УДК 517.956

И.Б. Кошмурзаев – kisb62@gmail.com
Ошский государственный университет, г.Ош, Кыргызстан

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Методом положительно определенных интегралов доказаны теоремы единственности решения двух краевых задач для уравнений четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Ключевые слова: краевые задачи, единственность решения, краевые и начальные условия, уравнения в частных производных.

1. Введение. Исследования физики атмосферы, задачи геофизики, динамики однородных и неоднородных жидкостей и ряда других явлений и процессов, происходящих в реальном мире, проводятся с использованием краевых задач для уравнений в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными**.**

В работе рассмотрены вопросы единственности решений краевых задач уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

2. Постановка задачи. Решить задачу в области $D = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < h\}$ с вершинами $A(0,0)$, $B(l, 0)$, $B_0(l, h)$, $A_0(0, h)$ для уравнения

$$L(u) \equiv u_{xxxy} + au_{xxy} + bu_y + cu = f(x, y), \tag{1}$$

где a, b, c, f-заданные гладкие функции, зависящие от двух переменных x и y.

Известно, что для общего уравнения четвертого порядка со старшими производными

$$Au_{xxxx} + Bu_{xxxy} + Cu_{xxyy} + Du_{xyyy} + Eu_{yyyy} = f(x, y)$$

уравнение характеристик записывается в виде [1]

$$A(dy)^4 - B(dy)^3dx + C(dy)^2(dx)^2 - Ddy(dx)^3 + E(dx)^4 = 0.$$

Поэтому уравнение характеристик для уравнения (1) имеет вид

$$-(dy)^3dx = 0.$$

Отсюда заключаем, что прямая $x = const$ является однократной действительной характеристикой, а прямая $y = const$ – трехкратной действительной характеристикой. Следовательно, граница области D состоит из характеристик уравнения (1), поэтому рассматриваемую область можем назвать характеристическим прямоугольником.

В области D для уравнения (1) изучим следующие задачи.

Задача 1. В области D найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{3+1}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u_x(0,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h, \quad (2)$$

$$u(l,y) = \varphi_3(y), 0 \le y \le h \quad (3)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le l, \quad (4)$$

где $\varphi_i(y)$ $(i = \overline{1,3}), \tau(x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям гладкости

$$\varphi_i(y) \in C^1[0,h], \tau(x) \in C^3[0,l] \quad (5)$$

и условиям согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau(l) = \varphi_3(0), \tau'(0) = \varphi_2(0). \quad (6)$$

Задача 2. В области D найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{3+1}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(l,y) = \varphi_2(y), u_x(l,y) = \varphi_3(y), 0 \le y \le h \quad (7)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le l, \quad (8)$$

где $\varphi_i(y)$ $(i = \overline{1,3}), \tau(x)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям гладкости

$$\varphi_i(y) \in C^1[0,h],\ \tau(x) \in C^3[0,l] \quad (9)$$

и условиям согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau(l) = \varphi_2(0),\ \tau'(0) = \varphi_3(0). \quad (10)$$

Краевые задачи для уравнений вида (1) рассмотрены в работах [1, 2]. В настоящей работе изучим единственность решений указанных задач.

3. Теорема единственности для задачи 1. Сначала докажем единственность решения задачи 1. Допустим, что существует два решения этой задачи $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Рассмотрим разность $\vartheta(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Тогда функция $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$L(\vartheta) \equiv \vartheta_{xxxy} + a\vartheta_{xxy} + b\vartheta_y + c\vartheta = 0, \quad (11)$$

однородным краевым условиям

$$\vartheta(0,y) = 0,\ \vartheta_x(0,y),\ \vartheta(l,y) = 0,\ 0 \le y \le h \quad (12)$$

и однородному начальному условию

$$\vartheta(x,0) = 0,\ 0 \le x \le l. \quad (13)$$

Докажем, что функция $\vartheta(x,y)$ тождественно равна нулю. Для этой цели будем использовать метод положительно определенных интегралов [3]. Суть этого метода заключается в следующем: умножая уравнение (11) на функцию $\vartheta_y(x,y)$ и дважды интегрируя по области D, получим соотношение

$$\iint_D \vartheta_y(x,y)\left[\vartheta_{xxxy} + a\vartheta_{xxy} + b\vartheta_y + c\vartheta\right] dx\,dy = 0. \qquad (14)$$

Преобразуем подынтегральные выражения следующим образом:

$$\vartheta_y\vartheta_{xxxy} = \left(\vartheta_y\vartheta_{xxy} - \frac{1}{2}\vartheta_{xy}^2\right)_x,$$

$$\vartheta_y \cdot a\vartheta_{xxy} = \left(a\vartheta_y\vartheta_{xy} - \frac{1}{2}a_x\vartheta_y^2\right)_x + \frac{1}{2}a_{xx}\vartheta_{xy}^2 - a\vartheta_{xy}^2,$$

$$\vartheta_y \cdot b\vartheta_y = b\vartheta_y^2, \quad \vartheta_y \cdot c\vartheta = \tfrac{1}{2}(c\vartheta^2)_y - \tfrac{1}{2}c_y\vartheta^2.$$

Тогда соотношение (14) примет вид

$$\iint\limits_D \left[\left(\vartheta_y\vartheta_{xxy} - \frac{1}{2}\vartheta_{xy}^2 + a\vartheta_y\vartheta_{xy} - \frac{1}{2}a_x\vartheta_y^2\right)_x -\right.$$

$$\left. -\left(-\frac{1}{2}\cdot \mathrm{c}\cdot\vartheta^2\right)_y - a\vartheta_{xy}^2 + \left(\frac{1}{2}a_{xx} + b\right)\vartheta_y^2 - \frac{1}{2}\mathrm{c}_y\vartheta^2\right] dx\,dy = 0$$

Отсюда, используя формулу Грина

$$\int\limits_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

получим соотношение:

$$\int\limits_{\partial D} \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{c}\vartheta^2 dx + \left(\vartheta_y\vartheta_{xxy} - \frac{1}{2}\vartheta_{xy}^2 + a\vartheta_y\vartheta_{xy} - \frac{1}{2}a_x\vartheta_y^2\right)dy +$$

$$+\iint_D \left[-a\vartheta_{xy}^2 + \left(\tfrac{1}{2}a_{xx} + b\right)\vartheta_y^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{c}_y\vartheta^2\right] dxdy = 0. \qquad (15)$$

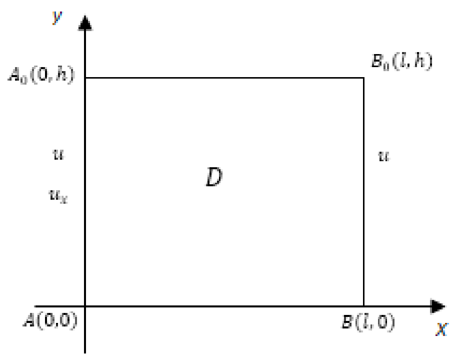
Вычислим криволинейные интегралы области D, показанной на рисунке:

$$\int\limits_{\partial D} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BB_0} + \int\limits_{B_0B} + \int\limits_{A_0A}$$

1). Уравнение границы AB имеет вид

$$y = 0,\, 0 \le x \le l.$$

Тогда $dy=0$.



Границы области D

Следовательно

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_0^l \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{c}(x,0)\vartheta(x,0)dx = 0,$$

так как по условию (13) $\vartheta(x,0) = 0, 0 \le x \le l$.

2). На отрезке BB_0 имеем $x = l$. Тогда $dx = 0$.

Поэтому

$$\int\limits_{BB_0} = \int\limits_0^l \Big[\vartheta_y(l,y)\vartheta_{xxy}(l,y) - \frac{1}{2}\vartheta_{xy}^2(l,y) + a(l,y)\vartheta_y(l,y)\vartheta_{xy}(l,y) -$$

$$-\frac{1}{2}a_x(l,y)\vartheta_y^2(l,y)\Big] dy.$$

Из третьего условия (12) имеем $\vartheta_y(l,y) = 0,\ \ 0 \le y \le h$. Тогда из предыдущего соотношения получим

$$\int\limits_{BB_0} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \vartheta_{xy}^2(l,y)dy.$$

3). На отрезке B_0A_0 $\ dy = 0$, так как уравнение линии B_0A_0 $\ y = h$. Учитывая направление интегрирования, из (15) получим:

$$\int\limits_{B_0A_0} = -\int\limits_0^l \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{c}(x,h)\vartheta^2(x,h)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l \mathrm{c}(x,h)\vartheta^2(x,h)dx.$$

4). Уравнение линии A_0A имеет вид $x = 0$, тогда $dx = 0$. С учетом направления интегрирования имеем

$$\int\limits_{A_0A} = -\int\limits_0^y \Big[\vartheta_y(0,y)\vartheta_{xxy}(0,y) - \frac{1}{2}\vartheta_{xy}^2(0,y) +$$

$$+a(0,y)\vartheta_y(0,y)\vartheta_{xy}(0,y) - \frac{1}{2}a_x(0,y)\vartheta_y^2(0,y)\Big] dy.$$

Из первых двух условий (12) следует, что

$$\vartheta_y(0,y) = 0, \qquad \vartheta_{xy}(0,y) = 0, \qquad 0 \le y \le h.$$

Тогда $\int_{A_0A} = 0$.

Объединяя результаты 1) ÷ 4) из (15) получим

$$\frac{1}{2}\int_0^h \vartheta_{xy}^2(l,y)dy + \frac{1}{2}\int_0^l c(x,h)\vartheta^2(x,h)dx +$$

$$+\iint_D \left[a\vartheta_{xy}^2 - \left(\frac{1}{2}a_{xx} + b\right)\vartheta_y^2 + \frac{1}{2}c_y\vartheta^2\right]dxdy = 0. \qquad (16)$$

Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполняются следующие условия:

$$\forall(x,y) \in \overline{D}:\ a(x,y) \geq 0\,,$$

$$\frac{1}{2}a_{xx}(x,y) + b(x,y) \leq 0\,, \qquad (17)$$

$$c_y(x,y) \geq 0\,, c(x,h) \geq 0\,.$$

Тогда все подынтегральные слагаемые в (16) становятся неотрицательными. Поэтому равенство может быть выполнено только лишь при условиях

$$\vartheta_{xy}(l,y) \equiv 0, \vartheta(x,h) \equiv 0, \forall y \in (0,h), \forall x \in (0,l),$$

$$\vartheta_{xy}(x,y) \equiv 0, \vartheta_y(x,y) \equiv 0, \vartheta(x,y) \equiv 0, \forall(x,y) \in D.$$

Отсюда с учетом условий (10) и (11) заключаем, что

$$\forall(x,y) \in \overline{D}\,:\ \vartheta(x,y) \equiv 0.$$

Следовательно, если существует две функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, удовлетворяющие всем условиям задачи, то при выполнении условий (17) имеем

$$\forall(x,y) \in \overline{D}\,:\ u_1(x,y) \equiv u_2(x,y).$$

Таким образом, доказана **теорема 1** единственности для задачи 1. при выполнениия условий (5), (6) и (17).

Нетрудно заметить, что множество функций, удовлетворяющих неравенствам (17), не пусто. Например, если

$$a(x,y) = x^2, \qquad b(x,y) = -y^2 - 2, \qquad c(x,y) = -e^{-2y},$$

то неравенства (17) выполняются. Уравнение (16) имеет вид

$$\frac{1}{2}\int_0^h \vartheta_{xy}^2(l,y)dy + \frac{1}{2}\int_0^l e^{-2h}\vartheta^2(x,h)dx +$$

$$+\iint_D \left[x^2\vartheta_{xy}^2 + (1+y^2)\vartheta_y^2 + e^{-2y}\vartheta^2\right]dxdy = 0$$

Отсюда, нетрудно заключить, что $\forall(x,y) \in \overline{D}\,:\ \vartheta(x,y) \equiv 0.$

4. Единственность решения задачи 2. Поступая в задаче 2 таким же образом, как и в задаче 1, будем иметь тождество, аналогичное (16):

$$\frac{1}{2}\int_0^h \vartheta_{xy}^2(0,y)dy + \frac{1}{2}\int_0^l \mathrm{c}(x,h)\vartheta^2(x,h)dx +$$

$$+\iint_D \left[-a\vartheta_{xy}^2 + \left(\frac{1}{2}a_{xx} + b\right)\vartheta_y^2 - \frac{1}{2}\mathrm{c}_y\vartheta^2\right]dxdy = 0. \qquad (18)$$

Отсюда заключаем, что если

$$\begin{cases} \forall(x,y) \in \overline{D}:\ a(x,y) \le 0\,, \\ \frac{1}{2}a_{xx}(x,y) + b(x,y) \ge 0, \\ \mathrm{c}_y(x,y) \le 0\,, \\ \mathrm{c}(x,h) \ge 0\,, \end{cases} \qquad (19)$$

то из (18) будем иметь, что

$$\forall(x,y) \in \overline{D}:\ \vartheta(x,y) \equiv 0.$$

Это означает, что решение задачи 2 единственно. Таким образом, доказана **теорема 2,** если выполнены условия (9), (10) и (19).

Заключение. В работе методом положительно определенных интегралов доказаны теоремы единственности решений двух краевых задач для уравнений четвертого порядка с частными производными.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
2. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка // Дис. к.ф.–м.н.: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 119 с.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.