УДК: 519.56(575.2)(043.3)

Х.Ш. Джураев, А.М. Наджмиддинов, С. Хасанов
Таджикский национальный университет, Таджикистан, Душанбе
hayrullo_58@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НАГРЕВЕ ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Материальная среда распространения тепла всегда связана с тепловым сигналом структурных единиц. Если процесс теплообмена является сложным, тогда для его исследования используются методы, обобщающие результаты различных простых методов. Одним из таких методов является метод фазовой плоскости. Поэтому, предложено стационарное распределение теплового потока в зависимости от температуры в конденсированных средах. Такой анализ необходим на этапах алгоритмизации нелинейных краевых задач и верификации моделей.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, стационарное состояния, фазовая плоскость, критические условия, тепловой поток; температура.

В настоящее время в целях тепловой защиты всё чаще применяются материалы с низкими коэффициентами теплопроводности, которые, как правило, растут с повышением температуры. Проблемы, связанные с нелинейным нагревом в конденсированных средах конструкций от действия внутренних источников теплоты, имеют важный научный и практический интерес [1-4]. При решении этих проблем важнейшей задачей является определение зависимости теплового потока от температуры, при которой количество получаемой от источника теплоты не может быть полностью отведено от конструкции при заданных граничных условиях теплообмена. Такие режимы нагрева приводят к неограниченному возрастанию температуры в конструкции и в конечном итоге – к её тепловому разрушению. Для определения зависимости теплового потока от температуры необходимо иметь приближенное решение соответствующей краевой задачи [5, 6].

Эффективным методом решения задач теплопроводности для нелинейного нагрева конденсированных сред конструкций является метод, основанный на применении некоторых пробных математических параметров (регуляризации, релаксации теплового потока) [7, 8].

Рассмотрим конденсированную среду, в которой на поверхности $x = x_0 = 0$ заданы нулевыми градиент температуры и плотность теплового потока, а на поверхности $x = x_n = h$ – некоторые, отличные от нуля, значения градиента температуры и плотности теплового потока. Процесс распространения тепла – в положительную половину конденсированных сред переменных (q,T), поскольку параметры поверхности одинаковы. Поэтому граничные условия для температуры и плотности теплового потока можно записать в виде:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad и \quad q|_{x=0} = 0;$$
$$-\lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=h} = \alpha(T_1 - T_2) \quad и \quad q|_{x=h} = \alpha(T_1 - T_2), \tag{1}$$

где T_1 и T_2 – соответственно, температура в начале и конце образца; α – коэффициент теплоотдачи $\left(\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{с})\right)$; h – длина образца, м.

Математическое моделирование теплопроводности для определения стационарной температуры конденсированных сред в конструкции с нелинейными внутренними источниками теплоты с учётом (1) в этом случае будет иметь вид [7, 8]:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{q}{\lambda} - \eta_1 T, \\ \dfrac{dq}{dx} = \varphi(T) - \eta_2 q, \end{cases} \tag{2}$$

где $T = T(x)$ – температура в точке x, (K), $q = q(x)$– плотность теплового потока в точке $x\left(\text{Вт}/\text{м}^2\right)$; $\eta_1 = \dfrac{\mu-1}{x+\varepsilon-(\mu-1)(x+\varepsilon)^{\mu}}, \left(\dfrac{1}{м}\right)$; $\eta_2 = \dfrac{1-\mu(\mu-1)(x+\varepsilon)^{\mu-1}}{x+\varepsilon-(\mu-1)(x+\varepsilon)^{\mu}}, \left(\dfrac{1}{м}\right)$, число компоненты, характеризирующей коэффициенты уравнения теплопроводности в конденсированной среде. При $\eta_1 + \eta_2 = 0$, то есть когда $\mu = 0$, среда имеет форму плоского сосуда, а когда $\eta_1 + \eta_2 = \dfrac{1}{x+\varepsilon}$, то есть $\mu = 1$, сосуд имеет цилиндрическую форму, а при $\eta_1 + \eta_2 = \dfrac{2}{x+\varepsilon}$, то есть $\mu = 2$ сосуд принимает сферическую форму, а ε малый параметр $(0 \le \varepsilon < 1)$. Функция $\varphi(T)$ описывает нелинейный теплообмен между телом и окружающей средой.

Будем рассматривать состояние равновесии и устойчивости системы. Приравнивая левые части уравнения (2) нулю, получим:

$$\begin{cases} -\dfrac{q}{\lambda} - \eta_1 T = 0, \\ \varphi(T) - \eta_2 q = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение системы уравнений (3) позволяет определить особую точку в фазовой плоскости (T,q). В зависимости от значения функции $\varphi(T)$, могут иметь бесконечное число равновесных состояний, то есть уравнения (3) может иметь бесконечное множество решений, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Таким образом, состояние равновесия является особой точкой, в которой плотность теплового потока сливается с потоком энергии, то есть $T(x_*) = q(x_*)$.

Характер состояния равновесия определяется корнями характеристического уравнения (2). В зависимости от направления теплообмена между телом и окружающей средой будем иметь один из случаев состояния равновесия. Крутизна функции $\varphi(T)$ определяет состояние равновесия.

Однако, зачастую найти аналитическое решение системы уравнений (3) невозможно. В этом случае применяем известные методы из теории дифференциальных уравнений, которые позволяют, не решая в явном виде уравнения (2), определить характер стационарного состояния, устойчивость или неустойчивость её решения. При этом используем некоторые свойства правых частей уравнения (2), а также особенности переходных процессов вблизи стационарного состояния $\varphi(T)$. Подчеркнем, что такого рода общие характеристики сложных систем уравнений представляют, как правило, наибольший интерес.

Сложная система может обладать несколькими стационарными состояниями, что соответствует наличию нескольких корней в алгебраических уравнениях (3) для определения координат стационарной точки. В случае одной переменной кривая пересекает ось абсцисс в нескольких точках, в каждой из которых функция $\varphi(T)$ обращается в нуль. Любая из этих точек $(\overline{T}_1, \overline{T}_2, \cdots)$, в которой функция $\varphi(T)$ обращается в нуль, является состоянием равновесия. В зависимости от значений тех или иных параметров системы или констант, а также теплового потока изменяется состояние равновесия и, кроме того, в системе могут реализоваться различные стационарные структуры. При дальнейшем нагревании вещества плотность теплового потока изменяется в пространстве. Поэтому для исследования характера изменения величины q в пространстве с изменением температуры, определим, используя уравнения (2), отношения $\dfrac{dq}{dT}$. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{dq}{dT} = \frac{-\lambda\varphi(T) + \lambda\eta_2 q}{q + \lambda\eta_1 T} = F_1(T,q)\ . \tag{4}$$

Здесь правая часть уравнения (4) обозначена через $F_1(T,q)$. Это означает, что нас будет интересовать характер и число состояний равновесия в системе в зависимости от величины q. Стационарные точки $T = \overline{T}$ определяются из уравнения

$$F_1(T,q) = 0 \text{ или } \varphi(\overline{T}) - \eta_2 q = 0\,. \tag{5}$$

Используя уравнение (5) исследуем, как будет двигаться изображающая точка по интегральным кривым на фазовой плоскости. Так как q представляет плотность теплового потока $q > \eta_1 T$, в этом случае в верхней фазовой полуплоскости изображающая точка двигается так, что температура T возрастает, а при $q < \eta_1 T$ в нижней полуплоскости T уменьшается. Таким путем определяется направление движения температуры по фазовым траекториям.

Из уравнения (5) вытекает уже отмеченное нами обстоятельство, что во всякой точке фазовой плоскости изображающая точка имеет конечный и отличный от нуля градиент, за исключением состояний равновесия, в которых

$$q = -\lambda\eta_1 T \text{ и } \varphi(T) = \eta_2 q\,.$$

В силу этих условий все состояния равновесия расположены в фазовой плоскости, на оси T, причем их абсциссы удовлетворяют уравнению $\varphi(T) = \eta_2 q$.

Теперь исследуем кривые на фазовой плоскости (q, T), в которых касательные к фазовым траекториям имеют один и тот же наклон. Если динамическая система описывается уравнениям (4), касательные к фазовым траекториям определяются выражением

$$\frac{\lambda(\eta_2 q - \varphi(T))}{q + \lambda\eta_1 T} = k\,, \tag{6}$$

где k – является коэффициентом теплопередачи $\left(\text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}\right)\right)$.

Придавая k различные значения, получаем семейство касательных к фазовой траектории. На фазовой плоскости построим определенное число касательных, необходимых для построения фазовой траектории. Чем ближе друг к другу расположены касательные, тем точнее можно будет провести фазовую траекторию.

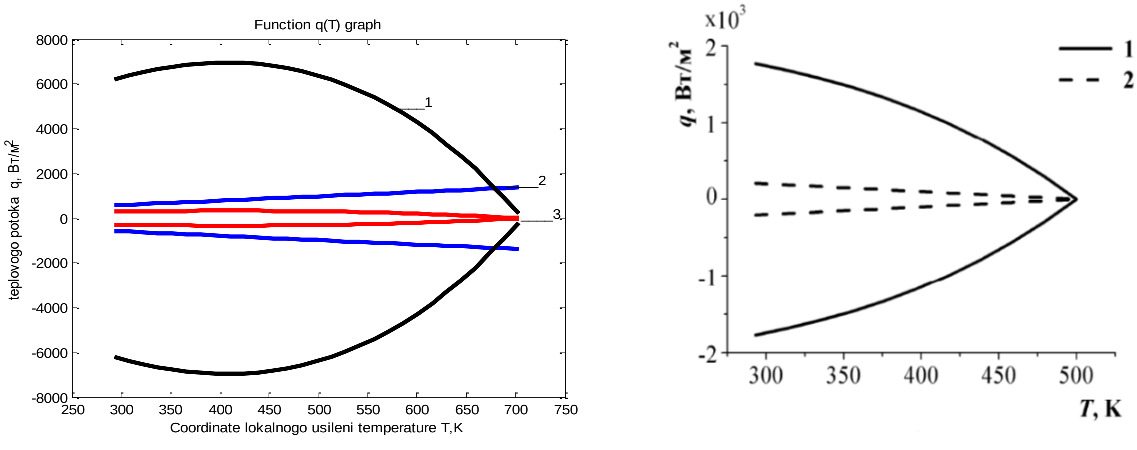
Уравнение касательной к фазовой траектории можно получить из выражения (6):

$$q = \frac{\lambda(\eta_1 kT + \varphi(T))}{\lambda\eta_2 - k}, \text{ при } \lambda\eta_2 \neq k. \qquad (7)$$

Для наглядной интерпретации полученных результатов, используя выражение (7), проведем численный расчёт зависимости плотности теплового потока от изменения температуры. При проведении численных расчётов функцию $\varphi(T)$ принимаем в следующем виде: $\varphi(T) = \alpha_1 T - \alpha_2 T^3$, где α_1, α_2 – коэффициенты пропорциональности. Значения коэффициентов α_1 и α_2, λ и χ взяты из работ [9, 10].

В алгоритм решения задачи построим на фазовой плоскости структуры, определяющие поведение решения краевой задачи. Задавая температуры T и решая уравнения (6) относительно переменной q, получим координаты ветвей сепаратрис. На рис. 1 представлены изображения нелинейных задач на плоскостях (T, q). Анализ рис.1 а) показывает, что нелинейность источника тепла приводит к росту теплового потока на порядок практически во всем диапазоне температур от 293 до 700 К на фазовой плоскости.

На фазовой плоскости (T, q) распределение температур в среде будет представлять собой небольшой отрезок вертикальной прямой, расположенный вблизи оси абсцисс. Численное решение задачи распределения температуры в среде [9] позволяет вычислить градиент температуры в оболочке. Он приблизительно равен $10^3\ К/м$ (см. рис. 1 б)). Фактически, решение задачи на плоскости (T, q) находится на оси абсцисс. На рис. 1 а) это решение будет непрерывным, представляющим практически вертикальную линию, проходящую через точку на оси абсцисс с координатой температуры между 300 и 350 К.



а) б)

Рисунок. 1. Зависимость теплового потока от изменения температуры на фазовой плоскости $(\mu = 0; 1; 2)$: а) кривая __1 представляют сепаратрисы $q(T)$ от T; __2 граничные условия; __3 теплообмен с учетом источника; б) результаты работы [9].

Таким образом, на фазовой плоскости (T, q) имеем только одно стационарное состояние: $T = -\frac{1}{\eta_1 k}\varphi(T)$. Это стационарное состояние равномерного температурного поля реагирующей массы при нагревании. Причем стационарное состояние достигается выделением теплового самовозгорания в системе при нагревании вещества.

Литература

1. Зельдович Я.Б. Математическая теория горения и взрыва [Текст] / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренбдатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе – М.: Наука, 1980. – 478 с.
2. Курдюмов С.П. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды [Текст] / С.П. Курдюмов, Е.С. Куркина, А.Б. Потапов, А.А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1986. – Т.26. № 8. – С.1189–1205.
3. Мержанов А.Г. Закономерности теплового взрыва в условиях нагрева с постоянной скоростью [Текст] / А.Г. Мержанов, А.Г. Струнина // Науч.-техн. проблемы горения и взрыва (Физика горения и взрыва). – 1965. – Т. 1. № 1. – С. 59–69.
4. Быстрай Г.П. Термодинамика необратимых процессов в открытых системах [Текст] / Г.П. Быстрай. – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 264 с.
5. Jomaas G. Spiral waves in expandinghydrogen–air flames: Experiment and theory [Text] / G. Jomaas, J.K. Bechtold, C.K. Law // Proceedings of the Combustion Institute. – 2007. – Vol. 31. № 1. – P. 1039–1046.
6. Bychkov V. Dynamics and stability of premixedflames [Text] / V. Bychkov, M.A. Liberman // Physics reports. – 2000. – Vol. 325, no. 4. – P. 115–237.
7. Джураев Х.Ш. Распространение тепла в твердом теле при независимости источников от температуры, содержащих параметр [Текст] / Х.Ш. Джураев, А.М. Наджмиддинов // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. естеств. наук. – 2012. – № 1(52). – С. 22–24.
8. Джураев Х.Ш. Исследование зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах [Текст] / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, А.М. Наджмиддинов // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. естеств. наук. – 2016. №1/1 (192). – С. 114–120.
9. Зимин В. П. Изображение и анализ граничных условий для уравнения теплопроводности на фазовых плоскостях [Текст] / В.П. Зимин // Изв. Том. политехн. ун-та. – 2011. – Т. 318. № 4. – С. 29–33.
10. Зимин В. П. Развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач [Текст] / В.П. Зимин // Изв. Том. политехн. ун-та. – 2012. – Т. 321. № 2. – С.17–21