Проблемы автоматики и управления. 2019, №2 (37)

УДК 517.946.9 **10.5281/zenodo.3594801**

Ж.Н. Кутунаев, zh.kutunaev@mail.ru

Ошский технологический университет им.акад.М.М.Адышева, г.Ош

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В МОДЕЛИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

В статье рассматривается уравнение гиперболического типа с функционально-дифференциальным граничным условием, частными случаями которого являются многие другие уравнения, встречающиеся в прикладных технических и инженерных науках.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, интегро-дифференциальное уравнение, струны, начальное и граничное условия, колебательные процессы, математическое моделирование, поперечные колебания.

Введение. Математическое моделирование колебательных процессов актуально в современной технике, механике, физике и т.д., так как большое количество технологических процессов носит колебательной характер. В данной работе рассматривается поперечные колебания длинной струны, которые описываются линейным уравнением в частных производных гиперболического типа с переменными коэффициентами. Особенностью модели процесса является то, что граничные условия имеют сложный характер, а именно, в них содержится нескольких коэффициентов и в силу некоторых предположений отсутствует начальное условие для функции $u(x,t)$, описывающей колебания. Предложен способ построения явного вида решения краевой задачи [1–2].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении волн на полу-ограниченной прямой $x \geq 0$. Как известно, процесс колебаний полуограниченной прямой зависит от граничного условия, от ее начальной формы $u(x,0)$ и распределения скорость $u_t(x,0)$ в начальный момент времени [3].

Если в начальной момент времени полуограниченной прямая занимает произвольное положение, а начальной импульс равен нулю, то ясно, чт колебание осуществляется только за счет граничного режима.

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{(Cx+D)^2}{AD-BC}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, t > 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$a_1 u_{tt}(0,t) + a_2 u_t(0,t) + a_3 u_x(0,t) + a_4 u(0,t) = M sin\omega t + N cos\omega t \tag{2}$$

и начальному условию

$$u_t(x,0)=0, \quad 0<x<\infty,\ t>0, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 —постоянные коэффициенты.

В [2] показано, что уравнения (1) допускают общее решение вида

$$u(x,t)=(Cx+D)\left(f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}+t\right)+g\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}-t\right)\right), \tag{4}$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные, f и g – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Эта функция удовлетворяет начальному условию (3), если ее выберем в виде

$$u(x,t)=(Cx+D)\left(f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}+t\right)+f\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}-t\right)\right). \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по t и по x и подставляя полученные результаты в (2), получаем

$$a_1D\left(f''\left(\frac{B}{D}+t\right)+f''\left(\frac{B}{D}-t\right)\right)+a_2D\left(f'\left(\frac{B}{D}+t\right)+f'\left(\frac{B}{D}-t\right)\right)+$$

$$+a_3\left\{C\left[f\left(\frac{B}{D}+t\right)+f\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]+\frac{AD-BC}{D}\left[f'\left(\frac{B}{D}+t\right)+f'\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]\right\}+$$

$$+a_4\left[f\left(\frac{B}{D}+t\right)+f\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]=Msin\omega t+Ncos\omega t,$$

или

$$a_1Df''\left(\frac{B}{D}+t\right)+\left(a_2D+\frac{a_3(AD-BC)}{D}\right)f'\left(\frac{B}{D}+t\right)+(a_3C+a_4D)f\left(\frac{B}{D}+t\right)+$$

$$+a_1Df''\left(\frac{B}{D}-t\right)+\left(\frac{a_3(AD-BC)}{D}-a_2D\right)f'\left(\frac{B}{D}-t\right)+(a_3C+a_4D)f\left(\frac{B}{D}-t\right)=$$

$$=Msin\omega t+Ncos\omega t.$$

Для краткости введем следующее обозначения:

$$p_1=a_2D+\frac{a_3(AD-BC)}{D}, \quad q_1=\frac{a_3(AD-BC)}{D}-a_2D, \qquad p_2=q_2=(a_3C+a_4D).$$

Тогда имеем следующее функционально-дифференциальное уравнение:

$$a_1Df''\left(\frac{B}{D}+t\right)+p_1f'\left(\frac{B}{D}+t\right)+p_2f\left(\frac{B}{D}+t\right)+a_1Df''\left(\frac{B}{D}-t\right)+q_1f'\left(\frac{B}{D}-t\right)+q_2f\left(\frac{B}{D}-t\right)=$$

$$=Msin\omega t+Ncos\omega t. \tag{6}$$

Как известно, общее решение вида (6) можно представить в виде [2]

$$f(t)=\bar{f}(t)+F(t),$$

где $\bar{f}(t)$ – общее решение однородного уравнения, $F(t)$ – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (6).

Сначала решим однородное уравнение

$$a_1Df''\left(\frac{B}{D}+t\right)+p_1f'\left(\frac{B}{D}+t\right)+p_2f\left(\frac{B}{D}+t\right)+$$

$$+a_1Df''\left(\frac{B}{D}-t\right)+q_1f'\left(\frac{B}{D}-t\right)+q_2f\left(\frac{B}{D}-t\right)=0. \qquad (7)$$

Решение уравнение (7) будем искать в виде [4]:

$$f(t)=e^{mt}+ke^{nt}, \qquad (8)$$

где $m, n, k -$ постоянные числа, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7) и положив $m+n=0$, получаем

$$a_1D\left(m^2e^{m\left(\frac{B}{D}+t\right)}+kn^2e^{n\left(\frac{B}{D}+t\right)}\right)+p_1\left(me^{m\left(\frac{B}{D}+t\right)}+kne^{n\left(\frac{B}{D}+t\right)}\right)$$

$$+p_2\left(e^{m\left(\frac{B}{D}+t\right)}+ke^{n\left(\frac{B}{D}+t\right)}\right)+$$

$$+\frac{1}{e^{(m+n)t}}\left[a_1D\left(m^2e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+kn^2e^{\frac{nB}{D}}e^{mt}\right)+q_1\left(me^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+kne^{\frac{nB}{D}}e^{mt}\right)+\right.$$

$$\left.+q_2\left(e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+ke^{\frac{nB}{D}}e^{mt}\right)\right]=0,$$

или

$$a_1Dm^2e^{\frac{mB}{D}}e^{mt}+a_1Dkn^2e^{\frac{nB}{D}}e^{nt}+p_1me^{\frac{mB}{D}}e^{mt}+p_1kne^{\frac{nB}{D}}e^{nt}+p_2e^{\frac{mB}{D}}e^{mt}+p_2ke^{\frac{nB}{D}}e^{nt}$$
$$+$$

$$+a_1Dm^2e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+a_1Dkn^2e^{\frac{nB}{D}}e^{mt}+q_1me^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+q_1kne^{\frac{nB}{D}}e^{mt}+q_2e^{\frac{mB}{D}}e^{nt}+$$
$$q_2ke^{\frac{nB}{D}}e^{mt}=0.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты e^{mt} и e^{nt} к нулю, получаем следующую систему уравнений относительно m, n и k:

$$\begin{cases} m+n=0, \\ e^{\frac{mB}{D}}(a_1Dm^2+p_1m+p_2)=-ke^{\frac{nB}{D}}(a_1Dn^2+q_1n+q_2), \\ e^{\frac{nB}{D}}(a_1Dn^2+p_1n+p_2)=-ke^{\frac{mB}{D}}(a_1Dm^2+q_1m+q_2). \end{cases}$$

Решая эту систему убеждаемся, что $m=0,\ n=0, k=-1$ и следовательно [4–5],

$$\bar{f}(t)=e^{mt}+ke^{nt}=0.$$

Частное решение уравнения (6) будем искать в виде:

$$F(t)=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t.$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned}
F\left(\frac{B}{D}+t\right) &= \alpha \sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)+\beta\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right),\\
F'\left(\frac{B}{D}+t\right) &= \alpha\, \omega\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)-\beta\omega\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right),\\
F''\left(\frac{B}{D}+t\right) &= -\alpha\, \omega^2\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right),\\
F\left(\frac{B}{D}-t\right) &= -\alpha \sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)+\beta\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right),\\
F'\left(\frac{B}{D}-t\right) &= \alpha\, \omega\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)+\beta\omega\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right),\\
F''\left(\frac{B}{D}-t\right) &= -\alpha\, \omega^2\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathbf{9})$$

Подставляя (9) в (6), получаем

$$a_1\left[-\alpha\,\omega^2\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)\right] + p_1\left[\alpha\,\omega\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)-\beta\omega\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)\right]+$$

$$+p_2\left[\alpha\sin\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)+\beta\cos\omega\left(\frac{B}{D}+t\right)\right]+a_1D\left[\alpha\,\omega^2\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)-\beta\omega^2\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]+$$

$$+q_1\left[\alpha\,\omega\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)+\beta\,\omega\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]+q_2\left[-\alpha\sin\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)+\beta\cos\omega\left(\frac{B}{D}-t\right)\right]=$$

$$= M sin\,\omega t + N cos\,\omega t.$$

После некоторых вычислений, сравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$, получаем эта два уравнения для определения α и β:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\left(-2a_1D\omega^2cos\frac{\omega B}{D}-p_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+p_2cos\frac{\omega B}{D}-q_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+q_2cos\frac{\omega B}{D}\right)-\\
&\quad-\beta\left(p_1\omega cos\frac{\omega B}{D}+p_2sin\frac{\omega B}{D}+q_1\omega cos\frac{\omega B}{D}-q_2sin\frac{\omega B}{D}\right)=M,\\
&\beta\left(-2a_1D\omega^2cos\frac{\omega B}{D}-p_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+p_2cos\frac{\omega B}{D}-q_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+q_2cos\frac{\omega B}{D}\right)+\\
&\quad+\alpha\left(p_1\omega cos\frac{\omega B}{D}+p_2sin\frac{\omega B}{D}+q_1\omega cos\frac{\omega B}{D}-q_2sin\frac{\omega B}{D}\right)=N.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Для краткости введем следующие обозначения:

$$\sigma_1 = -2a_1D\omega^2cos\frac{\omega B}{D}-p_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+p_2cos\frac{\omega B}{D}-q_1\omega sin\frac{\omega B}{D}+q_2cos\frac{\omega B}{D},$$

$$\sigma_2 = p_1\omega cos\frac{\omega B}{D}+p_2sin\frac{\omega B}{D}+q_1\omega cos\frac{\omega B}{D}-q_2sin\frac{\omega B}{D}.$$

Тогда система (10) примет вид

$$\begin{cases}\sigma_1\alpha + \sigma_2\beta = M,\\ \sigma_1\beta + \sigma_2\alpha = N,\end{cases}$$

откуда

$$\alpha = \frac{M\sigma_1 + N\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\ , \quad \beta = \frac{N\sigma_1 - M\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\,.$$

Таким образом получим общее решение неоднородного уравнения (6) в виде

$$F(t) = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t = \frac{M\sigma_1 + N\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\sin\omega t + \frac{N\sigma_1 - M\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\cos\omega t. \qquad (11)$$

Вывод. Используя (11), построим теперь искомое решение задачи (1)–(3):

$$u(x,t) = (Cx + D)\left\{\frac{M\sigma_1 + N\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} sin\left[\omega\left(\frac{Ax + B}{Cx + D} + t\right)\right] + \frac{N\sigma_1 - M\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} cos\left[\omega\left(\frac{Ax + B}{Cx + D} + t\right)\right]\right.$$
$$+$$
$$\left. + \frac{M\sigma_1 + N\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} sin\left[\omega\left(\frac{Ax + B}{Cx + D} - t\right)\right] + \frac{N\sigma_1 - M\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} cos\left[\omega\left(\frac{Ax + B}{Cx + D} - t\right)\right]\right\}.$$

Пример. Найти решение (1) – (3) при $a_1 = a_4 = 0,\ A = C = D = 1, B = 0.$

Решение. В данном случае уравнение (6) имеет вид

$$p_1 f'(t) + p_2 f(t) + q_1 f'(-t) + q_2 f(-t) = Msin\,\omega t + Ncos\,\omega t. \qquad (12)$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде $F(t) = \alpha sin\,\omega t + \beta cos\,\omega t$. Тогда будем иметь

$$p_1(\alpha\omega\cos\omega t - \beta\omega\sin\omega t) + p_2(\alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t) + q_1(\alpha\omega\cos\omega t + \beta\omega\sin\omega t) +$$
$$+ q_2(-\alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t) = Msin\,\omega t + Ncos\,\omega t,$$

$$\begin{cases}-p_1\beta\omega + p_2\alpha + q_1\beta\omega - q_2\alpha = M,\\ \ p_1\alpha\omega + p_2\beta + q_1\alpha\omega + q_2\beta = N,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha(p_2 - q_2) + \beta\omega(q_1 - p_1) = M,\\ \alpha\omega(p_1 + q_1) + \beta(p_2 + q_2) = N,\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha(p_2 - q_2) - \beta\omega(p_1 - q_1) = M,\\ \alpha\omega(p_1 + q_1) + \beta(p_2 + q_2) = N,\end{cases}$$

$$\alpha = \frac{M(p_2 + q_2) + N(p_1 - q_1)\omega}{(p_2^2 - q_2^2) + (p_1^2 - q_1^2)\omega^2}\ , \quad \beta = \frac{N(p_2 - q_2) - M(p_1 + q_1)\omega}{(p_2^2 - q_2^2) + (p_1^2 - q_1^2)\omega^2}\,.$$

В нашем случае $p_1 = a_2 + a_3,\ p_2 = a_3,\ q_1 = a_3 - a_2,\ q_2 = a_3$ и, следовательно,

$$\alpha = \frac{2a_3M + 2a_2N\omega}{((a_2 + a_3)^2 - (a_3 + a_2)^2)\omega^2} = \frac{a_3M + a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2}\ , \quad \beta = -\frac{M}{2a_2\omega}\,.$$

Мы нашли $F(t)$ для примера

$$F(t) = \frac{a_3M + a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2}\sin\omega t - \frac{M}{2a_2\omega}\cos\omega t\,.$$

Вывод. Используя найденное $F(t)$, построим искомое решения [6]:

$$u(x,t) = (x+1)\left\{\frac{a_3M + a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2} sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1} + t\right)\right] - \frac{M}{2a_2\omega} cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1} + t\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{a_3M + a_2N\omega}{2a_2a_3\omega^2} sin\left[\omega\left(\frac{x}{x+1} - t\right)\right] - \frac{M}{2a_2\omega} cos\left[\omega\left(\frac{x}{x+1} - t\right)\right]\right\}.$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1977. –736 с.
2. А.А. Самарский, А.П.Михайлов, Математическое моделирование. –М.: Физматлит, 2005.
3. В.С. Зарубин Математическое моделирование в технике. – М.: Издательство МГТУ им.Н.Э. Баумана.
4. Кутунаев Ж.Н. Обобщенные решения волновых уравнений одного класса // Проблемы автоматики и управления. – 2019. – №1 (36). – С 141–146.
5. Кутунаев Ж.Н. Решение модельных задач с помощью уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами // Проблемы автоматики и управления.– 2017. – №1 (32). – С. 11–14.
6. Создание математической модели колебаний струны и ее прменение // Известия КГТУ им. И. Раззакова, №2 (46), Бишкек, 2018. – С. 356–360