МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

УДК 519.3:62-50 **10.5281/zenodo.3594797**

Ж.Ш. Шаршеналиев, Т.П. Самохвалова
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НАГРЕВА

Предложен новый способ построения приближенного управления с обратной связью, основанный на методе характеристик Н. Гюнтера и методе дополнительного аргумента. Построена автоматизированная обратная связь в методе принципа максимума Л. Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное управление; обратная связь; динамическое программирование Р. Беллмана; принципа максимума Л. Понтрягина; метод характеристик и дополнительного аргумента; высокотемпературный нагрев; скачки управления.

1. Введение. В данной статье приведен краткий обзор результатов исследований, проводимых в лаборатории «Оптимальные и цифровые системы управления» Института автоматики и информационных технологий НАН КР по разработке алгоритмов оптимального и стабилизирующего управления процессами нагрева объектов, описываемых уравнениями в частных (DPS) или обыкновенных производных (LPS). Рассмотрены несколько видов минимизируемых критериев качества, для них по методике А.И. Егорова [1, 2] выведены соответствующие уравнения Беллмана. В дальнейших исследованиях использованы идеи работ В.И. Зубова, Н.М. Гюнтера, М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, Л.С. Понтрягина, Ж.-Л. Лионса и др. [3–6].

Для математических моделей DPS со степенными нелинейностями предложены новые формы решения полученных уравнений Беллмана в виде бесконечных функционально-интегральных степенных рядов. Получены соответствующие бесконечные системы Риккати [7–9]. В период после публикации работы [7] получены следующие результаты. В решениях полученных бесконечных систем Риккати выявлено и обосновано наличие интервалов стационарности, по которым построены стабилизирующие алгоритмы управления с обратной связью в LPS и DPS [8, 9].

Далее предложен новый способ построения приближенного решения функционального уравнения Беллмана и соответствующего управления в LPS, основанный на методе характеристик Н. Гюнтера [3] и методе дополнительного аргумента [4, 5 и др.], который разрабатывается в Институте математики НАН КР.

В работах [10, 11] в LPS на стыке методов динамического программирования Беллмана, метода параметризации и характеристик [3] и дополнительного аргумента [4, 5] для одномерной модели нагрева с излучением тепла начата разработка нового способа приближенного решения уравнения Беллмана и соответствующего способа расчета управления с обратной связью. В линейной задаче удалось увидеть явную зависимость управления от параметров модели и критерия качества, в том числе от желаемого состояния процесса.

Компьютерное моделирование выполнено для процессов высокотемпературного нагрева, для которых свойственны резкие скачки расчетной величины управления. В работе [12] предложен способ выбора параметров, обеспечивающих уменьшение или устранение резких скачков величины управления с обратной связью в одномерной модели с периодическим измерением текущего состояния процесса.

В работах [13, 14] продолжена верификация предложенного способа расчетов, разработана автоматизированная неявная обратная связь в методе принципа максимума Л.С. Понтрягина при периодическом измерении текущего состояния управляемого процесса с одномерной моделью в обыкновенных производных. В перспективе, возможно, предложенный в [14] способ расчетов управления будет применен для DPS.

О связи методов принципа максимума и динамического программирования говорится в работах Л.И. Розоноэра [15]. Отметим, что в книге А.А. Фельдбаума, А.Г. Бутковского [16] сказано, что в работах Л.И. Розоноэра впервые была установлена связь принципа максимума с динамическим программированием. Из методических соображений в [16] приведен вывод соотношений принципа максимума Л.С. Понтрягина из динамического программирования Р. Беллмана.

В книге [6] показан сложный аналитический переход между формулами управляющей функции в методах принципа максимума Л.С. Понтрягина и динамического программирования Р. Беллмана.

1. Скачки управления в DPS

Пусть процесс изменения температуры в однородном тонком стержне описывается уравнением

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial \mathrm{t}} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \mathrm{q(x)p(t)},\ \mathrm{t}\in[0,T],\quad 0\le \mathrm{x}\le 1, \tag{1.1}$$

с начальным и граничными условиями

$$\mathrm{u(0,x)} = \mathrm{u_0(x)},\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial \mathrm{x}} = 0,\ \lambda\frac{\partial u(t,1)}{\partial \mathrm{x}} = \alpha(T_c - u(t,1)).$$

Известно, что при нагреве при температуре выше 660°С поликремний начинает светиться, и в моделировании используется закон Стефана-Больцмана об излучении тепла с поверхности стержня. Граничное условие на правом конце стержня принимает вид

$$\mathrm{u(0,x)} = \mathrm{u_0(x)},\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial \mathrm{x}} = 0,\ \lambda\frac{\partial u(t,1)}{\partial \mathrm{x}} = \alpha(T_c - u(t,1) - \gamma\sigma u^4(t,1)). \tag{1.2}$$

Здесь $u(t,x)$ – температура стержня в момент времени t в точке «x»; функции $q(x), u_0(x)\in L_2(0,1)$; a, λ, α, T – заданные постоянные; T_c – температура окружающей среды; $p(t)$ – управляющая функция из класса допустимых, $p(t)\in L_2(0,T)$; σ – постоянная Больцмана, коэффициент интегральной излучательной способности кремния; γ – вспомогательный множитель.

Под решением краевой задачи (1.1), (1.2) понимается обобщенное решение в смысле В.И. Плотникова, используемое в [1].

Минимизируемый критерий качества управления запишем в виде:

$$J = \xi_1\int_0^T [u(t,1)-g]^2\,dt + \xi_2[u(T,1)-g]^2 + \beta\int_0^T p^2(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где $\xi_1, \xi_2, g \ge 0, \beta \rangle 0$ – заданные постоянные, ξ_1, ξ_2 не равны нулю одновременно.

Задача 1.1. Найти синтезирующее управление $p^0(t) = p^0(t, u(t,x))$ и соответствующее решение $u(t,x)\in W_2^{1,1}$ уравнения (1.1) с условиями (1.2), доставляющие минимальное значение критерию качества (1.3).

Управление $p^0(t,u)$ будем называть оптимальным относительно критерия (1.3).

Решаем задачу 1.1 с помощью методики [1, 7-9]. Уравнение Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial S(t,u)}{\partial t} = \xi_1[u(t,1)-g(t,1)]^2 - \frac{a\alpha_5}{\alpha_4}u(t,1)v(t,1) - \frac{1}{4\beta}\left(\int_0^1 q(x)v(t,x)dx\right)^2 -$$

$$-\gamma\sigma\frac{a\alpha_7}{\alpha_4}u^4(t,1)v(t,1). \qquad (1.4)$$

Решение функционального уравнения (1.4) будем искать в виде бесконечного степенного ряда $S(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty} k_i(t)u^i(t,1)$. Получаем функциональную производную $v(t,x)$ функционала $S(t,u)$ по $u(t,x)$: $v(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty} ik_i(t)u^{i-1}(t,1)$.

Оптимальное синтезирующее управление в задаче 1.1 равно

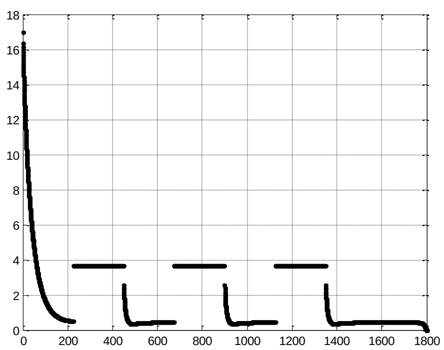
$$p^0(t) = -\frac{1}{2\beta}\int_0^1 q(x)\,dx\sum_{i=1}^{\infty} ik_i(t)u^{i-1}(t,1). \qquad (1.5)$$

Следуя идее Р. Калмана для линейных задач в LPS, по (1.5) построим алгоритм управления для нелинейной задачи в DPS:

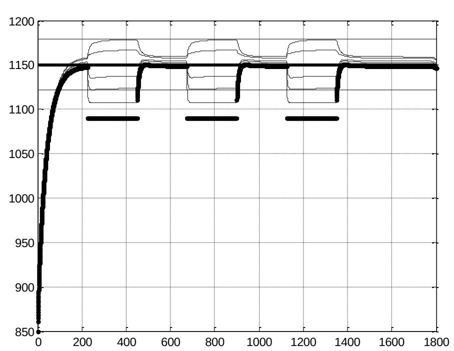
$$\bar{p}(t) = -\frac{1}{2\beta}\int_0^1 q(x)\,dx\sum_{i=1}^{\infty} i\bar{k}_i u^{i-1}(t,1), \qquad (1.6)$$

где $\bar{k}_i$ – стационарные значения вспомогательных функций Риккати $k_i(t),\, i=1,2,\ldots$.

Пример 1.1 [8, 9]. Температура вдуваемой в реактор рабочей смеси $T_c = 1090\,^0C$, интервал времени управления $T = 1800 сек$, интервал периодического вдувания смеси $\Delta = T/8$, желаемая температура $g = 1150$. Получили графики, приведенные на рис. 1.1. Выявлены скачки величины управления а). Температура поверхности и нескольких прилегающих слоев резко падает до 1090^0C, затем возвращается в 5%-ую зону от 1150^0C. Температура центра не выходит выше 5%-ой зоны б). Такой режим вдувания смеси соответствует технологическим требованиям не превышать центру стержня верхнюю границу 5%-ой зоны. Управление $p(t)$ характеризует удельную мощность электрического тока, пропускаемого через стержень. Возникает задача уменьшить или устранить скачки управления.



а)



б)

Рисунок 1.1 – Управление $p_n(t)$ а) и температура $u(t,x_j)$ б) при периодическом вдувании смеси, $T_c = 1090^0C$

2. Скачки управления в LPS

Пример 2.1 [10–14]. Рассмотрим модель нагрева в обыкновенных производных

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bp(t) - \gamma\sigma x^4(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k]. \tag{2.1}$$

В численных расчетах для удовлетворительного достижения заданного желаемого состояния $g(t)$ объекта (2.1) используем минимизацию квадратичного критерия

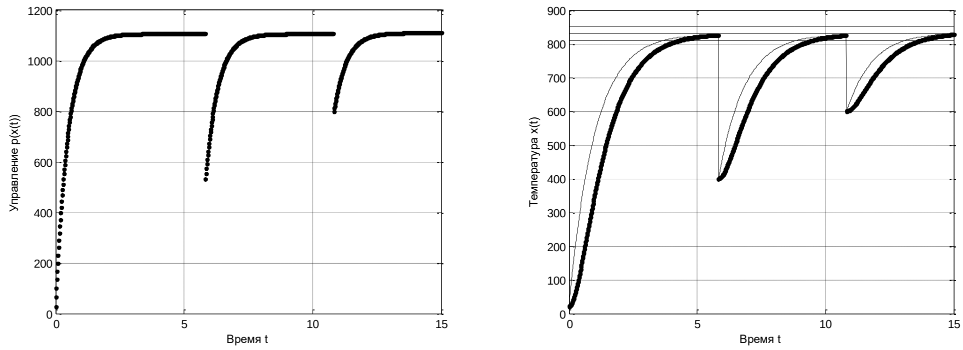
$$J_k = \gamma_1 \int_0^{t_k} (x(t) - g)^T Q(x(t) - g)dt + \gamma_2 (x(t_k) - g)^T F(x(t_k) - g) + \beta \int_0^{t_k} p^2(t)dt. \tag{2.2}$$

Линеаризованное уравнение Беллмана для (2.1), (2.2) при $n = 1$, $\gamma = 0$, $A < 0$ запишем в виде

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} - Ax\frac{\partial S(t,x)}{\partial x} = \left(\gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta}\gamma_2^2 F^2\right)(x-g)^2, \; S(0,x) = \gamma_2 F(x-g)^2. \tag{2.3}$$

Приближенное стабилизирующее управление $p(x(t))$, полученное из (2.3) по методу характеристик и дополнительного аргумента с линеаризацией уравнения Беллмана, имеет вид [10,11]:

$$p(x(t)) = -\frac{b}{2A\beta}Mx(t) + \frac{Bg(t)}{A\beta}M, \quad M = \gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta}\gamma_2^2 F^2. \tag{2.4}$$



а) б)

Рисунок 2.1 – Управление (2.4) $p(t)$ а) и температура (2.1) $x(t)$ б) при периодическом измерении

Заключение

Для задач оптимального управления процессами нагрева в LPS и DPS с тремя типами управлений ($p(t)$, $p(t,x)$ в уравнении модели объекта, $p(t)$ в граничном условии) с полиномиальными нелинейностями предложены несколько видов минимизируемых критериев качества. Модифицирована форма решения уравнения Беллмана. В решениях бесконечных систем Риккати выявлены интервалы стационарности, доказано, что эти стационарные величины являются приближениями к горизонтальным асимптотам решений, эти величины применены к построению приближенных стабилизирующих алгоритмов управлений с обратной связью.

Разработан еще один способ решения уравнения Беллмана в одномерной LPS, основанный на методе характеристик и дополнительного аргумента. Это позволило в рассмотренных примерах с желаемой величиной в виде гладкой функции уменьшить или устранить резкие скачки величины управления с обратной связью при измерении текущего состояния объекта в высокотемпературном нагреве.

Разработана автоматизированная обратная связь в методе принципа максимума Л.С. Понтрягина при периодическом измерении текущего состояния управляемого одномерного процесса.

Литература

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 463 с.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
3. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Л.-М.: ОНТИ, 1934.
4. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. Бишкек: Илим, 1992. 112 с.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 3. С. 410–414; 1992. Т. 325. № 6. С. 111–115; 1993. Т. 329. № 5. С. 543–546.
6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
7. Мамытов Дж., Самохвалова Т.П., Шаршеналиев Ж. Оптимизация температуры стержней поликремния // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 91–100; Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, No. 5. P. 819–827.
8. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Сактанов У.А. Моделирование и оптимизация управляемых технологических процессов. Бишкек: Илим, 2009. 242 с.
9. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П. Приближенные алгоритмы управления и стабилизации в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами // Итоги науки. Том 2. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки». М.: РАН, 2014. С. 75–110.
10. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана методом характеристик // Проблемы автоматики и управления. 2016. № 2 (31). С. 51–56.
11. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана / Материалы Международной научной конференции «Механика твердых, жидких и газообразных сред», посвященной 80-летию д.ф.-м.н., проф. Я.И. Рудаева. Бишкек, 2–3 декабря 2016г. // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2017. Т. 17, № 1. С. 52–54.
12. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Макиенко Д.О. Алгоритм управления с периодическим контролем состояния объекта // Проблемы автоматики и управления. 2017. № 2 (33). С. 3–9.
13. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Третьякова Л.В. Алгоритм стабилизации высокотемпературных режимов объекта // Проблемы автоматики и управления. 2018. № 1 (34). – С. 5–11.
14. Самохвалова Т.П. Приближенный алгоритм управления высокотемпературным нагревом // Материалы XIV Международной Азиатской Школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». 20-31 июля 2018 г. Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, пансионат «Отель Евразия». Алматы: 2018. Труды конф. Ч. 2. С. 182–192.
15. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. 1959. №№ 10 – 12.
16. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971. 744 с.