УДК: 681.5.01:004.02

Р. А. Акматбеков
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР
nark@mail.kg

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

При разработке систем автоматического управления многие задачи проектирования системы формулируются как оптимизационные. Задача выбора наиболее приемлемых значений параметров алгоритма управления также формулируется как задача параметрической оптимизации. В работе рассмотрена задача параметрической оптимизации алгоритмов управления в линейных одномерных системах. Предложено решение задачи на основе численных методов нулевого порядка с использованием случайного механизма (метода Монте-Карло).

Ключевые слова: математическая модель; система управления; алгоритм; параметрическая оптимизация; одномерная система; интегральный квадратичный критерий качества; метод Монте-Карло.

Введение. В теории управления различают задачи структурного и параметрического синтеза (параметрической оптимизации) [1–2]. Параметрическая оптимизация является заключительным этапом при синтезе проектируемых систем управления и при настройке (перенастройке) эксплуатируемых систем управления. Параметрическую оптимизацию системы управления также называют как параметрическую оптимизацию автоматического регулятора или алгоритма управления, т.к. объект управления является неизменяемой частью системы. На инженерном языке параметрическая оптимизация называют также настройкой автоматического регулятора или алгоритма управления [3].

Таким образом, решение задачи параметрической оптимизации системы управления имеет как научную, так и практическую ценность.

В данной работе рассматриваются вопросы параметрической оптимизации стационарных линейных систем управления на основе интегральных оценок качества. Эта задача актуальна для пространственно-распределенных систем автоматизации (РСА) [4], в которых решаются задачи автоматизации управления и эксперимента. Предлагаемые методы решения задачи параметрической оптимизации могут быть использованы и в системах автоматизации проектирования систем управления.

Методы поиска экстремума функций многих переменных достаточно хорошо развиты, но при этом многие задачи оптимизации невозможно решить классическим методом [5, 6], который заключается в следующем.

Необходимым условием существования экстремума функции векторного аргумента $y(x), x \in R^n$ является условие

$$\nabla y(x) = [\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}]^T = 0 \, , \tag{1}$$

где $\nabla y(x)$ – вектор-градиент функции *y(x)*.

Достаточным условием существования минимума функции *y(x)* является условие положительной определенности матрицы Гессе функции *y(x)*:

$$\nabla^2 y(x) = H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} . \tag{2}$$

Когда решение задачи минимизации классическим методом затруднено, применяются численные методы, которые принято делить на три группы.

Методы первого порядка, в которых на каждом шаге поиска k вычисляется градиент функции $\nabla y(x)$. Примерами таких методов являются градиентные методы, работающие по алгоритму:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla y(x_k), \tag{3}$$

где γ_k – шаг поиска; x_k – рабочая точка, найденная на *к*-шаге ; x_{k+1}– рабочая точка, искомая на (*к+1*)-шаге.

Величина γ_k выбирается при помощи различных правил, при этом получаются различные модификации градиентного метода, например, метод Коши, наискорейшего спуска и т.д.

Методы второго порядка, в которых на каждом шаге, вычисляются градиент и матрица вторых производных. Как пример можно назвать методы Ньютона, алгоритм которых имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k [\nabla^2 y(x_k)]^{-1} \nabla y(x_k)\ . \tag{4}$$

Методы нулевого порядка (прямые методы поиска) – это методы, в которых поиск основан только на вычислениях значений функции *y(x)*. К этой группе методов относятся методы случайного поиска, покоординатного спуска и т. д. Сюда же относятся методы численной реализации градиентных процедур, в которых частные производные функции оцениваются соотношениями типа

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \cong \frac{y(x+\alpha l_i) - y(x)}{\alpha}, \tag{5}$$

где i – номер компоненты вектора x; l_i – единичный i-тый орт.

Ниже предлагаются методы решения задачи параметрической оптимизации линейного алгоритма управления.

Рассмотрим общую (задача 1) и частную (задача 2) постановки задачи параметрической оптимизации и подходы к их решению.

Постановка задачи 1. Многие задачи теории управления формулируются как оптимизационные задачи вида [1]:

$$F(\vec{\mathrm{l}}, \vec{\mathrm{a}}) \to \underset{\vec{a} \in A}{\mathrm{extr}}, \tag{6}$$

$$A: \left\{ \begin{matrix} h_i(\vec{\mathrm{l}}, \vec{\mathrm{a}}) \geq 0, \mathrm{i} = \overline{1, k} \\ q_j(\vec{\mathrm{l}}, \vec{\mathrm{a}}) = 0,\ j = \overline{1, n} \end{matrix} \right\}, \tag{7}$$

где F – экстремизируемый функционал (показатель качества системы), зависящий от условий l функционирования системы; $\vec{a}$ – проектируемые факторы (параметры); A – множество ограничений.

Пусть интегральным показателем качества является обобщенный функционал [2]:

$$I_{2m} = \int_0^\infty \varepsilon_c^2(\mathrm{t}) + \alpha_1^2 \varepsilon_c^2(\mathrm{t}) + \ldots + \alpha_m^2 \varepsilon_c^2(\mathrm{t}), \tag{8}$$

где I_{2m} – обобщенная квадратичная оценка качества системы управления m-порядка; $\varepsilon_c(\mathrm{t})$ – свободная составляющая ошибки управления; $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ – постоянные величины.

Ниже предлагается численный метод решения задачи (6), который не ставит условие унимодальности оптимизируемого функционала.

Общий метод решения задачи параметрической оптимизации. Для решения задачи параметрической оптимизации будет использована технология случайного механизма, которая известна как метод Монте-Карло [8] в допущении, что область ограничений A формируется как совокупность ограничений на параметры математической модели системы (алгоритма) управления вида:

$$A:\left\{a_{i\min} \le a_i \le a_{i\max}, i=\overline{1,n}\right\}. \tag{9}$$

Требуется отыскать такой вектор параметров $\vec{a}$, который доставляет минимум функционалу качества (8).

Далее в целях применения стандартных терминологий математического программирования обозначим оптимизируемый функционал через y, а вектор параметров – $\vec{x}$.

Последовательность действий следующая.

1. Определить **исходную точку** $\vec{x}_0$ поиска минимума обобщенной квадратичной оценки (ОКО). Присвоить начальные значение вектору $\vec{x}_0$, удовлетворяющие условиям (9). Для определенности примем, что начальные значения оптимизируемых параметров равны середине допустимых интервалов (9).

2. Вычислить значение ОКО y($\vec{x}_0$).

3. Построить минимизирующую последовательность

$$y(x_0) > y(x_1) > y(x_2) > \cdots y(x_k). \tag{10}$$

Точки поиска определяются по правилу

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k d_k, \tag{11}$$

где d_k – направление перемещения из точки x_k в следующую точку; γ_k – величина шага в этом направлении.

4. Вектор d_k образуется случайным образом, для чего используется генератор равномерно распределенных случайных чисел. Генератор вырабатывает q комплектов случайных чисел n. Это число задает размерность пространства поиска, равную размерности вектора $\vec{x}$.

5. γ_k – величина шага в направлении d_k выбирается методом одномерного поиска экстремума нулевого порядка, например, методами деления отрезка.

6. Точка x_{k+1} выбирается из условия:

$$x_{k+1} = \min_{x_{k+1,i}} OKO.$$

7. Проверяется условие прекращения поиска

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le \varepsilon, \tag{12}$$

где $\|x_{k+1} - x_k\|$ – норма вектора параметров; ε – заданная точность поиска экстремума.

Если данное условие выполнено, то поиск прекращается, и в качестве решения берется последняя точка x_{k+1}, если условия останова не выполнены, то поиск продолжается переходом к пункту 3.

Представлена одноэтапная процедура, на основе которой можно построить многоэтапную систему поиска.

Далее рассматривается задача параметрической оптимизации алгоритма управления в одномерной линейной стационарной системе (рис. 1).

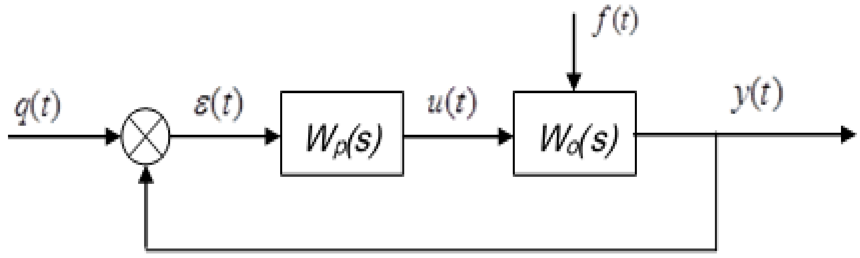

Рисунок 1. Линейная система автоматического управления: $W_p(s)$ – передаточная функция устройства управления; $W_o(s)$ – передаточная функция объекта управления; $q(t)$ – задающее воздействие; $\varepsilon(t)$ – ошибка управления; $u(t)$ – управляющее воздействие; $y(t)$ – выходная величина; $f(t)$ – возмущающее воздействие

Постановка задачи 2. Пусть задана одномерная линейная стационарная система управления (рис. 1), где показателем качества служит интегральный квадратичный критерий (ИКК) вида:

$$I_0 = \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon^2(t)dt\,, \tag{13}$$

где t_0 – начальный момент времени ($u(t) = 0$ при $t < t_0$ или t <0); $\varepsilon(t)$ – ошибка управления.

Требуется разработать способ решения задачи параметрической оптимизации алгоритма управления, т.е. найти такие численные значения параметров (коэффициентов) линейного алгоритма управления $W_p(s)$, при которых ИКК имеет наименьшее значение, т. е.

$$I_0 = \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon^2(t)dt \xrightarrow[\vec{a},\vec{b}]{} \min\,,\ \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\,, \tag{14}$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – параметры (коэффициенты) алгоритма управления; A и B – множества их допустимых значений.

Решение задачи (14) предполагается получить численными методами, т.к. нет аналитических методов решения. Для применения численных методов прежде всего необходимо уметь вычислять ИКК.

Вычисление ИКК. Есть два подхода к вычислению значения ИКК (13).

Первый основан на вычислении модуля комплексной частотной характеристики (КЧХ) системы (см. рис.1) по ошибке и представляется формулой:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|W_{\varepsilon g}(j\omega)\right|^2 \left|\mathrm{Q}(j\omega)\right|^2 d\omega\,, \tag{15}$$

где $\left|\mathrm{W}_{\varepsilon g}(\mathrm{j}\omega)\right|$ – модуль КЧХ системы по ошибке (для управления); $\left|Q(j\omega)\right|$ – модуль спектра (Фурье-преобразования) входного сигнала $\mathrm{q}(t)$.

В частности, когда $\mathrm{q}(t) = q_0\, 1(t)$, т.е. ступенчатая функция, где q_0 – константа, функционал (15) принимает вид:

$$I_\varepsilon = \frac{q_0^{\,2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|W_{\varepsilon g}(j\omega)\right|^2 \frac{1}{\omega^2}\, d\omega\,. \tag{16}$$

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Передаточные функции линейной системы управления определяются следующим образом.

Передаточная функция (ПФ) разомкнутой системы:

$$W(s) = W_p(s) W_o(s).$$

Главная ПФ замкнутой системы:

$$W_з(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1+W_p(s)W_o(s)}. \qquad (17)$$

ПФ замкнутой системы по ошибке (для управления):

$$W_{\varepsilon g}(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{1+W_p(s)W_o(s)}. \qquad (18)$$

Изображение ошибки управления теперь может быть записана как

$$E_{\varepsilon g}(s) = W_{\varepsilon g}(s)\,\mathrm{Q}(s). \qquad (19)$$

Переход в частотную область дает формулу

$$E_{\varepsilon g}(\mathrm{j}\omega) = W_{\varepsilon g}(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{Q}(\mathrm{j}\omega). \qquad (20)$$

Применив обратное преобразование Фурье, затем возводя его в квадрат и подстановкой результата в (13) получаем формулу (15) для ИКК.

Таким образом, первый подход вычисления ИКК основывается на вычислении интегралов (15) и (16).

Второй подход основан на использовании аналитических соотношений [2], которые связывают значения ИКК с коэффициентами изображения ошибки.

Изображение ошибки $E_{св}(s)$ (19) является дробно-рациональной функцией вида

$$E_{св}(\mathrm{s}) = E_{\varepsilon g}(s) = W_{\varepsilon g}(s)\,\mathrm{Q}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}. \qquad (21)$$

Имеется общее соотношение [2], которое позволяет вычислять значение ИКК, а для систем до пятого порядка формулы сведены в таблицу.

Таблица 1. Формулы для вычисления ИКК

n	**ИКК**
1	$I_0 = b_0^2 / (2a_0a_1)$
2	$I_0 = (b_1^2 a_0 + b_0^2 a_2)/(2a_0a_1a_2)$
3	$I_0 = \dfrac{b_0^2 a_3 a_2 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_3a_0 + b_2^2 a_1 a_0}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}$
4	$I_0 = \dfrac{b_0^2(-a_4^2a_1 + a_4a_3a_2) + (b_1^2 - 2b_2b_0)a_4a_3a_0 + (b_2^2 - 2b_3b_1)a_4a_1a_0 + b_3^2(-a_3a_0^2 + a_2a_1a_0)}{2a_4a_0(-a_4a_1^2 - a_3^2a_0 + a_1a_2a_3)}$
5	$I_0 = \dfrac{1}{2\Delta_5}\left[b_0^2 m_0 + (b_1^2 - 2b_2b_0)m_1 + (b_2^2 - 2b_3b_1 + 2b_4b_0)m_2 + (b_3^2 - 2b_4b_2)m_3 + b_4^2 m_4\right]$

В таблице использованы следующие обозначения:

$$m_0 = \frac{1}{a_0}(a_2 m_1 - a_4 m_2;) \qquad m_3 = \frac{1}{a_5}(a_3 m_2 - a_1 m_1);$$

$$m_1 = -a_5 a_2 + a_4 a_3; \qquad m_4 = \frac{1}{a_5}(a_3 m_3 - a_1 m_2);$$

$$m_2 = -a_5 a_0 + a_4 a_1; \qquad \Delta_5 = a_5(a_4 m_4 - a_2 m_3 + a_0 m_2).$$

Пусть САУ представлена структурной схемой рис. 1. Передаточные функции регулятора и объекта представлены дробно-рациональной функцией так, что Лапласово изображение ошибки также является дробно-рациональной функцией вида (21), причем $n \le 5$ и $m \le n$.

ИКК необходимо вычислять следуя ниже представленному алгоритму.

1. Представить ПФ объекта и регулятора в виде

$$W_o(s) = \frac{A_1(s)}{B_1(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}; \quad W_p(s) = \frac{A_2(s)}{B_2(s)} = \frac{c_0 s^q + c_1 s^{q-1} + \ldots + c_q}{d_0 s^p + d_1 s^{p-1} + \ldots + d_p}. \qquad (22)$$

2. Присвоить настраиваемым параметрам регулятора начальные значения такие, которые не нарушают ограничений (см. 14). Рекомендуется задавать значения параметров c_i, i=0, 1, …, q; d_i, i=0,1,…, p такие, которые соответствуют середине интервала ограничений на параметры.

3. Получить передаточную функцию разомкнутой системы из условия

$$W(s) = W_p(s) W_o(s) = \frac{B_1(s) B_2(s)}{A_1(s) A_2(s)}. \qquad (23)$$

4. Найти ПФ замкнутой системы по ошибке из условия (13)

$$W_{\varepsilon g}(s) = \frac{1}{1 + W_p(s) W_o(s)} = \frac{A_1(s) A_2(s)}{A_1(s) A_2(s) + B_1(s) B_2(s)}.$$

5. Найти изображение ошибки из условия подачи на вход системы единичного скачка

$$E_{\varepsilon g}(s) = W_{\varepsilon g}(s) G(s) = \frac{A_1(s) A_2(s)}{A_1(s) A_2(s) + B_1(s) B_2(s)} \frac{1}{s} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}. \qquad (24)$$

6. По табл. 1 вычислить ИКК для соответствующего значения n.

Ниже разработан общий алгоритм решения задачи (14).

Решение задачи оптимизации в общем случае методом Монте-Карло.

1. Представить ПФ объекта и регулятора в виде (22).
2. Получить передаточную функцию разомкнутой системы из условия (23).
3. Найти ПФ замкнутой системы по ошибке $W_{\varepsilon g}(s)$ из условия (18).
4. Присвоить начальные значения оптимизируемым параметрам устройства управления. Для определенности примем, что начальные значения оптимизируемых параметров равны середине допустимых интервалов изменения параметров. Эти координаты определяют **исходную точку** поиска минимума ИКК x_0.
5. Вычислить ИКК $y(\vec{x}_0)$.
6. Построить минимизирующую последовательность

$$y(x_0) > y(x_1) > y(x_2) > \cdots y(x_k) >$$

по правилу

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k d_k \qquad (25)$$

где d_k – направление перемещения из точки x_k в следующую точку; γ_k – величина шага в этом направлении.

7. Векторd_k образуется случайным образом, для чего используется генератор равномерно распределенных случайных чисел. Генератор вырабатывает q комплектов случайных чисел n+m. Это число задает размерность пространства поиска. Каждый комплект случайных чисел содержит n+m составляющих, т.е. является (n+m)-мерным случайным вектором, задающим направление d_k, где n+m – число оптимизируемых коэффициентов (параметров) алгоритма управления. Это число задает размерность пространства поиска.

8. γ_k – величина шага в направлении d_k выбирается методом одномерного поиска экстремума

9.Точка x_{k+1} выбирается из условия:

$$x_{k+1} = \min_{x_{k+1,i}} I_\varepsilon\ ,\ i = \overline{1, n+m}\ .$$

10. Проверяется условие прекращения поиска

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon, \qquad (26)$$

где $\|x_{k+1} - x_k\|$ – норма вектора параметров; ε – заданная точность поиска экстремума.

Если данное условие выполнено, то поиск прекращается, и в качестве решения берется последняя точкаx_{k+1}, если условия останова не выполнены, поиск продолжается переходом к пункту 8.

Заключение. Разработаны численные методы параметрической оптимизации линейных стационарных систем управления для двух случаев:

1) для системы управления, в которой показателем качества является обобщенная интегральная оценка (ОКО) n-порядка;

2) для системы управления, в которой показателем качества является интегральный квадратичный критерий (ИКК).

Литература

1. Справочник по теории автоматического управления; под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука – 1987. – 713 с.
2. Теория автоматического управления. Ч 1; под ред. А. А. Воронова – М.: Высшая школа.– 1986. – 367 с.
3. Автоматизация настройки систем управления; под. ред. В. Я. Ротача. – М.: Энергоатомиздат.– 1984. – 272 с.
4. Акматбеков Р. А. Распределенная система управления биологической очисткой бытовых сточных вод // Известия НАН КР. – Бишкек: Илим.– 2015.– №1. – С. 101–107.
5. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. – М.: Наука, 1967. –
6. Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации в теории управления. – СПб.: Питер, 2004. – 256 с.
7. Сабанин В. Р., Смирнов Н. И., Репин А. И. К вопросу о параметрической оптимизации алгоритмов управления и диагностики // Вестник МЭИ. – 2005.–.№2. – С. 21–27.
8. Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.

RA Akmatbekov - Ph.D.
Institute of Automation and Information Technologies of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic nark@mail.kg

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF MONTE-CARLO CONTROL ALGORITHMS OF THE METHOD

In the development of automatic control systems, many design tasks for the system are formulated as optimization tasks. The task of selecting the most acceptable values of the parameters of the control algorithm is also formulated as a parametric optimization problem. The problem of parametric optimization of control algorithms in linear one-dimensional systems is considered. A solution of the problem is proposed on the basis of numerical methods of zero order with the use of a random mechanism (the Monte Carlo method).

KEY WORDS: mathematical model, control system, algorithm, parametric optimization, one-dimensional system, integral quadratic quality criterion, Monte Carlo method.

Р.А Акматбеков - т.и.к.
Улуттук илимдер академиясынын автоматтык жана маалымат технологиялар институту. nark@mail.kg

МОНТЕ-КАРЛОНУН ЫКМАСЫ МЕНЕН БАШКАРУУ АЛГОРИТМДЕРИН ПАРАМЕТРДИК ОПТИМАЛДАШТЫРУУ

Автоматтык башкаруу системаларын өнүктүрүүдө көптөгөн системаларды долбоорлоо көйгөйлөрү оптималдаштырууну талап кылат. Алгоритмди башкарууда көпчүлүк параметрлери боюнча тийиштүү баалуулуктары тандоо милдети да параметрге оптималдаштыруу көйгөй катары кабыл алынат. Бул макалада биз сызыктуу, бир өлчөмдүү системалардагы башкаруу алгоритмдердин параметрге оптималдаштыруу маселесин каралган. Кокустук механизми (Монте-Карло ыкмасы) менен нөл-токтому сандык ыкмалардын негизинде көйгөйдү чечүү сунушталган.

НЕГИЗГИ СӨЗДӨР: математикалык модель, башкаруу системасы, алгоритм, параметрдик оптималдаштыруу, бир өлчөмдүү система, сапаттын интегралдык квадраттык критерии, Монте-Карлонун ыкмасы.