Проблемы автоматики и управления. 2019, №2 (37)
УДК 519.633.550.34 **10.5281/zenodo.3594804**

А.Дж. Сатыбаев, Г.С. Курманалиева – аспирант
Ошский технологический университет им. М.М. Адышева
abdu-satybaev@mail.ru, gulzat-kurmanalieva@mail.ru

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЕЙСТВИЙ ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

В статье изложена двумерная прямая задача, возникающая при распространении потенциала действий по нервному волокну. При этом возникает задача параболического типа и с использованием преобразования Лапласа эта задача приводится к задаче гиперболического типа, которая учитывает и скорость распространения потенциала действий. Построен численнный алгоритм решения с применением конечно-разностного метода задачи гиперболического типа. Доказана теорема о сходимости построенного приближенного решения к точному решению.
Задачи гиперболического и параболического типов эквивалентны, следовательно, конечно-разностное решение параболической задачи также сходится к точному решению.

Ключевые слова. Двумерная, прямая задача, нервное волокно, потенциал действий, параболическая задача, гиперболическая задача, преобразование Лапласа, метод конечно-разностный, численный алгоритм, приближенное решение, сходимость решения.

Введение. Обзор. Потенциал покоя-это разность электрических потенциалов между внутренней и внешней средой клетки.

Потенциал действия – это возбуждение клетки, быстрое колебание мембранного потенциала вследствие диффузии ионов в клетку и из клетку.

Возбуждение происходит при воздействии раздражителя на клетки ткани. Таким образом, в начале активизируются и инактивизируются натриевые каналы, а затем калиевые каналы.

Он является специфическим признаком возбуждения. Нервный импульс возникает в любой точке возбудимой мембраны нервного волокна и способен распространяться вдоль поверхности нервного волокна.

Потенциал действия распространяется при перемещении ионов через мембрану нервной клетки и передается из одной нервной клетки в другую с помощью нейромедиаторов.

Нейрон является одним из важных элементов нервной системы.

Нервный импульс, или потенциал действия, исследован в работах [1, 2].

Моделированные био-медэлектрических явлений – одно из современных направлений изучения процессов, протекающих в живых элетровозбудимых структурах.

В статьях Е.В. Максименко [3–6] разработана модель изменения трансмембранного потенциала нервного волокна при распространении по нервному волокну возбуждения. На основе интегрального преобразования Лапласа и теоремы Эфоса, когда входной импульс возбуждения отклоняется от ступенчатой функции Хевисайда И.Т. Селезавым и др. [7] получено точное аналитическое решение задачи распространения потенциала действия в модели Ходжкина-Хаксли.

Решение задачи нервного импульса по аксону для возбуждающего импульса произвольной формы исследовано в [8], а в статье [9] проведен анализ изменения формы нервного импульса.

Вывод уравнения распространения потенциала действий

Нервный импульс распространяется вдоль аксоны (нервного волокна) с некоторой скоростью без изменения амплитуды. Перемещение потенциала действий связано с перемещением вдоль аксоны локальной (местной) деполяризации с положительным знаком заряда внутри мембраны. По мере продвижения волны деполяризации происходит реполяризация, так что в каждый данный момент небольшой участок нервного волокна оказывается деполяризованным.

Распространение нервного импульса вдоль гладкого немиелинизированного волокна описывается системой Ходжкина-Хаксли [10]:

$$C\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-J(\varphi),$$

где C – емкость мембраны, R – сумма внутреннего и внешнего сопротивлений электролитов на единицу длину волокна, φ – плотность электрического тока, протекающего через мембрану,

$$J(\varphi)=h^2P_k(\varphi-\varphi_k^0)+hm^3P_{Na}(\varphi-\varphi_{Na}^0)+P(\varphi-\varphi_1)$$ – ионный ток.

Выше указанное уравнение является одномерным нелинейным уравнением диффузии. Здесь

$$\varphi_k=(KT/e)\ln(C_k^0/C_k^i),\ \varphi_{Na}=(KT/e)\ln(C_{Na}^0/C_{Na}^i),$$

T – абсолютная температура, e – заряд электрона, $C_{K(Na)}^0, C_{K(Na)}^i$ – внешняя и внутренняя концентрация, K – коэффициент, m,h,n – параметры, удовлетворяющие

$$\frac{d(m/h/n)}{dt}=\alpha_{(m/h/n)}*(1-(m/h/n))-\beta_{(m/h/n)}*(m/h/n),$$

α,β – коэффициенты от мембранного потенциала.

Постановка параболической задачи

Процесс распространения потенциала действий по нервному волокну описывается параболическим уравнением [11, стр.110; 12, стр.138]:

$$C_m(x,y)u'_t(x,y,t)=\frac{r_a(x,y)}{2\rho_a(x,y)}\Delta u(x,y,t)-\frac{u(x,y,t)}{\rho_m(x,y)l},\ (x,t)\in R_+^2,\ y\in R, \qquad (1)$$

где $C_m(x,y)$ – емкость на единицу площади мембраны, $r_\alpha(x,y)$ – радиус нервного волокна, $\rho_m(x,y), \rho_a(x,y)$ – удельное сопротивление плазмы и нервного волокна, l – толщина мембраны, $u(x,y,t)$ – внутриклеточный потенциал действий, индексы a и m означают индексы аксоны (нервной волокны) и мембраны соответственно, $\Delta u(x,y,t)=u''_{xx}(x,y,t)+u''_{yy}(x,y,t)$ – оператор Лапласа.

Для определения единственности решения уравнения (1) задаем начальное и граничное условие следующего вида:

$$u(x,y,t)|_{t<0}\equiv 0,\ u'_x(x,y,t)|_{x=0}=h(y)\theta(t)+r(y)\theta_1(t)+p(y)\theta_2(t),\ t\in R_+, \qquad (2)$$

где $h(y),\ r(y),\ p(y)$ – заданные функции, $\theta(t)$ – тета функция Хевисайда, $\theta_1(t)=t\theta(t)$, $\theta_2(t)=\frac{t^2}{2}\theta(t)$.

Постановка гиперболической задачи

Используя методики С.И.Кабанихина [13] (преобразование Лапласа) из задачи (1)–(2) получим задачу уравнения гиперболического типа [14]:

$$C_m(x,y)\frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{r_a(x,y)}{2\rho_a(x,y)}\Delta V(x,y,t)-\frac{V(x,y,t)}{\rho_m(x,y)\,l},\ (x,t)\in R_+^2,\ y\in R, \qquad (3)$$

$$V(x,y,t)|_{t<0}\equiv 0,\ \left.\frac{\partial V(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t)+p(y)\theta_1(t),\ y\in R,\ t\in R_+, \qquad (4)$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака, $h(y),\ r(y),\ p(y)$– заданные функции.

Решение этих задач $u(x,y,t)$ и $V(x,y,t)$ связано следующим интегралом

$$u(x,y,t)=\int_0^\infty V_t(x,y,\tau)G_t(t,\tau)d\tau=\int_0^\infty V(x,y,\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau, \qquad (5)$$

где $G(t,\tau)$ – функция Грина, $G(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$.

Целью данной статьи является разработка численного решения задачи (3)-(4), т.е. определение функции $V(x,y,t)$ при известных значениях коэффициентов $C_m(x,y),\ r_a(x,y),\ l,\ \rho_a(x,y),\ \rho_m(x,y)$, а также известных значениях $h(y),\ r(y),\ p(y)$.

Пусть относительно коэффициентов уравнения и начальных функций выполнены условия [14]:

$$C_m(x,y),\ r_a(x,y),\ \rho_a(x,y),\ \rho_m(x,y)\in\Lambda_1,\quad h(y),r(y),p(y)\in\Lambda_2,\ l>0\}, \qquad (6)$$

где $\Lambda_1=\{C_m(x,y)\in C^2((0,d)x(-D_1,D_1)),\quad 0<M_1\le C_m(x,y)\le M_2\}$,

$$\Lambda_2=\sup p\{h(y)\}\in(-D,D),\quad h(y)\in C(-D,D), \qquad (6')$$

$D=D_1+T(M_2+\alpha),\quad T=\frac{2\alpha}{(M_1-\alpha)},\quad M_1,M_2,D$ – положительные постоянные числа.

Сведение задачи (3)-(4) к регулярной задаче

Решаем следующую задачу Эйконала и выпрямляем характеристики уравнения [15]:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)=\dfrac{2\rho_a(x,y)C_m(x,y)}{r_a(x,y)}\\ \alpha(x,y)|_{x=0}=0,\quad \alpha(x,y)|_{x=0}=\dfrac{2\rho_a(0,y)\cdot C_m(0,y)}{r_a(0,y)}\\ \alpha_x(x,y)>0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x,y)=\infty\end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Введем новые функции $Cm(\alpha(z,y),y)=C_m(x,y),\ \rho a(\alpha,y)=\rho_a(x,y),\ \rho m(\alpha,y)=\rho_m(x,y)$, $ra(\alpha,y)=r_a(x,y),\ \vartheta(\alpha(x,y),y,t)=V(x,y,t)$.

Теперь представим решение прямой задачи в виде сингулярной и регулярной частей [15]:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)+S(t,y)\theta(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_1(t-|\alpha|)+P(t,y)\theta_2(t-|\alpha|), \qquad (8)$$

где $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ – непрерывная функция.

При этом получим прямую задачу с данными на характеристиках [15]:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L_1\vartheta(\alpha,y,t), \quad |\alpha|<y<T,\ y\in(-D,D)\\ \vartheta(\alpha,y,t)_{|\alpha|=t}=S(t,y),\ t\in(0,T),\quad y\in(-D,D)\\ \vartheta(\alpha,y,t)_{y=-D}=\vartheta(\alpha,y,t)_{y=D}=0\end{array}\right\}, \qquad (9)$$

где $$L_1\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)Cm(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\alpha_y'\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}\right]-$$

$$-\frac{1}{Cm(\alpha,y)\rho a(\alpha,y)}\cdot\vartheta(\alpha,y,t).$$

Конечно-разностное решение. Доказательство теоремы о сходимости конечно-разностного решения к точному решению проведем по методике [16]. При решении последней задачи (9) нам потребуются значения $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t},\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial\alpha},\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}$ при $|\alpha|=t.$ Значение $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}$ при $|\alpha|=t$ находим из (9), а остальные из (6)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial y}\right|_{|\alpha|=t}=S_y(t,y),\ \ t\in(0,T),\ \ y\in(-D,D),\\ \left.\dfrac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial t}\right|_{|\alpha|=t-0}=S_1(t,y)+R(t,y),\ t\in(0,T),\ y\in(-D,D),\\ \left.\dfrac{\partial\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}\right|_{|\alpha|=t}=-sign\alpha\, R(t,y),\ t\in(0,T),\ y\in(-D,D).\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Приближенное решение задачи (9) будем строить конечно-разностным методом и для этого введем равномерную сеточную область, разностные отношения и обозначения. В дальнейшем, для сокращения в обозначениях (9) индексы *i,j,k* в решении разностной схемы будем опускать или частично опускать, например

$$V_{\bar\alpha}(i,j,k)=V_{\bar\alpha},\ V_{\bar t}(i,j),\ V_{\bar y}(k,j+1)=\frac{V_{ij+1}^k-V_{ij}^k}{h_2}, \qquad (11)$$

$$V(k,j-1)=V_{ij-1}^k,\ V_{\bar y}(i,k-1)=\frac{V_{ij}^{k-1}-V_{ij-1}^{k-1}}{h_2}, \qquad (12)$$

$$V_{\bar t}(i,j)=\frac{V_{ij}^k-V_{ij}^{k-1}}{\tau},\ \ V_\alpha(i,j,k+1)=\frac{V_{i+1j}^{k+1}-V_{ij}^{k+1}}{h_1} \qquad (13)$$

Отбрасывая малые члены $O(h^2,h_2^2,\tau^2)$, (9) приведем к разностной задаче:

$$\left.\begin{aligned}
&V_{t\bar{t}} = V_{\alpha\bar{\alpha}} + LV_{ij}^{k}, \ \left(ih_1,\, jh_2,\, \tau k\right) \in \Omega_{ij}^{k},\\
&V_{\pm i,j}^{|2i|} = S_{j}^{|2i|}, \ \ i = \overline{-N,N}; \ \ j = \overline{-L,L};\\
&V_{i,L}^{k} = V_{i,-L}^{k} = 0, \ \ \ i = \overline{-N,N}; \ \ \ \ k = \overline{|2i|,2N};
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $LV_{ij}^{k} = \dfrac{ra_{ij}}{2*\rho a_{ij}Cm_{ij}}\left[V_{y\bar{y}} + \left(\alpha_{ij}\right)_y V_{\alpha\bar{y}} + \Delta\alpha_{ij}V_{\overset{\circ}{\alpha}}\right] + \dfrac{1}{Cm_{ij}\rho a_{ij}} * V_{ij}^{k}$,

Cm_{ij}, $\left(\alpha_{ij}\right)_y$, $\Delta\alpha_{ij}$, ra_{ij}, ρa_{ij}, S_j^k – разностные аналоги функции

$Cm(\alpha, y)$, α_y, $\Delta\alpha$, $ra(\alpha, y)$, $\rho a(\alpha, y)$, $S(t, y)$ – соответственно, а индекс $\pm i$ соответствует направлению координат. Введем обозначение и норму

$$\Pi_5 = \max_{i=\overline{-N,N}}\max_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|ra_{ij}\right|\right\}, \qquad \Pi_8 = \min_{i=\overline{-N,N}}\min_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|\left(\alpha_{ij}\right)_{\bar{y}}\right|, \left|\Delta\alpha_{ij}\right|\right\},$$

$$\Pi_6 = \max_{i=\overline{-N,N}}\max_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|\left(\alpha_{ij}\right)_{\bar{y}}\right|, \left|\Delta\alpha_{ij}\right|\right\}, \qquad \Pi_9 = \max_{i=\overline{-N,N}}\max_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|Cm_{ij}\right|, \left|\rho a_{ij}\right|\right\},$$

$$\Pi_7 = \min_{i=\overline{-N,N}}\min_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|Cm_{ij}\right|, \left|\rho a_{ij}\right|\right\}, \qquad \Pi_{10} = \min_{i=\overline{-N,N}}\min_{j=\overline{-L,L}}\left\{\left|ra_{ij}\right|\right\}$$

$$\|V\|^2(i,k) = h_1h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left(V_{ij}^{k}\right)^2.$$

Каждый член сеточного уравнения (14) умножим на $\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)$ и получим следующий дискретный аналог дифференциального произведения:

$$V_{\bar{t}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right) = \left[V_{\bar{t}}^2(k)\right]_{t,}$$

$$V_{\alpha\bar{\alpha}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right) = \left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_\alpha - \left[V_t + V_{\bar{t}}\right]_\alpha V_{\bar{\alpha}}(i+1) =$$

$$= \left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_\alpha - \left[V_\alpha^2\right]_t + \left[\left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(k+1) - \left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(k)\right],$$

$$\frac{ra_{ij}}{2\cdot Cm_{ij}\cdot\rho a_{ij}}V_{y\bar{y}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right) = \left[\frac{ra_{ij}}{2\cdot Cm_{ij}\cdot\rho a_{ij}}V_{\bar{y}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_y - \frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left[V_y^2\right]_t +$$

$$+\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left[\left(V_yV_{\bar{t}y}\right)(k+1) - \left(V_yV_{\bar{t}y}\right)(k)\right] - \left[\left(\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\right)_{\bar{y}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right](j+1)V_y,$$

$$\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y V_{\alpha\bar{y}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right) = \left[\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y V_\alpha\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_y -$$

$$-\left\{\left[\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_y V_\alpha\right\}(j-1) = \left[\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y V_\alpha\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_{\bar{y}} -$$

$$-\left\{\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)V_\alpha + \left[\left(\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y\right)_{\bar{y}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right](j+1)V_\alpha\right\}(j-1) =$$

$$=\left[\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y V_\alpha\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right]_{\bar y}-$$

$$-\left\{\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y V_\alpha\left[V_y(k+1)-V_y(k)\right]/\tau+\left[\left(\frac{ra_{ij}}{2Cm_{ij}\rho a_{ij}}\left(\alpha_{ij}\right)_y\right)_{\bar y}\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right](j+1)V_\alpha\right\}\cdot(j-1),$$

$$\Delta\alpha_{ij}V_{\overset{\circ}{\alpha}}\left[V_t+V_{\bar t}\right]=\Delta\alpha_{ij}V_{\overset{\circ}{\alpha}}\left[V_t+V_{\bar t}\right],$$

$$\frac{1}{Cm_{ij}\rho a_{ij}}V_{ij}^k\left(V_t+V_{\bar t}\right)=\frac{1}{Cm_{ij}\rho a_{ij}}V_{ij}^k\left(V_t+V_{\bar t}\right).$$

Умножая все выше полученные на $\tau h_1 h_2$, суммируя по индексам $j=\overline{-L+1,L-1}$; $i=\overline{-N+2,N-2}$; $k=\overline{|2i|+3,2N-1}$, и используя введенные обозначения имеем

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[V_{t\bar t}\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right]=\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,2N)-\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,|2i|+3),$$

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[V_\alpha^2\right]_t=\left\|V_\alpha\right\|^2(i,2N)-\left\|V_\alpha\right\|^2(i,|2i|+3),$$

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[V_y^2\right]_t=\left\|V_y\right\|^2(i,2N)-\left\|V_y\right\|^2(i,|2i|+3),$$

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left\{\left[V_\alpha\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right](i+1,k)-\left[V_\alpha\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right](i,k)\right\}/h_1=$$

$$=\frac{\tau}{h_1}[\,\rangle\sum_{i=0}^{-N+2}-\left\|V_\alpha\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right\|(i.|2i|+3)-\rangle\sum_{i=0}^{-N+3}\left\|V_\alpha\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right\|(i.|2i|+4)+\rangle\sum_{i=-N+2}^{-1}\left\|V_\alpha\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right\|(i,|2i|+1)+$$

$$+\rangle\sum_{i=1}^{N-2}\left\|V_\alpha\left[V_t+V_{\bar t}\right]\right\|(i,|2i|+2)]\le\left\|\Gamma\right\|_1^2(i,|2i|+3).$$

Здесь символ $\rangle\sum_{i=\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ означает, что суммирование проводится по i от ϑ_1 до ϑ_2 на характеристиках и

$$\left\|\Gamma\right\|_1^2(i,|2i|+3)=\frac{\tau}{h_1}\{\rangle\sum_{i=0}^{-N+2}(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2+\left\|V_{\bar t}\right\|^2)(i,|2i|+2)+\rangle\sum_{i=0}^{-N+3}(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2+\left\|V_{\bar t}\right\|^2)(i,|2i|+4)+$$

$$+\rangle\sum_{i=-N+2}^{-1}(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2+\left\|V_{\bar t}\right\|^2)(i,|2i|+1)+\rangle\sum_{i=1}^{N-2}(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2+\left\|V_{\bar t}\right\|^2)(i,|2i|+3)\}.$$

Выводим остальные выражения. В связи с тем, что решение задачи (9) равно нулю на границах $y=\pm D$ имеем

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[\left(\frac{ra}{Cm*\rho a}\right)_{ij}V_{\bar y}\left(V_t+V_{\bar t}\right)\right]_y=$$

$$=\frac{\tau h_1 h_2}{h_2}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left\{\left[\left(\frac{ra}{Cm*\rho a}\right)_{ij}V_{\bar{y}}\left(V_t+V_{\bar{t}}\right)\right](i,L,k)-\left[\left(\frac{ra}{Cm*\rho a}\right)_{ij}V_{\bar{y}}\left(V_t+V_{\bar{t}}\right)\right](i,-L,k)\right\}=0,$$

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[\left(\frac{b}{c}\right)_{ij}\alpha_j V_\alpha\left(V_t+V_{\bar{t}}\right)\right]_{\bar{y}}=0.$$

Выводим следующие выкладки

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[\left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(i,k+1)-\left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(i,k)\right]=$$

$$=\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left[\left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(i,2N)-\left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(i,|2i|+3)\right]=$$

$$=\frac{\tau h_1 h_2}{h_1}\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left\{V_\alpha(i,2N)\left[V_{\bar{t}}(i+1,2N)-V_{\bar{t}}(i,2N)\right]-V_\alpha(i,|2i|+3)\left[V_{\bar{t}}(i+1,|2i|+3)-V_{\bar{t}}(i,|2i|+3)\right]\right\}$$

Из последнего выражения имеем следующие оценки:

$$\frac{\tau h_1 h_2}{h_2}\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left\{V_\alpha(i,2N)\left[V_{\bar{t}}(i+1,2N)-V_{\bar{t}}(i,2N)\right]\right\}\le$$

$$=\frac{\tau h_1 h_2}{h_1}\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left\{\left|V_\alpha(i,2N)\right|\left[\left|V_{\bar{t}}(i+1,2N)-V_{\bar{t}}(i,2N)\right|\right]\right\}\le$$

$$\le\frac{\tau h_1 h_2}{h_1}\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left[\left|V_\alpha\right|^2(i,2N)+\left|V_{\bar{t}}\right|^2(i,2N)\right]\le\frac{\tau}{h_1}\left[\left\|V_\alpha\right\|^2+\left\|V_t\right\|^2\right](i,2N).$$

Теперь оцениваем

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\left[\left(V_y V_{\bar{t}y}\right)(i,k+1)-\left(V_y V_{\bar{t}y}\right)(i,k)\right]=$$

$$=\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\left[\left(V_y V_{\bar{t}y}\right)(i,2N)-\left(V_y V_{\bar{t}y}\right)(i,|2i|+3)\right]=$$

$$=\frac{\tau h_1 h_2}{h_2}\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left\{\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\begin{bmatrix}V_y(i,2N)\left(V_{\bar{t}}(i,j+1,2N)-V_{\bar{t}}(i,j,2N)\right)-\\ V_y(i,|2i|+3)\left(V_{\bar{t}}(i,j+1,|2i|+3)-\right)V_{\bar{t}}(i,j,|2i|+3)\end{bmatrix}\right\}\le$$

$$\le\frac{\tau}{h_2^2}\frac{\Pi_5}{\Pi_7^2}\left\{\left[\left\|V_y\right\|^2+\left\|V_{\bar{t}}\right\|^2\right](i,2N)+\left[\left\|V_y\right\|^2+\left\|V_{\bar{t}}\right\|^2\right](i,|2i|+3)\right\}$$

$$\tau h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\alpha_j\left[V_\alpha\left(V_y(k+1)-V_y(k-1)\right)\right]=$$

$$=h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\alpha_j\left[V_\alpha(i,2N-1)V_y(i.2N)-V_\alpha(i,|2i|+3)V_y(i,|2i|+3)\right].$$

Каждое выражение оценим отдельно

$$h_1 h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\alpha_j V_\alpha(i,2N-1)V_y(i,2N)\ge\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}\Pi_8\left[\left\|V_\alpha\right\|(i,2N-1)\cdot\left\|V_y\right\|(i,2N)\right]=$$

$$=\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}\Pi_8\left\{\|V_\alpha\|\|V_y\|(i,2N)-\|V_y\|(i,2N)\left[\|V_\alpha\|(i,2N)-\|V_\alpha\|(i,2N-1)\right]\right\}\geq$$

$$\geq\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}\Pi_8\left\{\|V_\alpha\|\|V_y\|(i,2N)-\|V_y\|(i,2N)\frac{\tau}{h_1}\|V_t\|(i,2N)\right\}\geq$$

$$\geq-\frac{1}{4}\frac{\Pi_{10}}{\Pi_9^2}\Pi_8\left\{\|V_\alpha\|^2+\|V_y\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_y\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_{\bar t}\|^2\right\}(i,2N),$$

$$h_1h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\left[V_\alpha\left(i,|2i|+3\right)\cdot V_y\left(i,|2i|+3\right)\right]\leq$$

$$\leq\frac{1}{4}\frac{\Pi_5}{\Pi_7^2}\Pi_6\left\{\|V_\alpha\|^2+\|V_y\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_y\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_{\bar t}\|^2\right\}(i,|2i|+3).$$

Дальше проводим оценки

$$\tau h_1h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}(V_t+V_{\bar t})\right](j+1)V_y\leq\tau\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_y\|^2\right](i,k),$$

$$\tau h_1h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[\left(\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\alpha_j\right)_{\bar y}\cdot(V_t+V_{\bar t})(j+1)V_\alpha\right](j-1)\leq$$

$$\leq3\tau\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}\Pi_6\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k),$$

$$\tau h_1h_2\sum_{j=-L+1}^{L-1}\sum_{i=-N+2}^{N-2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[\left(\left(\frac{ra}{2Cm\rho a}\right)_{ij}\right)_{\bar y}\cdot\Delta\alpha V_{\overset{0}{\alpha}}(V_t+V_{\bar t})\right]\leq\tau\frac{\Pi_5\Pi_6}{2\Pi_7^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_t\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k).$$

Оценим последнее выражение

$$\frac{1}{Cm_{ij}\rho_{ij}}V_{ij}^k*(V_t+V_{\bar t})\leq\tau\frac{1}{2\Pi_7^2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_t\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k).$$

В силу выше полученных оценок, из уравнения (9) следует

$$\left(\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2+\frac{\Pi_7}{\Pi_9}\|V_y\|^2\right)(i.2N)\leq\left(\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2+\frac{\Pi_5}{\Pi_{10}}\|V_y\|^2\right)(i,|2i|+3)+$$

$$+\|\Gamma\|_1^2(i,|2i|+3)+\frac{\tau}{h_1}\left[\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,2N)+\frac{\tau}{h_1}\left[\|V_\alpha\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,|2i|+3)+$$

$$+\frac{\tau\Pi_5}{h_2\Pi_{10}}\left[\|V_y\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,2N)+\frac{\tau\Pi_5}{h_2\Pi_{10}}\left[\|V_y\|^2+\|V_{\bar t}\|^2\right](i,|2i|+3)+$$

$$+\frac{\Pi_7}{\Pi_9}\Pi_8\left[\|V_\alpha\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_{\bar t}\|^2+\left(1+\frac{\tau}{h}\right)\|V_y\|^2\right](i,2N)+$$

$$+\frac{\Pi_5}{\Pi_{10}}\Pi_6\left[\|V_\alpha\|^2+\frac{\tau}{h_1}\|V_{\bar t}\|^2+\left(1+\frac{\tau}{h_1}\right)\|V_y\|^2\right](i,|2i|+3)+$$

$$+\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_{10}}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_y\|^2\right](i,k)+3\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_{10}}\Pi_6\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k)+$$

$$+\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_{10}}\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left[\|V_{\bar t}\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i.k)+\tau\frac{1}{2\Pi_7^2}\sum\left[\|V_t\|^2+\|V_\alpha\|^2\right](i,k).$$

$$\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\tau}{h_2}\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}-\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}\Pi_8+\frac{\tau}{2\Pi_9^2}\right]\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,2N)+\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}\Pi_8\right]\left\|V_\alpha\right\|^2(i,2N)+$$

$$+\left[\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}-\frac{\tau}{h_2}*\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}-\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}*\Pi_8-\frac{\tau}{h_1}*\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}*\Pi_8\right]\left\|V_y\right\|^2(i,2N)\le$$

$$\le\left\|\Gamma\right\|_1^2(i,|2i|+3)+\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\tau}{h_2}*\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}+\frac{\tau}{h_1}*\frac{\Pi_5}{4\Pi_7^2}*\Pi_6\right]\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,|2i|+3)+$$

$$+\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\Pi_5}{4\Pi_7^2}\Pi_6\right]\left\|V_\alpha\right\|^2(i,|2i|+3)+\left[\frac{\Pi_5}{4\Pi_7^2}-\frac{\tau}{h_2}\frac{\Pi_5}{4\Pi_7^2}+\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}\Pi_6-\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}\Pi_6\right]*$$

$$*\left\|V_y\right\|^2(i,|2i|+3)++\left[\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_7^2}+3\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_7^2}+\tau\frac{\Pi_5\Pi_6}{\Pi_7^2}+\tau\frac{1}{\Pi_7^2}\right]*\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left\|V\right\|_1^2(i,k). \qquad (15)$$

где $\left\|V\right\|_1^2(i,k)=\left(\left\|V_{\bar t}\right\|^2+\left\|V_\alpha\right\|^2+\left\|V_y\right\|^2\right)(i,k).$

Из (15) получим

$$\left\|V\right\|_1^2(i,2N)\le\frac{1}{P_2}\left\|\Gamma\right\|_1^2(i,|2i|+3)+\frac{P_3}{P_2}\left\|V\right\|_1^2(i,|2i|+3)+\frac{\tau P_4}{P_2}\sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left\|V\right\|_1^2(i,k), \qquad (16)$$

здесь
$$P_2=\min\left\{\begin{array}{l}\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\tau}{h_2}\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}-\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}\Pi_8+\frac{\tau}{2\Pi_9^2}\right],\left[1-\frac{\tau}{h_1}-\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}\Pi_8\right],\\ \left[\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}-\frac{\tau}{h_2}\frac{\Pi_{10}}{4\Pi_9^2}-\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}\Pi_8-\frac{\tau}{h_1}\frac{\Pi_{10}}{2\Pi_9^2}\Pi_8\right]\end{array}\right\},$$

$$P_3=\max\left\{\begin{array}{l}\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\tau}{h_2}*\frac{\Pi_5}{2\Pi_7^2}+\frac{\tau}{h_1}*\frac{\Pi_5}{4\Pi_7^2}*\Pi_6\right],\left[1+\frac{\tau}{h_1}+\frac{\Pi_5}{4\Pi_7^2}*\Pi_6\right],\\ \left[\frac{\Pi_5}{\Pi_7}+\frac{\tau}{h_2}*\frac{\Pi_5}{\Pi_7}+\frac{\Pi_5}{\Pi_7}*\Pi_6+\frac{\tau}{h_1}*\frac{\Pi_5}{\Pi_7}*\Pi_6\right]\end{array}\right\},$$

$$P_4=\left[\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_7^2}+3\tau\frac{\Pi_5}{\Pi_7^2}+\tau\frac{\Pi_5\Pi_6}{\Pi_7^2}+\tau\frac{1}{\Pi_7^2}\right].$$

В силу равенства $V(i,2N)=V(i,|2i|+3)+\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}V_{\bar t}(i,k)$ получим неравенства

$$\left\|V\right\|^2(i,2N)\le\left\|V\right\|^2(i,|2i|+3)+2\left\|V\right\|(i,|2i|+3)\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)+\left[\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)\right]^2\le$$

$$\le 2\left\|V\right\|^2(t,|2i|+3)+4N\tau^2\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_t\right\|^2(i,k).$$

Таким образом, усиливая оценки, из последнего неравенства получим

$$\left\|V\right\|^2(i,2N)\le\left\|V\right\|^2(i,|2i|+3)+2\left\|V\right\|(i,|2i|+3)\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)+$$

$$+\left[\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)\right]^2\le 2\left\|V\right\|^2(t,|2i|+3)+4N\tau^2\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_t\right\|^2(i,k).$$

Таким образом, усиливая оценки, из последнего неравенства получим

$$\|V\|^2(i,2N) \le 2\|V\|^2(i,|2i|+3) + 4N\tau^2 \sum_{k=|2i|+4}^{2N} \|V_{\bar t}\|^2(i,k). \qquad (17)$$

Из неравенства (16) и (17) имеем

$$\|V\|_2^2(i,2N) \le \frac{1}{P_2}\|\Gamma\|_1^2(i,|2i|+3) + \frac{P_3}{P_2}\|V\|_1^2(i,|2i|+3) +$$

$$+ 2\|V_t\|^2(i,|2i|+3) + \left[\frac{\tau P_4}{P_2} + 4N\tau^2\right] \sum_{k=|2i|+3}^{2N} \|V_{\bar t}\|_2^2(i,k), \qquad (18)$$

где $\|V\|_2^2(i,k) = \|V\|_1^2(i,k) + \|V\|^2(i,k)$.

Используя дискретный аналог неравенства Гронуолла-Беллмана, из (18) имеем

$$\|V\|_2^2(i,2N) \le P_5\left[\|\Gamma\|_2^2(i,|2i|+3) + \|V\|_2^2(i,|2i+3|)\right]\exp\left[\left(\frac{\tau P_4}{P_2} + 4N\tau^2\right)t\right] \qquad (19)$$

$$P_5 = \max\left\{2, \frac{P_3}{P_2}, \frac{1}{P_2}\right\}.$$

Если считать, что ϑ_{ij}^k – точное сеточное решение задачи (14), то есть с малыми членами $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$, то и для сеточной функции ϑ_{ij}^k также можно получить оценку (19), но с малым членом $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$. Следовательно

$$\|\vartheta - V\|(i,2N) \le P_6(5\tau^2 + h_2^2), \qquad h_1 = 2\tau. \qquad (20)$$

где $P_6 = \exp\left\{P_4 T^2 / P_2 + 2T^3\right\}\|\vartheta\| C^4(\Omega(T,D)) / 12$

Таким образом, доказана теорема

Теорема. Пусть выполнены условия (6)–(7) и решение задачи (9) существует и имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно в области $\Omega(T,D)$. Тогда существует $C_2 > 0$ такое, что при $\tau/h_2 < C_2$ решение конечно-разностной задачи (14) сходится к точному решению (9) со скоростью порядка $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$ и справедлива оценка (20). Коэффициент C_2 зависит только от нормы коэффициентов уравнения.

Из эквивалентности задач (9) и (3)–(4), а также (1)–(2) следует приближенное конечно-разностное решение задачи (14) также сходится к точному решению задач (3)–(4) и (1)–(2) со скоростью порядка $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$, где h – шаг по z, при выполнении условий теоремы.

Заключение. Построено приближенное конечно-разностное решение двумерной прямой задачи распространения потенциала действий по нервному волокну с мгновенным и шнуровым источником.

Вывод. Доказана сходимость приближенного конечно-разностного решения к точному решению поставленной задачи.

Литература

1. Hodgkin A.L., Rushton W.A. The electrical constants of a crustacean nerve fibre // Proc.Roy.Soc.London. 1946. Ser B.V.133.P.444–479.
2. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J.Physiol. (London). 1952. V.117. N4. P 500–544.
3. Максименко Е.В. Аналитическая модель нервного импульса // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып 3. С. 696–697.
4. Максименко Е.В. Использование уравнения Кортевега-де Фриза для моделирования трансмембранного потенциала в нервном волокне // Вестник Северо-Кавказского государственного технического университета, серия «Естественно-научная», 2004. №1(7). С. 234–235.
5. Максименко Е.В. Моделирование распространения нервного импульса с использованием ЭВМ // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т.11. Вып. 2. С. 368–369.
6. Максименко Е.В. Об использовании математических методов в биологических исследованиях // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т.12. Вып.2. С. 431–432.
7. Селезов И.Т., Морозова Л.В. Обобщение задачи возбуждения и распространения потенциала действий по нервному волокну // Прикладная гидромеханика. 2010. Т.12. №3. С. 75–83.
8. Богатов Н.М., Морозова Л.В., Понетаева Е.Г. Моделирование распространения электрического импульса в нервном волокне // Коллективная монография. Современные проблемы физики, биофизики и инфокоммуникационных технологий. Краснодар: Краснодарский ЦНТИ,2012. – С. 33–44.
9. Потентаева Е.Г., Григорян Л.Р., Богатов Н.М. Расчет изменения потенциала действия в нервном волокне.Сентябрь 7, 2016. admin. Системы и приборы медицинского назначения.
10. Ходжкин А.Л. Нервный импульс, перевод с англ., М.1965
11. Понамаренко Г.Н., Тарковский И.И. Биофизические основы физиотерапии. Учебное пособие. М.: ОАО, Изд-во «Медицина» 2006. 176 с.
12. Новиков Д.А., Филимонов М.М. Биофизика. Курс лекций. В двух частях. Часть 1. Минск, БГУ, 2008. 184 с.
13. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск. Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
14. Сатыбаев А.Дж. Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа. Ош: Ош обл. типография. 2001. 143 с.
15. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир. 2004. 304 с.
16. Сатыбаев А.Дж., Жанибеков М., Анищенко Ю.В., Маматкасымова А.Т. Численный алгоритм решения двумерной прямой задачи геоэлектрики с плоской границей и шнуровым источником. Известия КГТУ имени И. Раззакова, №3(33), часть 1, Бишкек 2016, С. 180–189.