УДК 519.3:62–50

Ж.Ш.Шаршеналиев, Т.П.Самохвалова, Д.О.Макиенко
Институт автоматики и информационных технологий
Национальной академии наук Кыргызской Республики, г.Бишкек
avtomatika_nankr@mail.ru, sam_tp@mail.ru

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОНТРОЛЕМ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА

Построен упрощенный алгоритм управления нелинейной системой с сосредоточенными параметрами с имитацией погрешностей в моменты контроля. Алгоритм основан на методе динамического программирования Р. Беллмана и методе характеристик.

Ключевые слова: оптимальное управление; стабилизация; метод характеристик; скачки величины управления.

Введение. В работах [1–3 и др.] разработаны аналитические методы решения дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. На основе этих методов в [4–5] получены приближенное решение уравнения Беллмана и построены алгоритмы управления с обратной связью одно- и двумерными линейными системами с сосредоточенными параметрами с явной зависимостью от коэффициентов управляемого объекта и минимизируемого критерия качества.

В данной работе эти алгоритмы применяются для стабилизации нагрева с излучением тепла. Уменьшены или устранены резкие скачки величины управления при периодическом измерении реального состояния одномерного динамического объекта.

1. Выбор параметра для устранения резких скачков величины управления

Математическую модель нагрева управляемого объекта с излучением тепла запишем в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bp(t) - \gamma\sigma x^4(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k].$$

При отсутствии излучения ($\gamma = 0$) модель нагрева линейная:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bp(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k]. \tag{1.1}$$

В численных расчетах для удовлетворительного достижения заданного желаемого состояния $g(t)$ объекта используем минимизацию квадратичного критерия качества

$$J = \gamma_1 \int_0^{t_k} \big(x(t) - g\big)^T Q\big(x(t) - g\big)dt + \gamma_2\big(x(t_k) - g\big)^T F\big(x(t_k) - g\big) + \beta \int_0^{t_k} p^2(t)dt\,. \tag{1.2}$$

Здесь A, Q, F – известные $n \times n$ матрицы, B, x – вектор-столбцы размерности $n \times 1$; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \sigma, t_k, \beta$ – известные постоянные; $p(t)$ – скалярная управляющая функция из множества допустимых управлений; $(^T)$ – символ транспонирования.

Задача 1.1. Найти синтезирующее управление $p(t, x(t))$ и соответствующее решение $x(t)$ уравнения (1.1), минимизирующие критерий качества (1.2).

Задачу 1.1 решаем методом динамического программирования Р. Беллмана.

Уравнение Беллмана с обращенным временем ($t = t_k - \tau, \quad dt = -d\tau$) имеет вид

$$\frac{\partial S(t,x(t))}{\partial t} = (Ax)^T \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x} + \gamma_1 (x-g)^T Q(x-g) - \frac{B^T B}{4\beta} \left(\frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x} \right)^T \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x},$$

с условием

$$S(0,x) = \gamma_2 (x(0)-g)^T F(x(0)-g).$$

Оптимальное синтезирующее управление равно

$$p^0(t,x(t)) = -\frac{1}{2\beta} B^T \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x}.$$

Линеаризованное уравнение Беллмана при $n=1, \; a<0$ запишем в виде

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} - ax\frac{\partial S(t,x)}{\partial x} = \left(\gamma_1 Q - \frac{b^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2 \right)(x-g)^2, \; S(0,x) = \gamma_2 F(x-g)^2$$

и применим методы [1–3]. Приближенное стабилизирующее управление, полученное по методу характеристик с линеаризацией уравнения Беллмана, имеет вид [4]

$$p(x(t)) = -\frac{b}{2a\beta} Mx(t) + \frac{bg}{a\beta} M, \quad M = \gamma_1 Q - \frac{b^2}{\beta} \gamma_2^2 F^2. \tag{1.3}$$

По технологическим требованиям часто достаточно, чтобы состояние объекта попадало в 5% зону от заданной желаемой величины $g(t)$.

Известно, что в численных расчетах на графиках часто возникает резкий скачок или «горб» величины управления в начале интервала времени. Для уменьшения величины скачка в [5] было предложено заданное состояние $g(t)$ в критерии качества выбирать в виде экспоненты с асимптотой

$$\lim_{t\to\infty} g(t) \equiv konst.$$

Известно, что имеются расхождения в расчетном и измеренном состояниях объектов. В данной работе эти расхождения учтены с помощью моделирования. Введена функция $h(t)$, имитирующая погрешности модели и приборов измерения в моменты времени $t_1, \; t_2$.

На рис. 1.1–1.4 приведены результаты расчетов нагрева по модели (1.1), (1.2) с управлением (1.3). Рассмотрены варианты $g(t) \equiv 1150$, $g(t) \equiv 830$, $g(t) = a + be^{\alpha t}$, где a, b, α – заданные числа.

В примере 1.1 управление в первой точке равно 3039.9.

В примерах 1.2, 1.3 приведен выбор параметра α. Показано, что максимальная величина (скачок) управления убывает от 2522.4 до 1537.1 при изменении параметра α от $\alpha = -15$ до $\alpha = -5$. При $\alpha = -1$ скачок отсутствует.

В примере 1.4 приведен периодический контроль температуры с управлением без скачка с пересчетом функции $g(t)$ в каждой точке измерения.

В примере 1.5 алгоритм управления линейной задачи с выбранным параметром $\alpha = -1$ использован в нелинейной задаче.

Выбор параметра α в функции $g(t)$ позволяет уменьшить скачок и получить стабилизирующее управление без скачка на данном интервале времени. Управление без скачка переводит температуру в заданную зону и удерживает её в зоне.

Пример 1.1. Вариант $g(t) \equiv 1150$. Максимальная величина управления $p_1(t)$ равна 3039.9. Стационарная величина управления равна 1537.1.

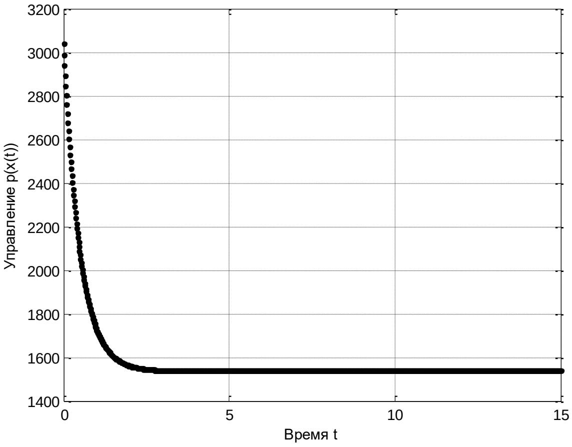

Рисунок 1.1. Управление $p_1(t), \quad g(t) \equiv 1150$

Пример 1.2. Вариант $g(t) = a + be^{\alpha t}$, $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1150$, $\alpha = -15$. Максимальные величины управлений $p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ равны соответственно 2522.4; 2122.3; 1537.1. Стационарная величина управления равна 1537.1.

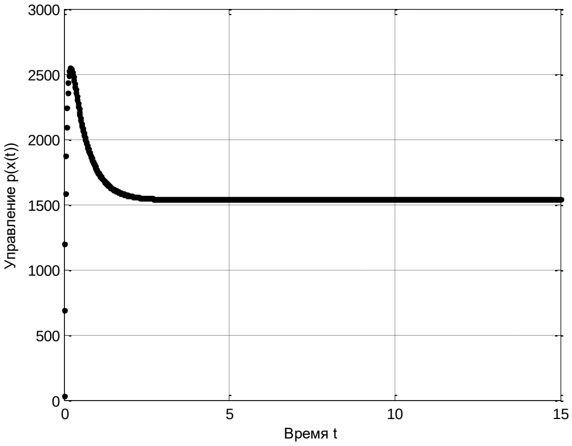

Рисунок 1.2. Управление $p_2(t), \quad g(t) = a + be^{\alpha t}, \quad \alpha = -15$

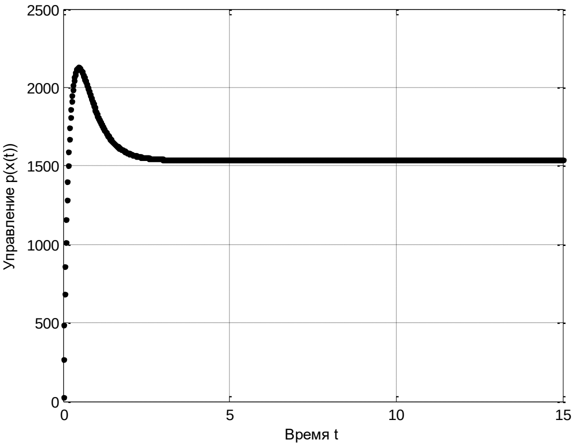

Рисунок 1.3. Управление $p_3(t), \quad g(t) = a + be^{\alpha t}, \quad \alpha = -5$

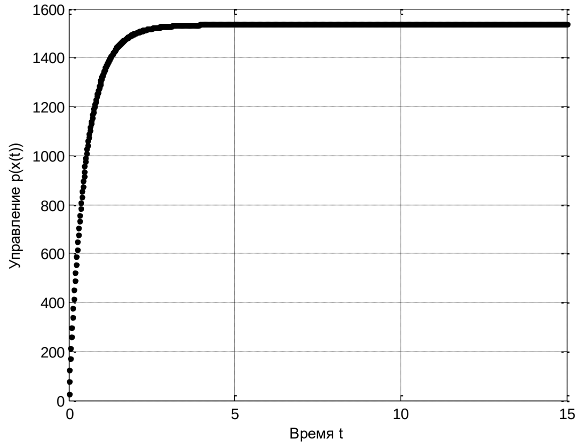

Рисунок 1.4. Управление $p_4(t), \quad g(t) = a + be^{\alpha t}, \quad \alpha = -1$

Пример 1.3. Вариант $g(t) = a + be^{\alpha t}$, $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 830$. В таблице 1.1 приведены результаты выбора параметра α.

Таблица 1.1 – Выбор α. Метод характеристик, квазилинеаризация, $n = 1$

N	$g(t)$	α	Величина скачка управ-ления	Управле-ние на интерв. стационар-ности	Норма управ-ления $\lVert u(t) \rVert$	Темпе-ратура стальн. изделия	Время достиж. 5% зоны
1	$g(t) \equiv 830$	–	2186.6	1105.6	4453.4	830.2 830.7	3.7 4.5
2	*Экспонента* $g(t) = a + be^{\alpha t}$	-10	1750	1106	4414.1	831	5
3	*Экспонента*	-5	1500	1106	4381.2	831	4
4	*Экспонента*	-2	1230	1105.6	4296.3	830.4 830.7	5 6.3
5	*Экспонента*	-1.0625	Визу-ально без скачка	1105.6	4185.9	830.2 830.7	7 10
6	*Экспонента*	-1	По расче-там без скачка	1105.6	4171.7	830.1 830.7	7.7 10
7	–	–	–	$u(t) \equiv 1105.6$	4285.5	830.1 830.7	7 9.4
8	–	–	–	$u(t) \equiv 1106$	4287.1	831	9.4

Данные табл. 1.1 показывают, что при уменьшении скачка норма управления убывает от 4453.4 до 4171.7; время попадания в 5% зону возрастает с 3.7 до 7.7. Стационарная величина управления для линейной модели равна $\bar{u} = 1105.6$.

Пример 1.4. Моделирование периодического контроля температуры в моменты времени t_1, t_2 с учетом погрешностей $h(t)$, вариант $g(t) = a + be^{\alpha t}$, $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 830$, $\alpha = -1$. На рисунках 1.5, 1.6 функция $g(t)$ пересчитывается при измерении температуры в каждый момент времени t_1, t_2, отмечена тонкой линией. Скачки управления отсутствуют.

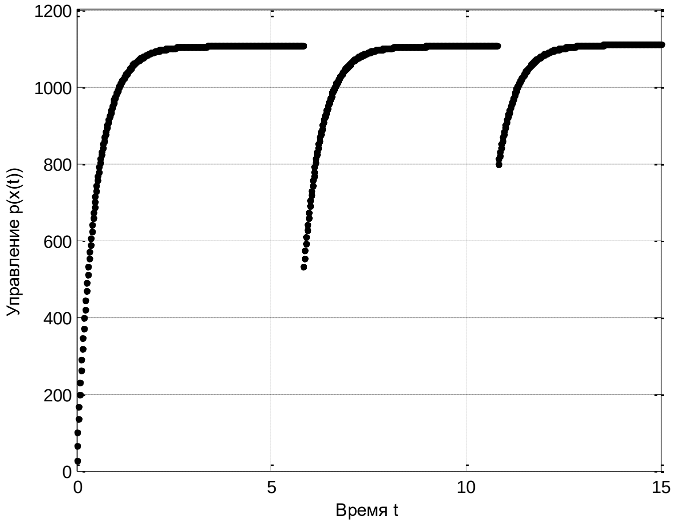

Рисунок 1.5. Управление при периодическом измерении, пересчет $g(t)$

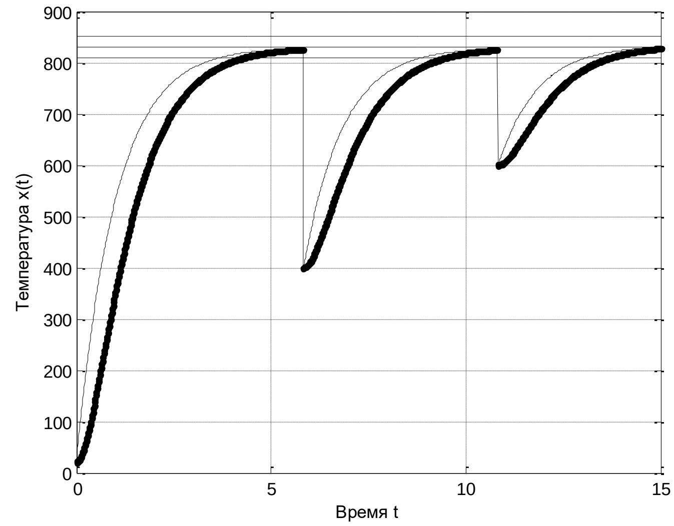

Рисунок 1.6. Температура при периодическом измерении, пересчет $g(t)$

Пример 1.5. Нелинейная модель нагрева. Вариант $g(t) = a + be^{\alpha t}$, $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 830$. Алгоритм управления (1.3), построенный для линейной модели (1.1), используем в нелинейной модели, когда излучение тепла присутствует ($\gamma = 1$). Графики управления и температуры идентичны графикам на рисунках 1.1–1.6. Стационарная величина управления для нелинейной модели равна $\bar{u} = 1106.6$.

2. Двумерная задача

Рассмотрим две функции $x_1(t),\ x_2(t)$ в линейном неоднородном уравнении в частных производных первого порядка с начальным условием

$$U_t(t,x_1,x_2)+a_1(t)x_1U_{x_1}(t,x_1,x_2)+a_2(t)x_2U_{x_2}(t,x_1,x_2)=f(x_1,x_2),$$

$$U(0,x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2). \qquad (2.1)$$

Здесь $a_1(t),\ a_2(t)\in C(0,t_k)$. Следуем процедуре [2, 3] с некоторыми модификациями. Составим соответствующее (2.1) однородное уравнение

$$u_t(t,x_1,x_2)+a_1(t)x_1u_{x_1}(t,x_1,x_2)+a_2(t)x_2u_{x_2}(t,x_1,x_2)=0,\quad u(0,x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2). \qquad (2.2)$$

Обозначим $P=1,\ Q_1=a_1(t)x_1,\ Q_2=a_2(t)x_2$ и составим уравнения характеристик в параметрической форме: $\dfrac{dt}{d\tau}=P,\ \ \dfrac{dx_1}{d\tau}=Q_1,\ \ \dfrac{dx_2}{d\tau}=Q_2$. Запишем уравнения $\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{Q_1}{P},\ \ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{Q_2}{P}$ и решим их. Обозначим

$$y_1(t)=\int_0^t a_1(s)ds,\quad y_2(t)=\int_0^t a_2(s)ds,$$

получим $x_1=c_1e^{y_1(t)},\ x_2=c_2e^{y_2(t)}$, где c_1,c_2 – постоянные интегрирования. Отсюда

$$c_1=x_1e^{-y_1(t)},\ c_2=x_2e^{-y_2(t)}.$$

Решение $u(t,x_1,x_2)$ однородного уравнения (2.2) равно

$$u(t,x_1,x_2)=\varphi(c_1,c_2)=\varphi(x_1e^{-y_1(t)},x_2e^{-y_2(t)}). \qquad (2.3)$$

Далее построим уравнения относительно вспомогательных функций $p_1(\tau,t,x_1),\ p_2(\tau,t,x_2)$ с соответствующими условиями:

$$p_{1t}(\tau,t,x_1)+a_1(t)x_1p_{1x_1}(\tau,t,x_1)=0,\quad p_1(t,t,x_1)=x_1;$$

$$p_{2t}(\tau,t,x_2)+a_2(t)x_2p_{2x_2}(\tau,t,x_2)=0,\quad p_2(t,t,x_2)=x_2. \qquad (2.4)$$

Построим функции

$$p_1(\tau,t,x_1)=x_1e^{-y_1(t-\tau)},\ p_2(\tau,t,x_2)=x_2e^{-y_2(t-\tau)}. \qquad (2.5)$$

Функции (2.5) являются решениями уравнений (2.4) и аргументами для построения решения $U(t,x_1,x_2)$ неоднородного уравнения (2.1):

$$U(t,x_1,x_2)=\varphi(p_1(0,t,x_1),p_2(0,t,x_2))+\int_0^t f(p_1(s,t,x_1),p_2(s,t,x_2))ds. \qquad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) получаем решение $U(t,x_1,x_2)$ неоднородного уравнения (2.1):

$$U(t,x_1,x_2)=\varphi(x_1e^{-y_1(t)},x_2e^{-y_2(t)})+\int_0^t f(x_1e^{-y_1(t-s)},x_2e^{-y_2(t-s)})ds. \qquad (2.7)$$

Формулы (2.3), (2.7) используем для приближенного решения задач синтеза оптимального управления в системах с сосредоточенными параметрами.

Заключение. Численные расчеты показали, что алгоритм управления на основе метода характеристик с квазилинеаризацией является работоспособным в рассмотренных примерах. Выбор параметра в желаемой траектории позволяет сгладить или устранить резкие скачки величины управления не только в начале интервала времени, но и в моменты периодического контроля состояния объекта. Норма управления уменьшается, время достижения заданной температуры несколько увеличивается.

Литература

1. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. – Л.-М.: ОНТИ, 1934.

2. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.

3. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 3. С. 410–414; 1992. Т. 325. № 6. С. 111–115; 1993. Т. 329. № 5. С. 543–546.

4. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана / Материалы Международной научной конф. «Механика твердых, жидких и газообразных сред», посвящ. 80-летию д.ф.-м.н., проф. Я.И. Рудаева, 2–3 декабря 2016 // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2017. – Т. 17. № 1. – С. 52–54.

5. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П. Приближенные алгоритмы управления и стабилизации в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами / Итоги науки. Том 2. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – М.: РАН, 2014. – С. 75–110.