простейших регуляторов были разработаны еще в 40-50 годах XX века в работах В.В. Солодовникова, Б.Н. Петрова, Т. Чесната, А.А. Фельдбаума и др., посвященных проблеме выбора вида и параметров корректирующих устройств, главным образом для линейных SISO объектов.

Практически это такие объекты, которые имеют адекватное описание в виде дифференциальных уравнений и передаточных функций. Общеизвестны регуляторы, широко применяемые на практике для управления «простыми» объектами: пропорциональные (П), пропорционально-дифференциальные (ПД), пропорционально-интегральные (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальные (ПИД) регуляторы, функционирующие с учетом параметрических и структурных изменений в системе.

Рассмотрим следующую математическую постановку задачи управления: пусть для движущегося объекта управления вида «летательный аппарат» (ЛА), имеем модель в виде

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad (1)$$
$$i = \overline{1, n}, m \leq n,$$

где x_i – параметры полета: высота, скорость полета ЛА, угол тангажа и т.д.

u_r – управляющие воздействия ($r = \overline{1, m}$),

f_i – составляющие действующих обобщенных сил.

Различные задачи управления объектом (1) сводятся к двум основным постановкам задачи.

- 1. Задача программирования траекторий движения**
- 2. Задача синтеза регуляторов**

Обе постановки позволяют стабилизировать движение объекта вдоль программной траектории с помощью выбранного критерия качества.

Согласно задаче программирования траекторий в системе ищутся такие управления $U_{r \text{ пр}}(t)$ ($r = \bar{l}, \bar{m}$), которые переводят объект из начального состояния x_{i0} в конечное состояние x_{ik} с минимизацией некоторого критерия оптимальности, например, минимума «энергосберегающих» критериев, минимума затрат энергии или топлива, минимума времени перевода и т.д.

Об «Энергосберегающих» критериях качества

Допуская, что система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решений, ставится задача оптимального управления: найти допустимое управление U , обеспечивающее перевод системы (1) из начального состояния в конечное состояние $x(t)$ и минимизирующее общий критерий качества

$$J_{\min} = \int_0^T f_0(x, u) dt. \quad (2)$$

Частными критериями - энергосберегающими критериями качества являются [1]:

$$J_1 = \int_0^T dt \text{ – минимизация времен и переходных процессов;}$$

$$J_2 = \int_0^T \sum_{k=1}^n c_k^2 |u_k| dt \text{ – минимизация расхода энергии;}$$

$$J_3 = \int_0^T \left[\sum_{k=1}^n a_k^2 x_k^2 + c_k^2 u_k^2 \right] dt \text{ – минимизация расхода энергии при высокой точности управления;}$$

$$J_4 = \int_0^t \left[J + \sum_{k=1}^n C_k(u_k) \right] dt \text{ – комбинированные критерии.}$$

Здесь $a_k = \text{const}$, $c_k = \text{const}$

О классических методах теории оптимального управления

В классической теории оптимального управления известны принцип максимума Понтрягина, методы динамического программирования Беллмана и метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Летова-Калмана.

Во всех этих методах и принципах рассматриваются задачи управления по заданным критериям, обеспечивающим, например, максимальное быстродействие, точность движения, минимальные затраты энергоресурсов и т.д.

В таких задачах часто используется принцип максимума Понтрягина. Для решения стационарного (автономного) случая нестационарной системы вида (1) принцип максимума Понтрягина доставляет только **необходимые условия** оптимальности при обеспечении минимума критерия качества $\min_{u \in U} J(u)$.

В соответствии с принципом максимума наряду с переменными u и x необходимо ввести вспомогательный вектор $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, неположительную постоянную $\varphi_0 \leq 0$ и функцию Гамильтона-Понтрягина $H_0(\varphi, x, u)$.

Необходимое условие оптимальности обеспечивается, если $\min J[u(t)]$ определяется нетривиальным решением присоединенной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x_i, u)}{\partial x_i} \varphi_k,$$

$$i = \overline{1, n}$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, H = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_n f_n.$$

Оптимальное управление для каждого момента времени определяется из выражения

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} H[x(t), \varphi(t), u].$$

Функция $H_0(\varphi, x, u)$ – представляет собой полную энергию системы $\dot{x}_i(t)$ с обобщенными координатами, $\varphi_i(t)$ – обобщенными импульсами. Однако, невозможность точного определения начальных условий x_{i0} и возникающих неожиданных возмущений затрудняют реализацию программного движения $x_{\text{ипр}}(t)$ объекта в системе с разомкнутым управлением $U_{\text{пр}}(t)$.

Вторая задача – это задача синтеза регулятора с использованием законов обратных связей, обеспечивающих гашение возмущающего воздействия в соответствии с заданным критерием качества.

В принципе максимума Понтрягина имеется трудность решения краевых задач с учетом ограничений в виде неравенств. А в методе динамического программирования Беллмана задача представляется как многошаговый процесс, описываемый соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n, n),$$

где n – номер одного из множества возможных состояний системы, в которое она переходит по завершении n -го шага. Предполагается, что структурная задача не должна изменяться при изменении расчетного количества шагов N . При этом выбор управления на любом шаге не должен отрицать выбора управления на предыдущих шагах.

При синтезе регулятора ставится проблема, которая решала бы задачу математически путем синтеза закона оптимального управления.

В 60-х годах XX века в работах А.М. Летова, Р. Калмана, А.А. Красовского, М.М. Атанса, И.П. Фалба и многих других получила свое развитие теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР).

Задача оптимального синтеза управления, в общем, является чрезвычайно сложной. Практически удается построить лишь программное оптимальное управление. Под «синтезом управления» понимается управление, которое не выбирается заранее, а корректируется в каждый текущий момент на основании информации о состоянии системы, т.е. для системы

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, t), \\ \dot{x} &= A_x + B_u \end{aligned} \quad (3)$$

А.М.Летов предложил метод АКОР, доставляющий минимум функционала

$$J = \int_0^{\infty} (u^2 + m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2) dt . \quad (4)$$

Летов доказал, что система уравнений для уравнений связи (1) и функционала (2) является системой $2n$ линейных уравнений с постоянными коэффициентами, и управление описывается выражением

$$u = \sum_{k=1}^n k_i x_i , \quad (5)$$

где k_i – постоянные коэффициенты. Методика вычисления была разработана Летовым.

Выбор весовых коэффициентов n_1, m_2, \dots, m_n в функционале (2) позволяет получить различные варианты управления.

В соответствии с определением Летова «...в проблеме аналитического конструирования мы отказываемся от ... подхода, основанного на инженерной интуиции. Нашей целью будет получить закон регулирования чисто аналитическим путем, исходя из единых требований к качеству переходного процесса, которые можно сформулировать заранее. Из всех требований к качеству переходного процесса мы выбираем лишь одно – минимизацию некоторой меры возмущенного движения» [2].

Задача синтеза закона управления, где требование минимума критерия качества на траекториях движения объекта из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние достигается с помощью обратных связей, решается методом конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). Однако этот метод имеет следующие недостатки:

1. Для систем высокого порядка возникают большие трудности, связанные с необходимостью решения нелинейных уравнений в частных производных.
2. Даже для линейных стационарных объектов и квадратичных функционалов приходится иметь дело с нелинейными алгебраическими уравнениями вида Риккати.
3. Основной недостаток с инженерной, прикладной точки зрения – это косвенные квадратичные критерии качества с заданной структурой и заданными весовыми коэффициентами.
4. В АКОР не рассматриваются инженерные прямые показатели качества синтезируемых систем, т.е. происходит чрезмерная математическая формализация процедур синтеза.

По этому поводу основоположник теории оптимизации нелинейных динамических систем по неклассическим критериям обобщённой работы академик А.А. Красовский отмечает, что эти методы необходимо считать методами поиска оптимальной структуры и критерия качества желаемой совокупности инженерных требований к системе.

Общеизвестна сложность проблемы оптимального синтеза систем управления **нелинейными объектами**. Это связано с необходимостью решения функционального нелинейного дифференциального уравнения в частных производных и связано с огромными вычислительными трудностями при использовании методов АКОР Летова-Калмана. К тому же нерешенным остается выбор весовых коэффициентов критерия качества в зависимости от требований к динамическим свойствам даже для систем второго-третьего порядков.

Академик А.А. Красовский предложил метод аналитического конструирования по **критерию обобщенной** работы, имеющий полуопределенный вид. При этом методе функциональное уравнение является **линейным дифференциальным** уравнением в частных производных. Следовательно, здесь для линейных объектов можно найти закон управления в аналитической форме, а что касается нелинейных объектов, то можно построить определенный вычислительный алгоритм синтеза.

Для нелинейных объектов отсутствуют способы учета ограничений, что создает большие трудности применения методов АКОР.

О современных подходах теории оптимального управления.

Современные сложные супер ММО объекты и системы являются многомерными, нелинейными и многосвязными. Для таких объектов использование классических методов оптимального управления **практически невозможно**. Это связано с внутренним взаимодействием фазовых координат состояния и возникновением сложных нелинейных процессов в открытых (в термодинамическом смысле) системах со спонтанной самоорганизацией.

Математическая модель классических систем автоматического управления (КСАУ) включает в себя управление, задающее и возмущающие воздействия, т.е. внешние силы. Математическая модель синергетической теории управления (СТУ) имеет другую структуру и составляет основу нового метода АКАР (аналитическое конструирование агрегированных регуляторов) и концепции единства процессов самоорганизации и управления (КЕПСУ). Основная идея в разработанной А.А. Колесниковым новой концепции единства процессов самоорганизации и управления (КЕПСУ) состоит в следующем [2,4].

1. Необходимо соответствующим образом включить внешние силы внутрь нового расширенного исходного уравнения.
2. Необходимо, чтобы включенные в уравнение системы внешние силы оказались для нее внутренними взаимодействиями (взаимодействиями) общей замкнутой системы.
3. Цель – нахождение закона управления $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в функции координат состояния замкнутой расширенной системы, охваченной прямыми и обратными связями.

Эти силы становятся **внутренними взаимодействиями** (взаимодействиями) и через такую систему будут протекать энергия или вещество и информация от соответствующего источника, носителями, которых являются синтезируемые явления. Эти условия создают основу организации и неравновесных ситуаций, вследствие чего возникает **процесс самоорганизации**. Из-за неустойчивости по отношению к начальным условиям и параметрам в нелинейных системах возникает динамический хаос. Хотя процесс выглядит случайным, но он определяется детерминистическими законами. При использовании синергетической теории управления главными базовыми основами являются следующие:

1. Обмен с внешней средой энергией, веществом и информацией, т.е. система должна быть открытой.
2. Когерентность и кооперативность протекающих процессов.

3. Осуществление нового механизма генерации отрицательных и положительных обратных связей. Такие базовые явления являются новым направлением в КТАУ, формирующим направленную самоорганизацию и динамическую декомпозицию систем на так называемых притягивающих, *инвариантных многообразиях* (ИМ) для достижения желаемых аттракторов – асимптотически устойчивого конечного состояния в их пространстве состояний, где отражаются требуемые технологические режимы систем. Аттрактор – это совокупность точек, к которым притягиваются все близкие траектории движения системы - притягивающие многообразия, причем эта совокупность имеет размерность, меньшую размерности исходной системы.
4. При образовании аттракторов уменьшается *число степеней свободы*, выделяются несколько доминирующих координат, к которым подстраиваются остальные, и происходит динамическая декомпозиция фазового пространства. При этом выделяются параметры порядка – макропеременные, к которым стремятся все остальные координаты.
5. Каждый аттрактор имеет свою область притяжений на границах разделения этих областей. Существенно то, что малое изменение начальных условий вблизи указанной границы может привести к качественным изменениям исходной системы.

Важнейшей областью современной прикладной теории управления является так называемая *физическая теория управления*. При этом необходимо учесть два вида фундаментальных процессов – *обратимые* (согласно Ньютонской механике), где невозможна эволюция, и *необратимые* термодинамические процессы, способствующие образованию упорядоченных структур с учетом возникших эволюций в направлении увеличения энтропии.

Сюда можно отнести совокупность закономерностей, инвариантов и ограничений процессов управления, связанных физическими законами реального мира.

С другой стороны, в современную теорию управления глубоко проникли идеи и методы нелинейной динамики: бифуркация, аттрактор и т.д.

По этому поводу академик А.А.Красовский отмечает, что «... под физической теорией будем понимать такую теорию управления, которая базируется на фундаменте физических законов, учете ресурсов и приоритетах реального мира». Отличие физической теории управления от абстрактно-математической начинается с математических моделей и критериев систем и процессов управления.

В физической теории модели и критерии создаются в физических (физически значимых, с физическими размерностями) величинах и терминах. Эти модели должны учитывать законы сохранения энергии и другие законы природы и технологии. В абстрактно-математических моделях учет многих ограничений, факторов и закономерностей, как правило, отсутствует. Физическая теория строится так, чтобы заложенные в математических моделях и критериях реальные факторы и ограничения фигурировали и в конечных результатах, определяя границы возможного и невозможного в управлении [3].

Как указывал академик А.А.Красовский, синергетическое управление в этом отношении ближе к реальности, чем все другие постановки проблем в современной теории

управления. Поэтому синергетическое управление сегодня занимает одно из центральных мест в современной теории управления».

Методологическим ядром СТУ является метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), разработанный профессором А.А. Колесниковым.

АКАР позволяет организовать синтез законов управления для нелинейных объектов, в том числе многомерных и многосвязных.

АКАР осуществляет двухэтапный алгоритм управления:

На 1-м этапе – асимптотически устойчивые модели объекта сначала стремятся из произвольного начального состояния к *притягивающему многообразию (ПМ)*, затем на 2-м этапе – вдоль ПМ движутся к началу координат фазового пространства. Замечательным является то, что динамика изменения макропеременных описывается дифференциальными уравнениями первого порядка.

Допустим, что система описывается моделью [4] :

$$X(t) = F(x, U, g, J, M), \quad (6)$$

где $x(t)$ – координаты состояния, $U(t)$ – управление, $g(t), M(t), J(t)$ – задающие, внешние и параметрические возмущения.

Для формирования уравнений *самоорганизации* необходимо иметь *расширенную модель* синтеза системы. В этом случае $g(t), J(t), M(t)$ становятся частными решениями некоторых дополнительных дифференциальных уравнений. Закон управления представляет собой проблему поиска взаимодействия между компонентами расширенной системы:

$$U(x_1, \dots, x_2, z_1, \dots, z_r),$$

где z_1, \dots, z_r – координаты моделей задающих, внешних и параметрических возмущающих воздействий в виде:

$$\dot{z}(t) = \varphi(x, z). \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) в совокупности и составляют новую модель синергетического синтеза систем управления. Здесь внешние воздействия на объект управления становятся внутренними силами расширенной системы. Только в этой ситуации система является открытой (в термодинамическом смысле), и объект, получая энергию или вещество, будет склонен к неравновесному режиму при наличии большого числа степеней свободы.

В системе асимптотическая декомпозиция и редукция осуществляются соотношением:

$$\dim \Sigma = n + r - \lambda m,$$

Где $(n + r)$ – размерность расширенной системы,

m – размерность вектора управления,

λ – число вводимых инвариантных многообразий (ИМ).

При этом первую очередь необходимо создать избыточные степени свободы, а затем редуцировать степени свободы в процессе управления за счет внутреннего взаимодействия связей в направлении понижения размерности ($\psi_1 = 0, \dots, \psi_m = 0$) и далее стремиться к конечному ИМ.

В процессе перехода системы из одного ИМ к другому происходит своего рода «игнорирование» части переменных, число которых равно числу ИМ и $\Psi_k = 0$, последовательно (или параллельно) вводимых в процессе синтеза системы управления... Это есть процесс сжатия пространства состояний. В математическом плане указанный процесс

сжатия реализуется путем последовательного вложения друг в друга S интегралов движения замкнутой системы. Так, при **скалярном управлении** ($m = 1$) осуществляется последовательный каскадный переход от одного ИМ к другому:

$$\Psi_1(X_1, \dots, X_n) = 0 \rightarrow \Psi_2(\Psi_1, X_1, \dots, X_{n-1}) = 0 \rightarrow \dots \rightarrow \Psi_s(\Psi_1, \dots, \Psi_{s-1}, X_1, \dots, X_{n-s}) = 0$$

$$S \leq n - 1.$$

В случае же **векторного управления** ($m > 1$) сначала осуществляется параллельное введение совокупности интегралов движения, т.е.

$$\Psi_1(X_1, \dots, X_n) = 0, \dots, \Psi_m(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Далее на пересечении этих ИМ осуществляется аналогично скалярному управлению последовательное вложение интегралов движения друг в друга, т.е.

$$\Psi_{m-1}(X_1, \dots, X_{n-m}) = 0 \rightarrow \Psi_{m+2}(\Psi_{m+1}, X_1, \dots, X_{n-m-1}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Psi_r(\Psi_{m+1}, \dots, \Psi_{n-m-r}, X_1, \dots, X_{n-m-r}) = 0,$$

$$r \leq n - m - 1.$$

Иначе говоря, при последовательном ($m = 1$) введении интегралов движения образуется **один общий интеграл** $\Psi_s = 0$ – целевое ИМ, а при параллельно-последовательном ($m > 1$) введении образуется m интегралов движения будущей замкнутой системы. [4]

В СТУ в качестве исследуемых объектов рассматриваются **неустойчивые, неравновесные, открытые, когерентные, диссипативные объекты**. Здесь исследуются не только структуры, но и принципы организации, возникновения, развития, самоусложнения или упрощения и разрушения объекта как системы. Появляющиеся точки бифуркации, переходы от порядка к хаосу и наоборот, **наличие отрицательных и положительных обратных связей** способствуют организации нелинейной, неравновесной динамики систем.

Хотя способы и парадигмы использования регуляторов в КТАУ и СТУ различны, они составляют основу синтеза SISO и MIMO динамических систем

Литература

1. Современная прикладная теория управления. Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог, 2000, – 400с.
2. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука.– 1969.
3. Красовский А.А. Проблемы физической теории управления // «Автоматика и телемеханика».–1990.– № 11.
4. Колесников А.А., Кобзев В.А. Динамика полета и управление: синергетический подход. – Таганрог: Изд-во ТТИЮФУ.– 2009. – 198 с.