# УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.3:62–50

*Ж.Ш. Шаршеналиев, Т.П. Самохвалова, Л.В. Третьякова*
*Институт автоматики и информационных технологий НАН КР*

# АЛГОРИТМ СТАБИЛИЗАЦИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ОБЪЕКТА

Построены алгоритмы управления и стабилизации для нелинейной системы с сосредоточенными параметрами. Алгоритмы основаны на методе динамического программирования Р. Беллмана и методе характеристик. Расчеты сравниваются с расчетами по методу Л. Понтрягина.

*Ключевые слова*: оптимальное управление; стабилизация; метод характеристик; скачки величины управления.

**Введение.** В работах [1–2] разработан способ решения задач оптимального управления и стабилизации со степенными нелинейностями с помощью функционально-степенных рядов В.И. Зубова. Оказалось, что с повышением размерности модели управляемой системы возрастает сложность составления вспомогательной бесконечной системы уравнений типа Риккати. В рамках метода динамического программирования Р. Беллмана на основании работ [3–5 и др.] была предпринята попытка найти другой способ решения уравнения Беллмана для задач управления с обратной связью [6–8].

В данной работе полученные методом характеристик алгоритмы применяются для стабилизации высокотемпературного нагрева с излучением тепла. Уменьшены или устранены резкие скачки величины управления при периодическом измерении состояния одномерного динамического объекта.

## 1. Постановка задачи

Математическую модель нагрева управляемого объекта с излучением тепла запишем в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bp(t) - \gamma\sigma x^4(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k]. \tag{1.1}$$

При отсутствии излучения ( $\gamma = 0$ ) модель нагрева линейная:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bp(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k]. \tag{1.2}$$

В численных расчетах для удовлетворительного достижения заданного желаемого состояния $g(t)$ объекта используем минимизацию квадратичного критерия качества

$$J = \gamma_1 \int_0^{t_k} \left(x(t) - g\right)^T Q\left(x(t) - g\right) dt + \gamma_2 \left(x(t_k) - g\right)^T F\left(x(t_k) - g\right) + \beta \int_0^{t_k} p^2(t) dt. \tag{1.3}$$

Здесь $A, Q, F$ – известные $n \times n$ матрицы; $B, x, g$ – вектор-столбцы размерности $n \times 1$; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \beta, t_k$ – известные постоянные; $\sigma$ – коэффициент Стефана-Больцмана; $p(t)$ –

скалярная управляющая функция из множества допустимых управлений, характеризует удельную мощность электрического тока; $({}^{T})$ – символ транспонирования.

*Задача 1.1.* Найти управление $p(t)$ и соответствующее решение $x(t)$ уравнения (1.1), минимизирующие критерий качества (1.3).

Линейную задачу (1.2), (1.3) ( $\gamma = 0$ ) решаем методом динамического программирования Р. Беллмана.

Уравнение Беллмана с обращенным временем ( $t = t_k - \tau, \quad dt = -d\tau$ ) имеет вид

$$\frac{\partial S(t,x(t))}{\partial t} = (Ax)^T \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x} + \gamma_1 (x-g)^T Q(x-g) - \frac{B^T B}{4\beta}\left(\frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x}\right)^T \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x}, \quad (1.4)$$

с условием $S(0,x) = \gamma_2 (x(0)-g)^T F(x(0)-g)$.

Оптимальное синтезирующее управление равно

$$p^0(t,x(t)) = -\frac{1}{2\beta} B^T \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x}. \quad (1.5)$$

В работах [6, 7] предложен новый вариант решения уравнения Беллмана, который основывается на методе параметризации и характеристик Н.М. Гюнтера [3] и методе дополнительного аргумента [4, 5]. На рис. 1 показано местонахождение предложенного способа решения среди других методов.

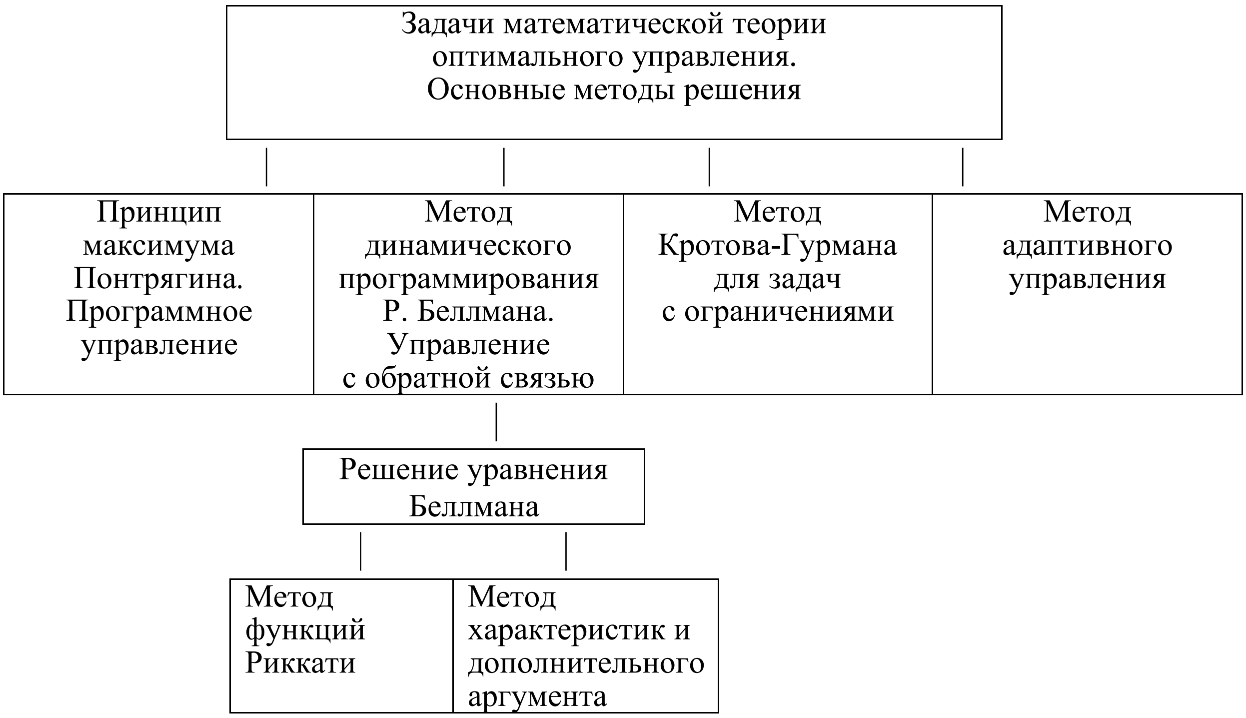



Рисунок 1. Методы решения задач оптимального управления

Линеаризованное уравнение Беллмана (1.4) при $n = 1,\ A < 0$ запишем в виде

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} - Ax\frac{\partial S(t,x)}{\partial x} = \left(\gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta}\gamma_2^2 F^2\right)(x-g)^2,\ S(0,x) = \gamma_2 F(x-g)^2 \quad (1.6)$$

и применим методы [3–5]. Приближенное стабилизирующее управление $p(x(t))$, полученное из (1.5), (1.6) по методу характеристик с линеаризацией уравнения Беллмана, имеет вид [6, 7]:

$$p(x(t)) = -\frac{b}{2A\beta} Mx(t) + \frac{Bg}{A\beta} M, \quad M = \gamma_1 Q - \frac{B^2}{\beta}\gamma_2^2 F^2. \quad (1.7)$$

По технологическим требованиям часто достаточно, чтобы состояние объекта попадало в 5% зону от заданной желаемой величины $g(t)$.

Известно, что в численных расчетах на графиках часто возникает резкий скачок или «горб» величины управления в начале интервала времени. В высокотемпературных объектах этот скачок особенно резко выражен. Для уменьшения величины скачка в [8] было предложено переходить в заданную зону с помощью функции $g(t)$ в критерии качества, выбранной в виде экспоненты с асимптотой

$$\lim_{t\to\infty} g(t) \equiv konst\,,$$

и выбирать параметры этой экспоненты. В [8] показано, что выбор параметров в $g(t)$ позволяет сгладить или устранить резкие скачки величины управления не только в начале интервала времени, но и в моменты периодического контроля состояния объекта. Данная работа продолжает [8], расчеты по методу характеристик сравниваются с расчетами по принципу максимума Л.С. Понтрягина и методом функций Риккати.

## 2. Расчеты по методу Понтрягина

Линейную задачу (1.2), (1.3) ( $\gamma = 0$ ) решаем методом принципа максимума Л.С. Понтрягина.

В методе Понтрягина требуется решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) - \frac{B^2}{2\beta a_0}\psi(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0; t_k]\,;$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -2a_0\gamma_1 Qx(t) - A\psi(t) + 2a_0\gamma_1 Qg, \quad \psi(t_k) = \psi_k, \quad a_0 = 1. \qquad (2.1)$$

Оптимальное программное управление вычисляется по формуле

$$p^0(t) = -\frac{B}{2\beta a_0}\psi(t). \qquad (2.2)$$

В результате расчетов по принципу максимума Понтрягина в линейной задаче получены следующие графики (рис. 2–4) вспомогательной (сопряженной) функции $\psi(t)$, управления $p(t)$, температуры $x(t)$.

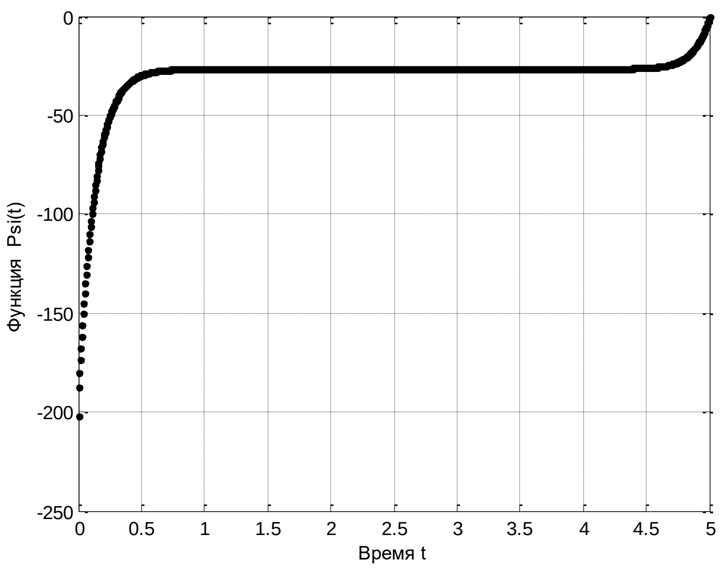



Рисунок 2. Вспомогательная (сопряженная) функция $\psi(t)$

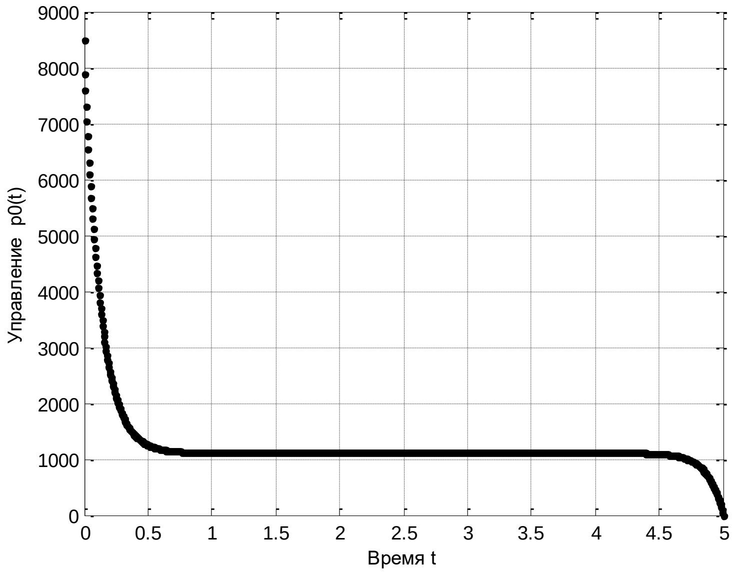



Рисунок 3. Программное управление $p^0(t)$

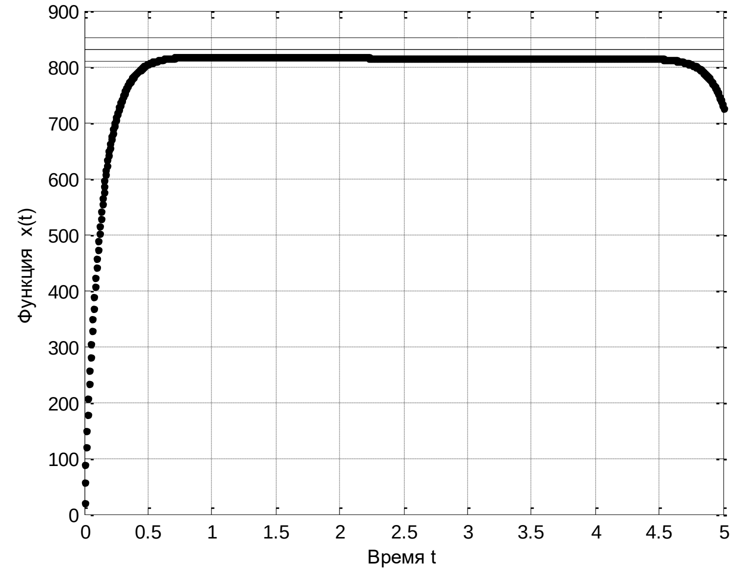



Рисунок 4. Температура $x(t)$

Рис. 3 показывает наличие скачка и наличие интервала стационарности в программном управлении (2.2), рис. 4 показывает приближение температуры к заданной зоне так же, как и в синтезирующих (с обратной связью) управлениях, построенных по функциям Риккати и характеристикам (1.7).

В процессе расчетов был модифицирован известный метод «стрельбы из неизвестной начальной точки $\psi(t_0)$ в известную конечную точку $\psi(t_k)$», при этом конечное условие $\psi(t_k)=\psi_k$ вычисляется не точно.

В данной работе предложен вариант «стрельбы из неизвестной начальной точки $\psi(t_0)$ в неизвестный минимум критерия качества $J(\psi(t_0))$», при этом конечное условие $\psi(t_k)=\psi_k$ выполняется точно. Относительно минимума $J$ известно, что он существует и единственный и вычисляется по формуле (1.3), $J \geq 0$.

Линейная модель (1.2) управляемого процесса одномерная, это позволяет систему (2.1) принципа максимума (два уравнения первого порядка) свести к одному уравнению второго порядка относительно $\psi(t)$ (двухточечная краевая задача с неизвестным начальным условием), которое решаем численно методом прогонки. Если удастся точно найти начальное условие $\psi(t_0)$, то найдем $\psi^0(t)$, затем по формуле (2.2) найдем оптимальное программное управление $p^0(t)$, по (1.2) соответствующее $x^0(t)$ и по (1.3) вычислим минимум критерия $J^0 = J(\psi(t_0))$.

На рис. 5–7 приведены графики зависимости неявной функции $J(\psi(t_0))$ от выбора начальной точки $\psi(t_0)$ с шагом $h = 0{,}01$.

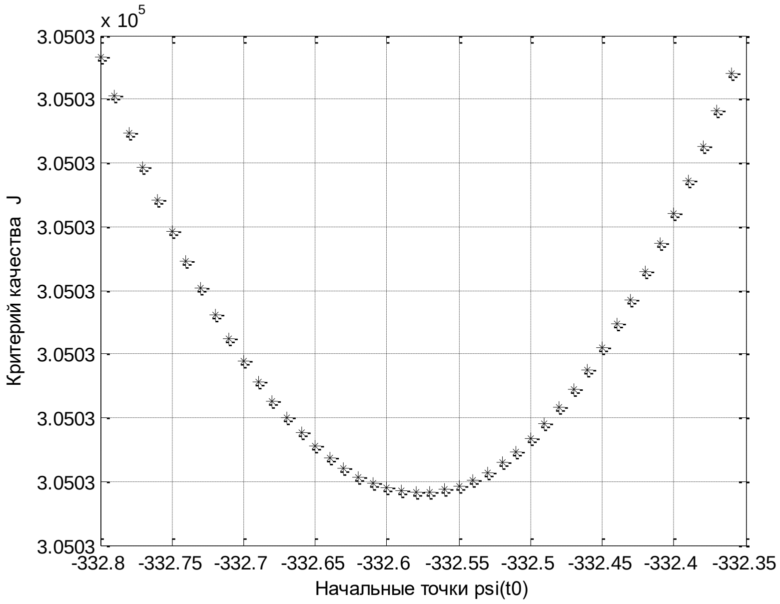



Рисунок 5. График зависимости величины критерия качества $J$ от выбора начальной точки $\psi(t_0)$

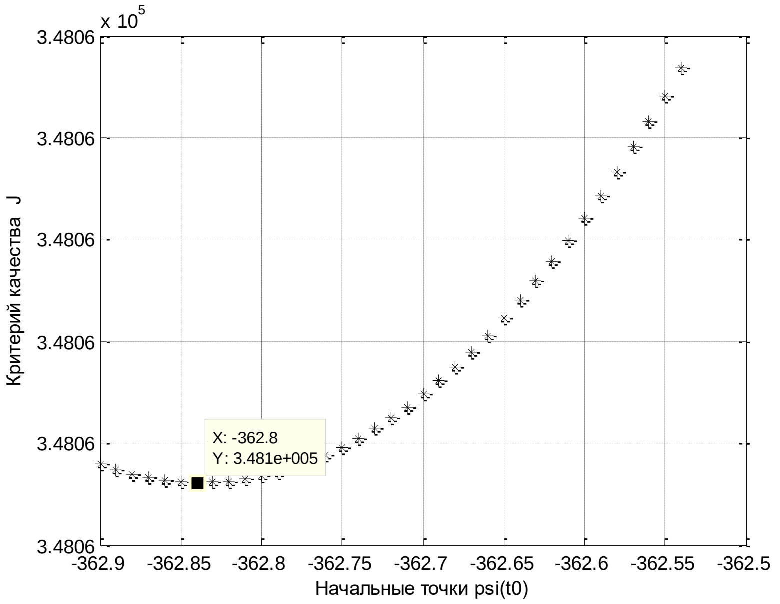



Рисунок 6. Минимум критерия $J$ при $\beta = 0{,}03$

Минимум критерия $J$ при $\beta = 0{,}03$; $N = 1900$ расположен между $\psi_1 = -362{,}85$ и $\psi_2 = -362{,}84$, разность соответствующих величин $J$ равна $J_1 - J_2 = -0{,}0001$. Минимум критерия при $\beta = 0{,}03$ полагаем равным $J = 3{,}4806 \times 10^5$.

Уменьшив шаг $h$ выбора начальной точки $\psi(t_0)$, можно получить более точные величины $\psi(t_0)$ и $J$.

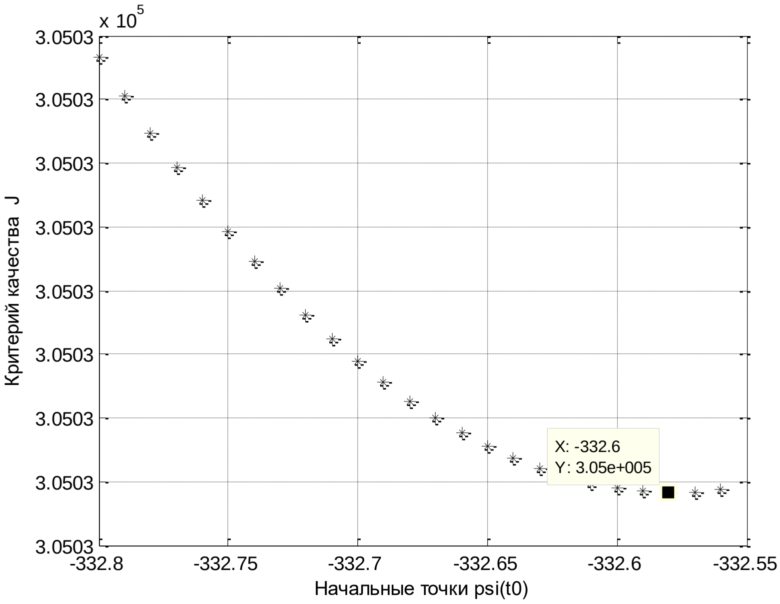



Рисунок 7. Минимум критерия $J$ при $\beta = 0{,}025$

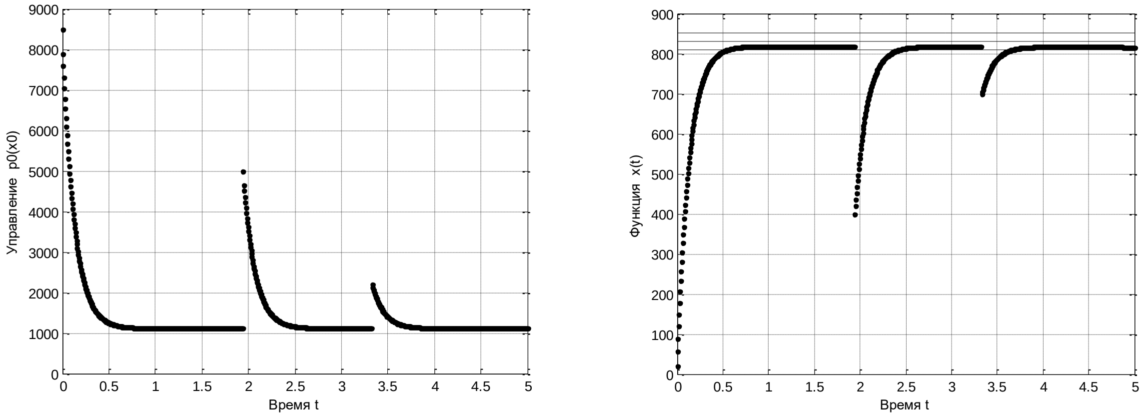
Минимум критерия $J$ при $\beta = 0{,}025$; $N = 1900$ расположен между $\psi_1 = -332{,}59$ и $\psi_2 = -332{,}58$, разность соответствующих величин $J$ равна $J_1 - J_2 = -0{,}0002$.

Минимум критерия при $\beta = 0{,}025$ полагаем равным $J = 3{,}0503 \times 10^5$.

Таким образом, получили, что расчеты по методу Понтрягина показывают скачок величины управления в начале интервала времени (рис. 3). При $g \equiv 830$, $\beta = 0{,}03$ скачок равен $4968{,}5$, на интервале стационарности величина управления около $1113{,}2$. Это удовлетворительно совпадает с расчетами по функциям Риккати [2] и по характеристикам [8].

Далее рассмотрим возможность уменьшения скачка в расчетах методом Понтрягина. Как в [8], функцию $g$ возьмем в виде экспоненты $g \equiv a + be^{\alpha t}$ с различными величинами $\alpha = -15;\ -5;\ -1$.

*Автоматизированная обратная связь в методе Понтрягина.* Известно, что явные относительно $x(t)$ аналитические формулы вида (1.7) синтезирующего управления позволяют реализовать обратную связь с управляемым объектом. При наличии быстродействующего компьютера можно численно организовать обратную связь в формулах (2.1), (2.2) метода Понтрягина. В (2.2) неявно присутствуют $x(t)$ и начальное условие $x_0$ из (2.1). В моменты $t_j$, $j = 1, \ldots, N$, контроля за текущим состоянием объекта в уравнениях (2.1) полагаем $x_0$ равным измеренной величине: $x_0 = x(t_j)$. Обращение к стандартным программам сокращает время расчетов новой функции $\psi(t)$. Получаем график процесса на интервале $[t_0, t_k]$ с измерением в моменты $t_0, t_1, t_2$ (рис. 8).




a) b)

Рисунок 8. a) Скачки управления, $g \equiv 830$. b) Температура измерений 20; 400; 700.

**3. Нелинейная задача**

В нелинейной задаче (1.1), (1.3) ($\gamma = 1$) используем алгоритм управления (1.7) линейной задачи (1.2), (1.3), построенный методом характеристик с выбранным параметром $\alpha$. Результаты расчетов удовлетворительные.

**Заключение.** Численные расчеты показали, что алгоритмы управления на основе методов Понтрягина, Беллмана с функциями Риккати, характеристик и дополнительного аргумента в рассмотренных примерах приводят к удовлетворительно совпадающим результатам.

***Литература***

1. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Сактанов У.А. Моделирование и оптимизация управляемых технологических процессов. – Бишкек: Илим, 2009. – 242 с.
2. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П. Приближенные алгоритмы управления и стабилизации в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами / Итоги науки. Т. 2. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – М.: РАН, 2014. – С. 75–110.
3. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. – Л.-М.: ОНТИ, 1934.
4. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 3. С. 410–414; 1992. Т. 325. № 6. С. 111–115; 1993. Т. 329. № 5. С. 543–546.
6. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана методом характеристик // Проблемы автоматики и управления. 2016. № 2 (31). – С. 51–56.
7. Самохвалова Т.П. Приближенное решение уравнения Беллмана / Материалы Междунар. научн. конф. «Механика твердых, жидких и газообразных сред», посвящ. 80-летию д.ф.-м.н., проф. Я.И. Рудаева, 2–3 декабря 2016 // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. –2017. – Т. 17. № 1. – С. 52–54.
8. Шаршеналиев Ж.Ш., Самохвалова Т.П., Макиенко Д.О. Алгоритм управления с периодическим контролем состояния объекта // Проблемы автоматики и управления. – 2017. № 2 (33). – С. 3–9.