УДК 519. 633:532.594:62-50

Г.Ч. Тукембаева, аспирант, tukembaeva.g@gmail.com
Б.К. Темиров, д.ф.-м.н., профессор
КНУ им. Ж. Баласагына

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО УКЛОНА

Для одномерной системы нелинейных уравнений гиперболического типа – уравнений Сен-Венана получено доказательство однозначной разрешимости методом Роте. Дифференциально-разностная задача метода Роте преобразована в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), соответственно дивергентной форме исходной системы нелинейных уравнений мелкой воды. Так как поведение системы ОДУ определяется собственными числами, то исследуется система ОДУ без правой части для реализации волновода Лаврентьева. Из системы следует квадратное уравнение, характеризующее поведение системы ОДУ и уравнений Сен-Венана. Результаты подтверждаются доказательством справедливости выводов. По сравнению с известными методами цунами исследуется как динамическая система. Найденное решение адекватно известным результатам из других областей естествознания, что гарантирует корректность применения методов динамических систем.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, метод Роте, динамические системы, условие Куранта, цунами.

Введение

Уравнения мелкой воды в виде системы нелинейных уравнений гиперболического типа описывают цунами, волны Россби. Их инициируют подводные землетрясения, извержения вулканов, оползни и ядерные взрывы, что взывает к изучению численными методами. В одномерном (1D) случае уравнения мелкой воды описываются уравнениями Сен-Венана [1]-[6]. Шаг сетки в численных методах дается условием Куранта – неравенством, связывающим шаги по времени и расстоянию [7]-[14]. В регуляризованных уравнениях выбор шагов обоснован формулой Куранта для ячейки разностной схемы [11, с. 155], но так же, как и условие, является необходимым условием сходимости [12], [14].

Иную идею в середине прошлого века выразил М.А. Лаврентьев. Он предположил, что рельеф океанического дна порождает волновод, где цунами генерирует частоты инфразвука – «голос моря» [3], скорость звука в воде 1500 м/с. Свойства волновода выражаются рельефом шельфа от источника к оси русла подводной реки, т.е. продолжения реки на континентальном шельфе, а значит, 1D-уравнениям мелкой воды. Поэтому волновое число и длину волны волновода Лаврентьева необходимо вычислять, исходя из параметров уравнений Сен-Венана подводной реки.

В настоящей статье в отличие от изучения цунами [6], двуслойных уравнений мелкой воды [13], в том числе устойчивых по Ляпунову [14] и решения методом Роте [15], к исследованию привлечены методы динамических систем [16] и условие ортогональности. Препятствия на пути потока [9] учитываются знаком уклона. Для цунами знак уклона отрицательный. Их изучение обусловлено исследованием подводных вулканов [17]. Замыкание обратной связью, во-первых, позволяет доказать сходимость к уравнениям Сен-Венана, аппроксимированных по Роте, так как дает условие сходимости $\tau<U^2/g\,\varphi_n$ [2]. Во-вторых, обоснует реализуемость волновода как канал передачи информации о катастрофических событиях из глубин океана. Такое представление значимо для схем устойчивого счета и объяснения образования волн и колебаний согласно нелинейным уравнениям мелкой воды.

Постановка задачи

В области $G=\{(t,\ x):\ t\in[0,T];\ x\in[0,\infty)\}$ необходимо определить $h(t,\ x)$ и $u(t,\ x)$, заданные уравнениями Сен-Венана в дивергентной форме:

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial hu^2}{\partial x}+g\left(\frac{hu^2}{U^2}+h\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=f(t,x) \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями и учетом их согласования при t=0, x=0:

$$h(0,x)=h_0(x),\qquad u(0,x)=u_0(x),\;\; x\in[0,\infty); \tag{3}$$

$$h(t,0)=\eta(t),\qquad u(t,0)=\varphi(t),\quad t\in(0,T]; \tag{4}$$

$h(t, x)$ – глубина; $u(t, x)$ – скорость потока; g=9.81 м/с^2; $z(t, x)=I(x)+h$ – отметка уровня свободной поверхности; $I(x)$ – уклон дна, априори, положительный. В настоящей работе исследуем общий случай, когда уклон $I>0$ и $I<0$ на отдельных участках русла. В уравнении (1) скорость потока задана формулой Шези $U=C(RI)^{1/2}$, где C – коэффициент Шези; $R(x)$ – гидравлический радиус вычисляется по сечениям h. Например, ширина потока b в широком прямоугольном русле много больше глубины $h(t, x)$ [4], поэтому $R=bh/(b+2h)\approx h$, $U^2\approx C^2hI$.

Преобразование методом Роте

Согласно методу Роте, разобьем область G на подобласти $G_n=\{(\tau, x)\colon \tau\in[t_{n-1}, t_n]; x\in[0, \infty)\}\in G$ с шагом времени $\tau=t_n-t_{n-1}$. Тогда в G_n задача (1)-(4) дискретизируется дифференциально-разностными уравнениями с независимой переменной x

$$\frac{(hu)_n(x)-(hu)_{n-1}(x)}{\tau}+\frac{d(hu^2)_n}{dx}+\frac{g}{U_{n-1}^2}(hu^2)_n=-g\left(h\frac{dz}{dx}\right)_{n-1}, \tag{5}$$

$$\frac{h_n(x)-h_{n-1}(x)}{\tau}+\frac{d(hu)_n}{dx}=f_n(x), \tag{6}$$

а начальные и граничные условия принимают вид

$$h_{n-1}(0,x)=h_0(x),\; u_{n-1}(0,x)=u_0(x),\qquad n=1; \tag{7}$$

$$h(t_n,0)=\eta_n,\qquad u(t_n,0)=\varphi_n,\qquad n=1,\dots,N. \tag{8}$$

В уравнении (5) член $(hu)_n(x)/\tau$ не удовлетворяет закону сохранения в момент t_n, так как ему отвечает $(hu^2)_n(x)$ в этом уравнении. Аналогичным образом, $h_n(x)/\tau$ не адекватно закону сохранения в виде $(hu)_n(x)$, принятому в уравнении (6). Устраним их умножением $(hu)_n(x)/\tau$ и $h_n(x)/\tau$ на $u_n(x)/u_n(x)\equiv1$, соответственно в уравнениях (5) и (6). Поэтому законы сохранения задачи (1)-(4) соблюдены в G_n, а дифференциально-разностная задача (5)-(8) выражается системой ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений):

$$\frac{d(hu^2)_n}{dx}+\left(\frac{g}{U_{n-1}^2}+\frac{1}{\tau u_n}\right)(hu^2)_n(x)=\frac{(hu)_{n-1}(x)}{\tau}-g\left(h\frac{dz}{dx}\right)_{n-1}, \tag{9}$$

$$\frac{d(hu)_n}{dx}+\frac{(hu)_n(x)}{\tau u_n(x)}=f_n(x)+\frac{(hu)_{n-1}(x)}{\tau} \tag{10}$$

$$(hu^2)_{n-1}(0,x)=(\eta\varphi^2)_{n-1}(x),(hu)_{n-1}(0,x)=(\eta\varphi)_{n-1}(x),n=1;$$

с начальными условиями на границе x=0 следующего вида

$$(hu^2)_n(t_n,0) = \eta_n \varphi_n^2, \qquad (hu)_n(t_n,0) = \eta_n \varphi_n, \quad n = 1, \dots, N. \tag{11}$$

Перемножением искомых функций в условии (11) удовлетворены законы сохранения в точности, как в системе (9)-(10). Коэффициенты уравнений (9)-(10) содержат искомую функцию $u_n(x)$ с независимой x; удовлетворяют законам сохранения и относительно искомых $(hu^2)_n(x)$ и $(hu)_n(x)$ являются линейными уравнениями. Если найдено ограничение на τ, то они эквивалентны уравнениям (1)-(2), где ограничение устанавливает сходимость решения задачи (9)-(11) к задаче (1)-(4). Поскольку модель описывается системой ОДУ, то для решения поставленной задачи и вычисления параметров волновода k и λ изучим уравнения Сен-Венана с учетом знака уклона $\pm I$, равного sgn I, как динамическую систему.

Схема Роте позволяет в момент t_n развернуть картину течения в G_n по картине течения в момент времени t_{n-1}, отвечающей G_{n-1} так, что получаем сменяемую последовательность картин n=1, 2, …, N, как кадров кинофильма. Шаг τ обеспечивает непрерывность следующих друг за другом картин течения в динамике. Правая часть (9)-(10) – это возмущения, поступающие на вход с шагом τ. Они присутствуют в коэффициентах системы, поскольку заданы формулой Шези в виде $U_{n-1}(x)=C[R(x)I(x)]^{1/2}$ в момент времени t_{n-1}.

Решение задачи

Решение задачи подразделяется на изучение сходимости, волновода Лаврентьева и цунами. Поэтому сконцентрируемся на применении методов динамических систем к этим вопросам на основе задачи (9)-(11) и сформулируем в виде теоремы так, чтобы в ходе доказательства охватить все подразделы задачи.

Теорема

Для сходимости решения системы (9)-(10) с начальными условиями (11) к (1)-(4) необходимо, чтобы на произвольном отрезке $[0,\ x_m]\in G_n$ длиной $\Delta s=x_m-0$ искомые функции $u_n(x)$ и $h_n(x)$, шаг τ и sgn I удовлетворяли решению квадратного уравнения:

$$g\ (U^2 - g\tau\varphi_n)\Delta s^2 - U^4 \Delta s + \tau\varphi_n U^4 (1 + \operatorname{sgn} I) = 0.$$

Доказательство. В системе уравнений (9)-(10) переменными являются $(hu^2)_n(x)$ и $(hu)_n(x)$ в точках $x\in(0,\infty)$ подобласти G_n. Ее эквивалентность системе (1)-(2) гарантирована соблюдением законов сохранения. В плане динамической системы изучим связь искомых функций $u_n(x)$ и $h_n(x)$ в $(hu^2)_n(x)$ и $(hu)_n(x)$, когда уклон I>0 и I<0 на отдельных участках. Так как сходимость выражается неравенством $\tau<U^2/g\varphi_n$ [2], то подтверждением доказательства будет вывод этого неравенства из решения квадратного уравнения, заданного теоремой.

Для нахождения собственных параметров системы (9)-(10) исследуем задачу (9)-(11) без правой части. Ей отвечают интегральные уравнения Вольтерра в G_n

$$(hu^2)_n(x) = \eta_n \varphi_n^2 \exp\left\{-\int_0^x \left[\frac{g}{U_{n-1}^2(s)} + \frac{1}{\tau u_n(s)}\right] ds\right\}, \tag{12}$$

$$(hu)_n(x) = \eta_n \varphi_n \exp\left[-\int_0^x \frac{ds}{\tau u_n(s)}\right], \tag{13}$$

так как выведены согласно законам сохранения. Делением уравнения (12) на уравнение (13), поскольку $U_{n-1}(x)$ известно с момента t_{n-1}, находим скорость:

$$u_n(x) = \varphi_n \exp\left\{-\int_0^x \left[\frac{g}{U_{n-1}^2(s)}\right] ds\right\}. \tag{14}$$

Разделив выражение (13) на (14), получим глубину потока

$$h_n(x) = \eta_n \exp\left\{\int_0^x \left[\frac{g}{U_{n-1}^2(s)} - \frac{1}{\tau u_n(s)}\right] ds\right\}. \tag{15}$$

Исходя из того, что требуется определить собственные параметры волновода, запишем систему ОДУ (9)-(10) без правой части:

$$\frac{du_n}{dx} + \frac{g}{U_{n-1}^2(x)} u_n(x) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{dh_n}{dx} + \left[\frac{1}{\tau u_n(x)} - \frac{g}{U_{n-1}^2(x)}\right] h_n(x) = 0. \tag{17}$$

Для системы (16)-(17) имеют место два случая: 1) если коэффициент уравнения (17) больше нуля, то система устойчива; 2) если коэффициент меньше нуля, то она неустойчива, как динамическая система. Поэтому рассмотрим систему на произвольном участке $[0,\ x_m]\in G_n$, длина которого $\Delta s = x_m - 0$ с неизменным уклоном на всем участке. На этом участке знак уклона I, скрытый функцией $U_{n-1}(x)$, имеет явный вид. Далее знак уклона $\pm I = \mathrm{sgn}\, I$ вынесен перед формулой Шези $\pm U^2 = C^2 RI$ для момента времени t_{n-1}. Тогда для всех $U^2>0$ система (16)-(17) примет вид алгебраической системы с матрицей коэффициентов:

$$\left\|\begin{matrix} 1 + \dfrac{g\Delta s}{U_{n-1,m}^2} & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{\Delta s}{\tau u_{n,m}} - \dfrac{g\Delta s}{U_{n-1,m}^2} \end{matrix}\right\| = -(\mathrm{sgn}\, I).$$

В правой части учтен охват отрицательной обратной связью с помощью знака «–» перед sgn I. Интеграл в (15) является определенным интегралом, если, во-первых, на участке длиной Δs отношение $g/U^2=\mathrm{const}>0$. Во-вторых, если существует ограничение на шаг τ такое, что подынтегральная функция в (15) не имеет разрывов. По сути, матрица представляет собой условие ортогональности между вектором скорости $u(t,\ x)$ и дельта-функцией, выражающей значение глубины $h(t,\ x)$ в начале координат, чем отличается от [15].

Константой является волновое число $k=2\pi/\lambda$, где длина волны $\lambda=U^2/g=C^2RI/g$. Тогда параметры волновода описываются рельефом дна по оси русла подводной реки на шельфе, т.е. гидравлическим радиусом R, уклоном I и коэффициентом Шези C. Подводная река представляет собой продолжение реки от ее устья (эстуария) в открытое море, где течет по шельфу в океан. Подводная долина, по которой река течет и с шельфа скатывается каскадом на дно океана, вместе с каскадом служит направляющей. По ней цунами из океана врывается в подводную долину и далее в устье реки, так как сечение подводной долины обеспечивает наибольший расход в эстуарий.

Теперь перейдем к исследованию ограничения на шаг τ. Он должен быть таким, чтобы исключить несобственный интеграл 2-го типа в (15), т.е. ограничен так, что устраняется разрыв функции.

1) Случай $U^2>0$, $I>0$ отвечает распространению потока по склону. Искомое значение $u_{n,m}$ равно скорости u_n в x_m, но U – скорости u_{n-1} на том же участке Δs с уклоном $I>0$, поэтому sgn I = +1. Следовательно, в произвольной точке x_m из матрицы коэффициентов получим уравнение :

$$\left(1+\frac{g\Delta s}{U^2}\right)\left[1+\Delta s\left(\frac{1}{\tau u_n}-\frac{g}{U^2}\right)\right]=-(\operatorname{sgn} I).$$

Тогда Δs – длину отрезка $[0, x_m]$ находим путем решения квадратного уравнения:

$$g\,(U^2-g\tau u_n)\Delta s^2-U^4\Delta s+\tau u_n U^4(1+\operatorname{sgn} I)=0. \tag{18}$$

Корни уравнения (18) отвечают слоям двухслойного течения:

$$\Delta s_{1,2}=\frac{U^4\pm\sqrt{U^8-4g\tau u_n U^4(1+\operatorname{sgn} I)(U^2-g\tau u_n)}}{2g(U^2-g\tau u_n)}.$$

Они $\Delta s_{1,2}>0$, если выражение в знаменателе положительное, поскольку с учетом $\operatorname{sgn} I=+1$ дискриминант $D=U^8-8g\tau u_n U^4(U^2-g\tau u_n)<U^8$, а значит, корень квадратный из него меньше U^4. Скорость $U^2=C^2RI$ известна из предыдущего момента t_{n-1}, но $u_n(x)$ максимальна на границе $x=0$, так как задана условием (8) $u_n=\varphi_n$. Поэтому □$\Delta s_{1,2}>0$ произвольной длины

$$0<\tau<U^2/g\varphi_n. \tag{19}$$

Неравенство (19) как необходимое условие сходимости к 1D-уравнениям мелкой воды известно [2] и совпадает с методом Роте для уравнений Сен-Венана. Если $g\tau u_n=U^2$, то возникает разрыв из-за деления на нуль, а для всех $g\tau u_n>U^2$ расстояние $\Delta s_{1,2}$ в области $x\in[0, -\infty)$ или $\tau<0$. Следовательно, в области $G_n=\{(\tau, x)\colon \tau\in[t_{n-1}, t_n];\ x\in[0, \infty)\}\in G$ малость шага τ ведет к росту Δs, поэтому x_m стремится к правой границе $x\in[0, \infty)$, когда $\tau\to 0$. Таким образом, при переходе из G_{n-1} в G_n движение внутри отрезка $[0, x_m]$ не прерывается, если неравенство (19) включает длину волны $\lambda=U^2/g$ в виде $\tau<\lambda/u_n$.

Отрицательный уклон

Движение потока вверх по склону (в гору) имеет место, когда $U^2<0$, $I<0$. В природе отвечает распространению цунами над океаническим дном после взрыва подводных вулканов [17]. В этом случае в уравнениях (16)-(17) меняются знаки:

$$\frac{du_n}{dx}-\frac{g}{U_{n-1}^2(x)}u_n(x)=0,$$
$$\frac{dh_n}{dx}+\left[\frac{1}{\tau u_n(x)}+\frac{g}{U_{n-1}^2(x)}\right]h_n(x)=0.$$

Такой системе уравнений соответствует матрица коэффициентов (условие ортогональности):

$$\left\|\begin{matrix}1-\dfrac{g\Delta s}{U_{n-1,m}^2} & 0\\ 0 & 1+\dfrac{\Delta s}{\tau u_{n,m}}+\dfrac{g\Delta s}{U_{n-1,m}^2}\end{matrix}\right\|=-(\operatorname{sgn} I),$$

поэтому уравнение (18) примет вид:

$$g(U^2+g\tau u_n)\Delta s^2+U^4\Delta s-\tau u_n U^4(1+\operatorname{sgn} I)=0. \tag{20}$$

Так как $\operatorname{sgn} I=-1$ и $u_n=\varphi_n$, то полученное уравнение упрощается:

$$[g(U^2+g\tau\varphi_n)\Delta s+U^4]\Delta s=0. \tag{21}$$

Корни уравнения (22) неположительные

$$\Delta s_1 = 0;\;\; \Delta s_2 = \frac{-U^4}{g(U^2 + g\tau\varphi_n)}.$$

Поскольку никакие ограничения на корни не налагаются, то волна направлена в обратную сторону. Слева от Δs_1=0 образуется впадина, т.е. волна разрежения, где Δs_2<0. Тогда в целом вместо расчета интегралов (14)-(15) и отметок свободной поверхности $z_n(x)=I(x)+h_n(x)$ поведение волн на двух слоях модели определяется по их следу на поверхности русла.

Для не единичной обратной связи, например, sgn I=−0.5. Поэтому корни уравнения (20)

$$\Delta s_{1,2} = \frac{-U^4 \pm \sqrt{U^8 + 4g\tau\varphi_n U^4(1-0.5)(U^2+g\tau\varphi_n)}}{2g(U^2+g\tau\varphi_n)}$$

разного знака: Δs_1>0, Δs_2<0, так как радикал из дискриминанта $D=U^8+2g\tau u_n U^4(U^2+g\tau u_n)>U^4$. Хотя знаменатель в формуле $(U^2+g\tau u_n)>0$, но неравенство (19) справедливо, поскольку уклон дна I>0 и I<0 во всей подобласти $G_n \in G$, где наименьшим τ отвечает max φ_n. Относительно отметки свободной поверхности $z_n(x)$ волна в момент t_n набегает Δs_1>0, двигаясь вперед – прямой ход, затем отступает Δs_2<0, отхлынув назад – обратный ход. Такая динамика совпадает с поведением первой волны-цунами. Таким образом, пара корней Δs_1>0, Δs_2<0 определяет волнообразование и колебания. Теорема доказана.

Литература

1. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 448 с.
2. Вольцингер Н.Е. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 272 с.
3. Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б. Очерк истории исследования проблемы цунами в Сибирском отделении Российской академии наук // Вычислительные технологии. 1999. – Т. 4, № 5. – С. 70–105.
4. Петросян А.С. Дополнительные главы теории мелкой воды. – М.: Изд-во ИКИ РАН, 2014. – 64 с.
5. Шокин Ю.И. Численное моделирование наката волн цунами на побережье с использованием метода крупных частиц / Ю.И. Шокин, С.А. Бейзель, А.Д. Рычков, Л.Б. Чубаров // Матем. моделирование. – 2015. – Т. 27, № 1. – С. 99–112.
6. Марчук Ан.Г. Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, – 2015. – Т. 18, № 4. – С. 377–388.
7. Birkhoff G. Numerical fluid dynamics // SIAM Rev. – 1983. – Vol. 25, N. 1. – P.1-34.
8. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т.51, №1. – С. 170–184.
9. Булатов О.В. Аналитические и численные решения уравнений Сен-Венана для некоторых задач о распаде разрыва над уступом и ступенькой дна // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, №1. – С. 150–164.
10. Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 1. Вывод и общие свойства // Прикладная механика и техническая физика/ – 2009. – Т.50, №2. – С. 24–36.

11. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. – Тверь: Тверской государ. ун-т, 2016. – 222 с.
12. Constantin A. Nonlinear water waves: introduction and overview // Royal Society of London. Philosophical Transactions A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Vol. 376, Issue number 2111 (20170310), 2018 Jan 28. http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0310
13. Елизарова Т.Г., Иванов А.В. Квазигазодинамический алгоритм численного расчета двуслойных уравнений мелкой воды // Препринт ИПМ им. М. Келдыша. – 2016. – № 69. – 27 с.
14. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
15. Темиров Б.К., Тукембаева Г.Ч. Аналитическое решение уравнений мелкой воды методом Роте // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2020. – №3 (103). – С. 134–142.
16. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
17. Pegler, S.S., Ferguson, D.J. Rapid heat discharge during deep-sea eruptions generates megaplumes and disperses tephra // Nature Communications. Vol. 12, No 2292. Published: 21 April 2021. https://doi.org/10.1038/s41467-021-22439-y