

**Ж.Ш.Шариеналиев, Т.П. Самохвалова.** sam\_tp@mail.ru  
*Институт автоматизации и информационных технологий НАН КР*  
**У.А.Сактанов.** sam\_tp@mail.ru  
*Ошский технологический университет. Кыргызстан*

## АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РАЗНОТЕМПОВОГО ОБЪЕКТА, ОСНОВАННЫЙ НА МЕТОДЕ ХАРАКТЕРИСТИК

Построен упрощенный алгоритм управления линейной разнотемповой системой с сосредоточенными параметрами. Алгоритм основан на методе динамического программирования Р.Беллмана и методе характеристик.

**Ключевые слова:** полная система, редуцированная система, оптимальное управление, стабилизация, метод характеристик.

**Введение.** В данной статье изложена разработка и апробация способа расчетов в задачах оптимального управления с обратной связью в рамках метода динамического программирования на примере движения судна на воздушной подушке [1].

В работе [1] модель объекта рассмотрена как разнотемповая, в работе [2] последовательно понижена размерность модели объекта, метод редуцирования использован формально в варианте  $\mu > 1$ , (вопреки обычному требованию)  $\mu \ll 1$ , получены 1- и 2-мерные модели. В данной работе в задаче синтеза оптимального управления применяются эти модели, разработан алгоритм управления по приближенному решению уравнения Беллмана методом характеристик [3 – 6]. Предварительная разработка и численные расчеты [7, 8] показали возможность применения предлагаемого алгоритма управления на основе метода характеристик.

### 1. Постановка задачи.

В работе [1] «путем прогонов программы выбраны подходящие коэффициенты матриц». Основной параметр управления – угол  $\delta_b$  отклонения аэроулей, управление  $u = \delta_b$ . Приведем обозначения из [1]:  $z$  – линейное боковое смещение корабля на воздушной подушке;  $\sigma$  – приращение путевого угла, введена замена  $\sigma = \varphi - \beta$ ;  $\varphi$  – блок движения рыскания;  $\beta$  – угол дрейфа (скольжения);  $\omega_y = \frac{d\varphi}{dt}$  – угловая скорость вращения корабля вокруг вертикальной оси; вектор состояния объекта  $x = (z \ \sigma \ \varphi \ \omega_y)^T$ , символ  $( )^T$  – транспонирование.

В данной работе использованы обозначения:  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$  – состояние объекта,  $x_1 = z$ ,  $x_2 = \sigma$ ,  $x_3 = \varphi$ ,  $x_4 = \omega_y$ . Математическую модель движущегося объекта запишем в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k], \quad (1.1)$$

где  $A, B, x$  – матрица и вектор-столбцы размерности  $n \times n, n \times 1$  соответственно,  $t_k = 180$ ;  $bet = 0.01$ ;  $\gamma_1 = 0.5$ ;  $\gamma_2 = 0$ ;  $n = 4$ ;  $u(t)$  – управляющая функция из множества допустимых управлений;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -0.0138 & 0.0914 & 0.2161 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0005 & -0.3583 & -0.1084 & -1.4862 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0520 \\ 0 \\ 0.0313 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$F = Q$ ;  $F(1,1) = 1$ . Данная 4-мерная система асимптотически устойчива при  $u(t) \equiv 0$ .  
Корни характеристического уравнения при  $u(t) \equiv 0$ :

$$\lambda_1 = -1.3694; \quad \lambda_{2,3} = -0.0329 \pm 0.1319i; \quad \lambda_4 = -0.0648.$$

В численных расчетах для удовлетворительного достижения заданного состояния  $g(t)$  объекта использована минимизация квадратичного критерия качества

$$J = \gamma_1 \int_0^{t_k} (x(t) - g)^T Q (x(t) - g) dt + \gamma_2 (x(t_k) - g)^T F (x(t_k) - g) + \beta \int_0^{t_k} u^2(t) dt, \quad (1.2)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, g \geq 0$ ,  $t_k, \beta > 0$  – постоянные.

Оптимальное управление в соответствии с методом динамического программирования Р.Беллмана определяется по формуле

$$u^0(t, x(t)) = -\frac{1}{2\beta} B^T \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x}, \quad (1.3)$$

где  $S(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$  – функционал Беллмана, сложная функция,  $\frac{\partial S}{\partial x} = \left( \frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right)^T$

– вектор-столбец.

Уравнение Беллмана с обращенным временем  $t$  имеет вид

$$\frac{\partial S(t, x(t))}{\partial t} = (Ax)^T \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} + \gamma_1 (x - g)^T Q (x - g) - \frac{b^2}{4\beta} \left( \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} \right)^T \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x}, \quad (1.4)$$

начальное условие запишем в виде

$$S(0, x) = \gamma_2 (x(0) - g)^T F (x(0) - g). \quad (1.5)$$

*Задача.* Найти методом характеристик приближенное решение функционального уравнения Беллмана (1.4), (1.5) в системе с сосредоточенными параметрами (1.1), (1.2).

## 2. Метод характеристик.

Изложим кратко построение решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка по методу характеристик, разработанному в [4 – 6].

Пусть дано линейное неоднородное уравнение в частных производных с начальным условием [4 – 6]

$$U_t(t, x) + axU_x(t, x) = f(x), \quad U(0, x) = \varphi(x). \quad (2.1)$$

Составим соответствующее (2.1) однородное уравнение

$$u_t(t, x) + axu_x(t, x) = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x). \quad (2.2)$$

Функции  $f(x), \varphi(x)$  заданы и удовлетворяют условиям, изложенным в [4],  $a = const$ ,  $t, x \in R_1$ . Учитывая вид уравнения (2.2), обозначим  $P = 1$ ,  $Q = ax$  и составим уравнения характеристик в параметрической форме

$$\frac{dt}{d\tau} = P, \quad \frac{dx}{d\tau} = Q, \quad \tau \in R_1, \quad t|_{\tau=0} = t_0, \quad x|_{\tau=0} = x_0.$$

Запишем уравнение  $\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{P} = ax$  и, решив его, получим  $x = ce^{at}$ , где  $c$  – постоянная

интегрирования,  $c = xe^{-at}$ . Решение однородного уравнения (2.2) равно

$$u(t, x) = \varphi(xe^{-at}). \quad (2.3)$$

Далее строится уравнение [4 – 6]

$$p_t(\tau, t, x) + axp_x(\tau, t, x) = 0, \quad p(t, t, x) = x. \quad (2.4)$$

Функция  $p(\tau, t, x) = xe^{-a(t-\tau)}$  удовлетворяет (2.4) и является аргументом для построения решения  $U(t, x)$  неоднородного уравнения (2.1) [4]:

$$U(t, x) = \varphi(p(0, t, x)) + \int_0^t f(p(s, t, x)) ds. \quad (2.5)$$

В данном случае

$$U(t, x) = \varphi(xe^{-at}) + \int_0^t f(xe^{-a(t-s)}) ds. \quad (2.6)$$

Пусть теперь дано линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка с двумя переменными  $x_1, x_2$  и с начальным условием:

$$U_t(t, x_1, x_2) + a_1x_1U_{x_1}(t, x_1, x_2) + a_2x_2U_{x_2}(t, x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad U(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2). \quad (2.7)$$

Составим соответствующее (2.7) однородное уравнение

$$u_t(t, x_1, x_2) + a_1x_1u_{x_1}(t, x_1, x_2) + a_2x_2u_{x_2}(t, x_1, x_2) = 0, \quad u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2). \quad (2.8)$$

Решением однородного уравнения (2.8) является

$$u(t, x_1, x_2) = \varphi(x_1e^{-a_1t}, x_2e^{-a_2t}). \quad (2.9)$$

Решение неоднородного уравнения (2.7) равно

$$U(t, x_1, x_2) = \varphi(x_1e^{-a_1t}, x_2e^{-a_2t}) + \int_0^t f(x_1e^{-a_1(t-s)}, x_2e^{-a_2(t-s)}) ds. \quad (2.10)$$

### 3. Линеаризация в одномерной задаче.

При  $n = 1$  в одномерной задаче (1.4), (1.5) используем последовательные приближения и линеаризацию. Первое приближение в (1.4) выразим по условию (1.5):

$$S_1(t, x) = \gamma_2 F(x - g)^2. \quad (3.1)$$

По (1.3) запишем первое приближение оптимального управления  $u^0(t, x)$  в виде

$$u_1^0(t, x(t)) = -\frac{B}{2\beta} (2\gamma_2 F(x - g)).$$

Дифференцируя  $S_1(t, x)$  по  $x$ , по (1.4) запишем уравнение для второго приближения

$$\frac{\partial S(t, x(t))}{\partial t} = Ax \frac{\partial S(t, x(t))}{\partial x} + \gamma_1 Q(x - g)^2 - \frac{B^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2(x - g)^2$$

с условием (3.1). Последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} - Ax \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = \left( \gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2 \right) (x - g)^2, \quad S(0, x) = \gamma_2 F(x - g)^2. \quad (3.2)$$

Требуется решить линеаризованное уравнение Беллмана (3.2) относительно второго приближения  $S_2(t, x)$ . При обозначениях

$$a = -A, \quad k = \gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2, \quad f(x) = k(x - g)^2, \quad \varphi(x) = \gamma_2 F(x - g)^2, \quad U = S, \quad (3.3)$$

уравнение (3.2) совпадает с (2.1). По формулам (2.5), (2.6) запишем решение (3.2) в новом общем виде

$$S(t, x) = U(t, x) = \varphi(p(0, t, x)) + \int_0^t f(p(s, t, x)) ds. \quad (3.4)$$

В данном случае

$$S(t, x) = \gamma_2 F(xe^{-at} - g)^2 + \int_0^t k(xe^{-a(t-s)} - g)^2 ds. \quad (3.5)$$

По формуле (1.3) запишем второе приближение оптимального синтезирующего управления в новом общем виде

$$u_2^0(t, x(t)) = -\frac{B}{2\beta} \left\{ \varphi'_p(p(0, t, x)) \cdot p'_x(0, t, x) + \int_0^t f'_p(p(s, t, x)) \cdot p'_x(s, t, x) ds \right\}. \quad (3.6)$$

В данном случае

$$u_2^0(t, x(t)) = -\frac{B}{\beta} \left\{ \gamma_2 F(xe^{-at} - g) \cdot e^{-at} + \int_0^t k(xe^{-a(t-s)} - g) \cdot e^{-a(t-s)} ds \right\}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) получим

$$\begin{aligned} u_2^0(t, x(t)) &= -\frac{B}{\beta} \left\{ \gamma_2 F(xe^{-at} - g)e^{-at} + k \int_0^t (xe^{-2a(t-s)} - ge^{-a(t-s)}) ds \right\} = \\ &= -\frac{B}{\beta} \left\{ \gamma_2 F(xe^{-at} - g)e^{-at} + kx \frac{1}{2a} (1 - e^{-2at}) - kg \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда можем записать приближенно-оптимальное управление (3.7) в виде

$$u_2^0(t, x(t)) = k_1(t)x(t) + k_2(t), \quad (3.8)$$

где

$$k_1(t) = -\frac{B}{\beta} \left[ \gamma_2 F e^{-2at} + \frac{k}{2a} (1 - e^{-2at}) \right], \quad k_2(t) = \frac{B}{\beta} \left[ \gamma_2 F g e^{-at} + \frac{kg}{a} (1 - e^{-at}) \right].$$

В данном примере  $a > 0$ . Перейдя в коэффициентах (3.8) к пределу, получим коэффициенты стабилизирующего управления

$$\bar{u}_2(x(t)) = \bar{k}_1 x(t) + \bar{k}_2, \quad (3.9)$$

где 
$$\bar{k}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} k_1(t) = -\frac{Bk}{2a\beta}, \quad \bar{k}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} k_2(t) = \frac{Bkg}{a\beta}, \quad k = \gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2.$$

Используя алгоритм (3.9) для управления полной системой (1.1), сравним алгоритм (3.9) с другими алгоритмами управления.

По методу редуцирования в [2] была последовательно понижена размерность системы (1.1), получена одномерная редуцированная система

$$\dot{v}(t) = -0.6110v(t) - 3.7929u(t), \quad v_0 = 6.5. \quad (3.10)$$

Стабилизирующее управление (3.9) для модели (3.10) равно

$$\bar{u}_2(v(t)) = -0.0155v(t) + 3.1038 \cdot 10^{-4}. \quad (3.11)$$

Стабилизирующее управление, полученное в [2] по уравнениям Риккати, равно

$$\bar{u}(v(t)) = -0.0011v(t) + 2.2573 \cdot 10^{-4}. \quad (3.12)$$

Алгоритмы (3.11), (3.12) используем в полной системе (1.1) в виде

$$\bar{u}_2(x(t)) = -0.0155x_1(t) + 3.1038 \times 10^{-4}, \quad (3.13)$$

$$\bar{u}(x_1(t)) = -0.0011x_1(t) + 2.2573 \times 10^{-4}. \quad (3.14)$$

На рис. 1, 2 приведены графики полного стабилизирующего управления  $u(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  и линейного бокового смещения  $x_1(t)$  полной системы (1.1),  $n = 4$ . Время управления 180 с.

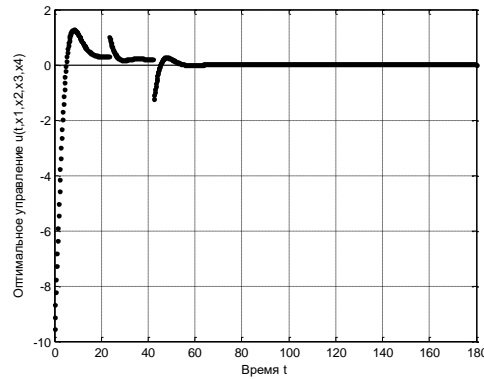


Рис. 1. Полное стабилизирующее управление  $u(x(t))$ .

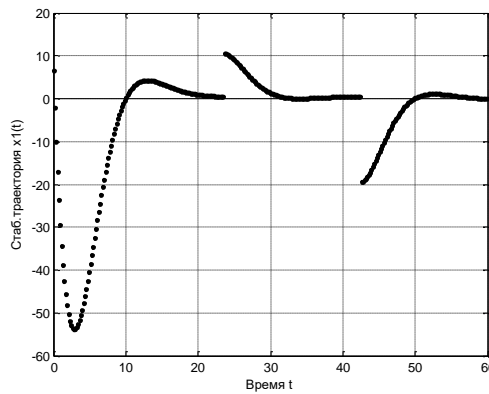


Рис. 2. Компонента  $x_1(t)$  при полном управлении  $u(x(t))$ .

На рис. 3, 4 приведены графики управления  $\bar{u}_2(x_1(t))$  (3.13) и линейного бокового смещения  $x_1(t)$  полной системы (1.1),  $n = 4$ .

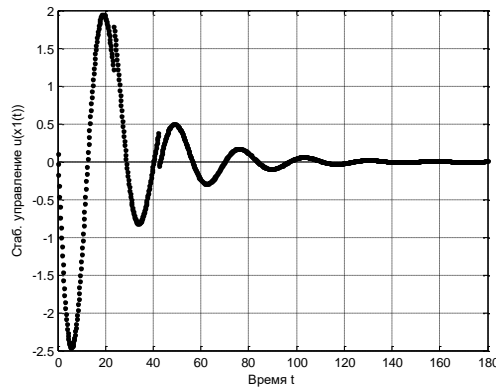


Рис. 3. Стабилизирующее управление  $\bar{u}_2(x_1(t))$ .

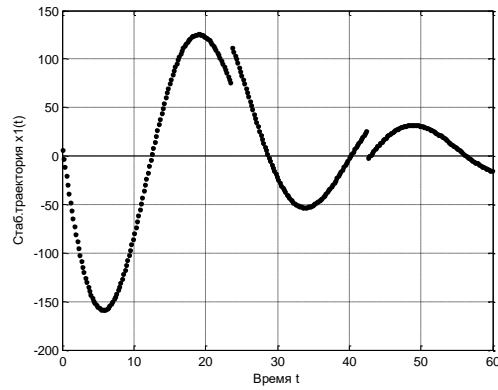


Рис. 4. Компонента  $x_1(t)$  при управлении  $\bar{u}_2(x_1(t))$ .

В таблице 1 приведено сравнение алгоритмов управления.

Таблица 1.

Время приближения к нулю компоненты  $x_1(t)$  полной системы (1.1).

Методы решения	$ x_1(t)  < 1$	$ x_1(t)  < 0.1$	$ x_1(t)  < 0.01$	$ x_1(t)  < 0.001$	$ x_1(t)  < 0.0001$
Метод характеристик $n = 1$ ; управл. (3.13)		172 с	175 с	–	–
Метод уравнений Риккати $n = 1$ ; управл. (3.14)	24 с	148 с	> 180 с	–	–
Нулевое управление $u(t) \equiv 0$ ; $n = 4$	179 с	> 180 с	–	–	–
Оптимальное управление, $n = 4$	9 с	71 с	127 с	170 с	173 с
Стабилизирующее управление, $n = 4$	20 с	71 с	128 с	> 180 с	–

Из таблицы 1 видно, что линеаризованный (3.13) и редуцированный (3.14) одномерные алгоритмы значительно уступают полному оптимальному и полному стабилизирующему алгоритмам и оказывают меньшее влияние на управляемый объект.

**Выводы.** Рассчитаны различные режимы стабилизации разнотемпового объекта методами редуцирования, линеаризации и характеристик по линейной модели. Получены предварительные результаты численных расчетов.

## *Литература*

1. Козырев В.Г. Асимптотическое приближение закона терминального управления выходом систем с сингулярными возмущениями // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, 16 – 19 июня 2014. – М.: Ин-т проблем управления РАН, 2014. С. 714 – 724.
2. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Сактанов У.А. Приближенные алгоритмы управления движением разнотемпового объекта / Материалы II Междунар. конфер. «Проблемы управления и информационных технологий», 25 – 26 сентября 2015 // Проблемы автоматизации и управления. – 2015. № 1(28). С. 11 – 22.
3. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. – Л.-М.: ОНТИ, 1934.
4. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. №3. С. 410–414; 1992. Т. 325. №6. С. 111–115; 1993. Т. 329. №5. С. 543 – 546.
6. Иманалиев Т.М. Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Автореферат дисс. на соискание ученой степени д.ф.-м.н. – Бишкек: Изд-во Турар, 2000. – 25 с.
7. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана методом характеристик // Проблемы автоматизации и управления. – 2016. № 2 (31). С. 51 – 56.
8. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана / Материалы Международной научной конфер. «Механика твердых, жидких и газообразных сред», посвящ. 80-летию д.ф.-м.н., проф. Я.И. Рудаева, 2 – 3 декабря 2016 // Вестник КРСУ. – 2017. Т. 17. № 1. – С. 52 – 54.