АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И ПРОЦЕССАМИ

УДК 517.977

А.А.Байзакова, магистрант 2 курса, специальность математика, **baizakovaakzhan@mail.ru**
С.А.Айсагалиев, д.т.н., профессор, **Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz**
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Разработан новый метод решения задачи управляемости и оптимального быстродействия линейных систем с заданным краевым условием и ограничением на значения управления, в том числе и для случаев, когда множество, определяющее ограничения на значения управления, зависит от времени. Отличие предлагаемого метода от известных подходов к проблеме управляемости и оптимального быстродействия состоит в том, что путем построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированным параметром исходная краевая задача сводится к решению начальной задачи оптимального управления. Решение задачи оптимального быстродействия может быть получено на основе решения общей задачи управляемости. Получены необходимое и достаточное условия существования решения задачи управляемости и метод её решения путём построения минимизирующих последовательностей. Получена оценка скорости сходимости минимизирующих последовательностей.

Ключевые слова: Управляемость, оптимальное быстродействие, интегральное уравнение, оптимальное управление, минимизирующие последовательности.

Введение

Постановка задачи управляемости для линейных систем без ограничения на значения управления приведена в [1]. Решение задачи управляемости с привлечением l-проблемы моментов рассмотрено в [2]. Отдельные вопросы управляемости: с минимальной размерностью управления, с малым параметром, последействием приведены в [3,4]. Проблемы построения позиционного управления, геометрическая интерпретация управляемости, связь между управляемостью и стабилизацией рассмотрены в [5,6,7,8].

Следует отметить, что в работах [1-8] исследованы также случаи общей задачи управляемости без ограничений на значения управления и без учета фазовых и интегральных ограничений.

Возникшая от потребности практики задача оптимального быстродействия исследована в работе [9] на основе принципа максимума. В работах [10-13] рассмотрены задачи оптимального быстродействия при ограничениях на фазовые координаты, в условиях неопределенности и для частных задач с применением принципа максимума.

Заметим, что задача управляемости и задача оптимального быстродействия имеют общие связи. Актуальными и нерешенными проблемами управляемости и оптимального быстродействия являются: необходимые и достаточные условия разрешимости общей задачи управляемости и быстродействия; разработка конструктивных методов построения решений общих задач управляемости и быстродействия для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В данной статье предлагается новый метод исследования управляемости и оптимального быстродействия линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе исследования разрешимости и построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированным параметром. Результаты, полученные в данной работе, являются продолжением научных исследований по интегральному уравнению [14-16], качественной теории дифференциальных уравнений [17-22], а также по оптимальному управлению [23-28].

Постановка задачи

Пусть уравнение движения управляемого процесса имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t), \qquad t \in I = [t_0, t_1] \tag{1}$$

известны начальное и конечное состояния

$$x(t_0) = x_0 \in R^n, \quad x(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{2}$$

Управление $u(t) \in L_2(I, R^m)$ принадлежащее множеству

$$\Lambda(t) = \{u(t) \in L_2(I, R^m) \,|\, u(t) \in V(t) \in R^m, п.в.\ t \in I\}. \tag{3}$$

Исходные данные: $A(t), B(t), t \in I -$ матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n \times n,\ n \times m$ соответственно, вектор-функция $\mu(t) \in L_2(I, R^n), V(t),\ t \in I$ –заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество в $L_2(I, R^m), x(t_0) = x_0 \in R^n, x(t_1) = x_1 \in R^n -$ заданные точки.

Определение. Система (1)-(3) называется управляемой, если существует управление $u(t) \in \Lambda(t)$, которое переводит решение дифференциального уравнения (1) из начального состояния $x_0 = x(t_0)$ в момент времени t_0 в состояние $x_1 = x(t_1)$ в момент времени $t_1, t_1 > t_0$.

Задача 1. Найти управление $u(t) \in \Lambda(t)$, которое переводит траекторию системы (1)-(3) из начального состояния $x_0 = x(t_0)$ в момент времени t_0 в состояние $x_1 = x(t_1)$ в момент времени $t_1, t_1 > t_0$.

Задача 2. (Оптимальное быстродействие.) Найти управление $u(t) \in \Lambda(t) \subset L_2(I, R^m)$, которое переводит траекторию системы (1)-(3) из точки $x_0 = x(t_0)$ в точку $x_1 = x(t_1)$ за кратчайшее время, где t_0 – фиксировано, t_1 – не фиксировано, $t_1 > t_0$.

Задача оптимального быстродействия запишется в виде

$$I(x, u, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \to \inf$$

при условиях (1)-(3).

Интегральное уравнение

Решения задач 1, 2 связаны с разрешимостью и построением общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированным параметром следующего вида

$$Ku = \int_a^b K(t_*, \tau) w(\tau) = \beta, \quad t_* = [a, b], \tag{4}$$

где $K(t_*, \tau) = K(\tau) = \|K_{ij}(\tau)\|,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m} -$ заданная матрица с элементами из $L_2, t_* \in [a, b]$–фиксированная точка, $w(t) \in L_2(I, R^m), \tau \in I = [a, b] -$ искомая функция, $\beta \in R^n,\ b > a$.

Задача 3. Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (4) при всех $\beta \in R^n$.

Задача 4. Найти общее решение интегрального уравнения (4) для любых $\beta \in R^n$.

Решению задачи 3 дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для существования решения интегрального уравнения (4) при всех $\beta \in R^n$ необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$C(a, b) = \int_a^b K(\tau) K^*(\tau) d\tau, \tag{5}$$

порядка $n \times n$ была положительно определенной.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть матрица $C(a,b)>0$, т.е. квадратичная форма $b^* C(t_0,t_1)b>0,\ \forall b, b\in R^n, b\neq 0$. Покажем, что интегральное уравнение (4) имеет решение. В самом деле, поскольку матрица $C(t_0,t_1)>0$, то существует обратная матрица $C^{-1}(t_0,t_1)$ Выберем

$$u(t)=K(t_0,t_1)C^{-1}(t_0,t_1)\beta,\ t\in I,$$

где $\beta\in R^n$ – любой заданный вектор. Тогда

$$Ku=\int_{t_2}^{t_1}K(t_0,t)u(t)dt=\int_{t_2}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\beta dt=$$

$$=\int_{t_2}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dtC^{-1}(t_0,t_1)\beta=C(t_0,t_1)C^{-1}(t_0,t_1)\beta=\beta.$$

Следовательно, в случае, когда матрица $C(t_0,t_1)>0$, интегральное уравнение (4) имеет по крайней мере одно решение $u(t)=K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\beta,\ t\in I$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть интегральное уравнение (4) имеет решение при любом фиксированном $\beta\in R^n$. Покажем, что матрица $C(t_0,t_1)>0$. Поскольку для любого вектора $b\in R^n$ квадратичная форма $b^*C(t_0,t_1)b\geq 0$, то для доказательства $C(t_0,t_1)>0$ достаточно показать, что матрица $C(t_0,t_1)>0$ не особая.

Предположим противное. Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ особая. Тогда существует вектор $c\in R^n, c\neq 0$ такой, что $c^*C(t_0,t_1)c=0$. Определим функцию

$$w(t)=K^*(t_0,t_1)c,\ t\in I,\ w(\cdot)\in L_2(I,R^m).$$

Заметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}w^*(t)w(t)dt=c^*\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dtc=c^*C(t_0,t_1)c=0.$$

Тогда функция $w(t)\equiv 0, \forall t, t\in I$. Так как интегральное уравнение (1) имеет решение для любого вектора $a\in R^n$, то, в частности, существует функция $\overline{u(\cdot)}\in L_2(I,R^m)$. такая, что$(a=c)$

$$\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)\bar{u}(t)dt=c.$$

$$0=\int_{t_0}^{t_1}w^*(t)\bar{u}(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}c^*K(t_0,t)\bar{u}(t)dt=c^*\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)\bar{u}(t)dt=c^*c.$$

Это противоречит тому, что $c\neq 0$. Противоречие возникло вследствие предположения о том, что матрица $C(t_0,t_1)$ особая. Следовательно, матрица $C(t_0,t_1)>0$. Необходимость доказана. Теорема доказана.

Таким образом, необходимым и достаточным условием существования решения интегрального уравнения (4) является положительная определенность матрицы $C(t_0,t_1)$.

Решение задачи 4 следует из теоремы 2.

Теорема 2. Предположим, что матрица $C(a,b)$, определяемая по формуле (5) ,положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (4) определяется по формуле

$$w(t)=K^*(\tau)C^{-1}(a,b)\beta+v(\tau)-K^*(\tau)C^{-1}(a,b)\int_a^b K(\eta)v(\eta)d\eta,\ \tau\in I, \qquad (6)$$

где $v(t)\in L_2(I,R^m)$ – любая функция, $\beta\in R^n$ – любой вектор.

Доказательство. Введем следующие множества

$$W=\left\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)\left|\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u(t)dt=a\right.\right\} \tag{7}$$

$$Q=\Big\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)\Big|u(t)=K^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-$$
$$\left.-K^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt,\forall v(\cdot),v(\cdot)\in L_2(I,R^m)\right\}, \tag{8}$$

где множество U содержит все решения интегрального уравнения (4). Теорема утверждает, что функция $u(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ принадлежит множеству W тогда и только тогда, когда она приналлежит множеству Q, т.е. $W=Q$

Докажем, что $W=Q$. Для этого достаточно показать, что: $Q\subseteq W$; $W\subseteq Q$ Покажем, что $Q\subseteq W$. В самом деле, если $u(t)\in Q$, то, как следует из соотношения (5), верно равенство

$$\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)[K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-$$
$$-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt=a.$$

Отсюда следует, что $u(t)\in W$. Следовательно, множество $Q\subseteq W$.

Покажем, что $W\subseteq Q$. Пусть $u_.(t)\in W$, т.е. для функции $u_*(t)\in W$ выполнено равенство (см. (7))

$$\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)dt=a.$$

Заметим, что в соотношении (8) функция $v(\cdot)\in L_2\big(I,R^m\big)$ произвольная. В частности, можно выбрать $v(t)=u_*(t),\ t\in I.$ Теперь функция $u(t)\in Q$ запишется в виде:

$$u(t)=K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-$$
$$-K^*(t_0,t_1)T^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt=$$
$$=K^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\left[\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)\right]+u_*(t)-$$
$$-K^*(t_0,t_1)T^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)dt=u_*(t),\ t\in I.$$

Следовательно, $u_*(t)=u(t)\in Q.$ Отсюда следует, что $W\subseteq Q.$ Из включений $Q\subseteq W, W\subseteq Q$ следует, что $W=Q$ Теорема доказана.

Линейная управляемая система

Рассмотрим следующую линейную систему

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)w(t) + \mu(t), \ \ t \in I_1 = [t_0, t_1] \tag{9}$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n, \ y(t_1) = x_1 \in R^n \tag{10}$$

$$w(t) \in L_2(I, R^m). \tag{11}$$

Решение дифференциального уравнения (9) при условиях (10), (11) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)w(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau, \quad t \in I_1. \tag{12}$$

Отсюда при $t = t_1$ получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)w(t)dt = \overline{a} = \Phi(t_0,t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt, \tag{13}$$

где $\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной системы $\theta(t) = A(t)\theta(t), \theta(t_0) = I_n$, I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

<u>Теорема 3</u>. Система (9) – (11) управляема тогда и только тогда, когда матрица

$$W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt \tag{14}$$

порядка $n \times n$ является положительно определенной.

Доказательство теоремы следует из теоремы 1, где интегральное уравнение (13) следует из (4) при $K(t) = \Phi(t_0,t)B(t), \ t \in I, \ W(t_0,t_1) = C(a,b), \ a = t, b = t_1$.

<u>Теорема 4</u>. Предположим, что матрица $W(t_0,t_1)$, определяемая по формуле (14), положительно определенная. Тогда любое управление $w(t) \in U(t)$ переводит траекторию системы (7) – (9) из точки x_0 в точку x_1 тогда и только тогда, когда множество

$$U(t) = \{w \in L_2(I,R^m) \big| w(t) = v(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,t), \ \ t \in I, \\ \forall v, v(t) \in L_2(I,R^m)\}, \tag{15}$$

где

$$\lambda_1(t,x_0,x_1) = B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\overline{a},$$

$$N_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

функция $z(t,v), \ t \in I_1$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), \ z(t_0) = 0, \ \ v(t) \in L_2(I,R^m). \tag{16}$$

Доказательство теоремы следует из теоремы 2, где $K(t) = \Phi(t_0,t)B(t)$, $C(a,b) = W(t_0,t_1), \ a = t, \ b = t_1$

<u>Теорема 5.</u> *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда решение*

дифференциального уравнения (9), соответствующее управлению, определяется по формуле

$$y(t) = z(t,v) + \lambda_2(t,x_0,x_1) + N_2(t)z(t,v), \ t \in I, \tag{17}$$

где

$$\lambda_2(t,x_0,x_1) = \Phi(t,t_0))W(t,t_1)W^{-1}(t_0.t_1)x_0 + \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)x_1 + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

функция $\dot{z}(t,v),\ t\in I_1-$ *решение дифференциального уравнения (13).*

Доказательство теоремы следует из формулы (12), где $w(t)\in U(t)$ из (15). Далее с учетом (16), получим (17).

Управляемость и оптимальное быстродействие линейных систем

Рассмотрим решение задачи 1. Из теорем 1 – 5 и сравнения систем (1) – (3) и (7) – (9) следует, что решение задачи 1 может быть получено из оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J(v,u)=\int_{t_0}^{t_1}\left|v(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t_1,v)-u(t)\right|^2dt\to\inf \qquad (18)$$

при условиях

$$\dot{z}=A(t)z+B(t)v(t),\ \ z(t_0)=0,\ \ v(t)\in L_2(I,R^m), \qquad (19)$$

$$u(t)\in\Lambda(t)=\{u(t)\in L_2(I,R^m)\left|u(t)\in V(t)\subset R^m,\ \text{п.в.}\ t\in I_1\right.\}. \qquad (20)$$

Заметим, что: 1. Значение функционала $J(\tau,u)\geq 0.$ Пересечение множеств $\Lambda(t)\bigcap U(t)\neq\emptyset$, $\emptyset$-пустое множество, тогда и только тогда, когда значение $J(v_*,u_*)=0$, где пара $v_*,u_*\in\Lambda(t)\bigcap U(t)$ оптимальное решение задачи (18) – (20).

2. Если $J(v_*,u_*)=0$, то искомое управление $u_*(t)=v_*(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)++N_1(t)z(t_1,v_*)$, $t\in I$, *где* $z(t,\tau),\ t\in I-$ решение дифференциального уравнения (19).

Ниже приведены решения оптимизационной задачи (18)-(20) в виде теорем 6,7.

<u>Теорема 6.</u> *Пусть выполнены условия теоремы 3.Тогда функционал (18) непрерывно дифференцируем по Фреше в любой точке* $(v,u)\in L_2(I,R^m)\times\Lambda(t)$, *градиент*

$$J'(v,u)=(J'_v(v,u),J'_u(v,u))\in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^m),$$

где

$$J'_v(v,u)=2*\left|v(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t_1,v)-u(t)\right|-B^*(t)\psi(t)\in L_2(I,R^m), \qquad (21)$$

$$J'_u(v,u)=-2*\left|v(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t_1,v)-u(t)\right|\in L_2(I,R^m), \qquad (22)$$

где $z(t,v),t\in I,-$ решение дифференциального уравнения (17), а функция $\psi(t),t\in I,-$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}=-A^*(t)\psi,\ \psi(t_1)=-\int_{t_0}^{t_1}2N_1^*(t)\left[v(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t_1,v)-u(t)\right]dt. \qquad (23)$$

Градиент $J'(v,u)\in L_2(I,R^m)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\left\|J'(v_1,u_1)-J'(v_2,u_2)\right\|\leq K(\left\|v_1-v_2\right\|^2+\left\|u_1-u_2\right\|^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\forall v_1,v_2\in L_2(I_2,R^m),\ \forall u_1,u_2\in\Lambda(t). \qquad (24)$$

Доказательство. Можно показать, что приращение функционала

$$\Delta J=J(v+h,u+\Delta u)-J(v,u)=\int_{t_0}^{t_1}\left\langle J'_v(v,u),h\right\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\left\langle J'_u(v,u)\,\Delta u\right\rangle dt+R_1,$$

где $\left|R_1\right|/(\left\|h\right\|^2+\|\Delta u\|^2)^{1/2}\to 0$ при $(\left\|h\right\|^2+\|\Delta u\|^2)^{1/2}\to 0$.

Норма

$$\left\|J'(v_1,u_1)-J'(v_2,u_2)\right\|^2=\int_{t_0}^{t_1}\left|J'(v_1,u_1)-J'(v_2,u_2)\right|^2dt\leq K^2(\left\|v_1-v_2\right\|^2+\left\|u_1-u_2\right\|),$$

$$\forall v_1,v_2\in L_2(I,R^m),\ \forall u_1,u_2\in\Lambda(t).$$

Теорема доказана.

Заметим что: 1. Функционал $J(v,u)\in C^{1,1}(L_2(I,R^m)\times\Lambda(t))$. 2. Функционал $J(v,u)$ достигает нижней грани на множестве $L_2(I,R^m)\times\Lambda(t)$. 3. Функционал $J(v,u)$ при условиях (19),(20) является выпуклым.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6, последовательности* $\{v_n\},\{u_n\}$ *определяются по алгоритму*

$$v_{n+1}=v_n-\alpha_n J'_v(v_n,u_n),\ u_{n+1}=P_\Lambda[u_n-\alpha_n J'_u(v_n,u_n)],\ n=0,1,2,...,$$

$$\varepsilon_0\le\alpha_n\le\frac{2}{k+2\varepsilon_1},\varepsilon_1>0,\ n=0,1,2,...,K=const>0 \text{ из (22)},$$

где $\Lambda(t)$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество.

Тогда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}J(v_n,u_n)=J_*=\inf J(v,u),\ \ X=L_2^p(I,R^m)\times\Lambda;$

2. $(v_*,u_*)\in X_*,\ X_*\ne\emptyset,\ v_n\xrightarrow{сл}v_*,\ u_n\xrightarrow{сл}u_*$ *при* $n\to\infty;$

3. $J(v_n,u_n)-J(v_*,u_*)\le\dfrac{m_0}{n},\ m_0=const>0,\ n=0,1,2,...$

4. Задача 1 имеет решение тогда и только тогда, когда значение $J(v_*,u_*)=0.$

Доказательство: Последовательности $\{v_n\}\subset L_2(I,R^n)$, $\{u_n\}\subset\Lambda(t)$ строятся на основе формул (21)-(24). Пусть $\theta_n=(v_n,u_n)$. Можно показать, что:

$$\langle J'(\theta_n),\theta-\theta_{n+1}\rangle_{L_2}\ge\frac{1}{\alpha_n}\langle\theta_n-\theta_{n+1},\theta-\theta_{n+1}\rangle_{L_2},\ \forall\theta,\theta\in X,$$

$$J(\theta_n)-J(\theta_{n+1})\ge\langle J'(\theta_n),\theta_n-\theta_{n+1}\rangle-\frac{K}{2}\|\theta_n-\theta_{n+1}\|^2,\ \forall\theta_n,\theta_{n+1}\in X$$

Следовательно,

$$J(\theta_n)-J(\theta_{n+1})\ge(\frac{1}{\alpha_n}-\frac{K}{2})\|\theta_n-\theta_{n+1}\|^2\ge\varepsilon_1\|\theta_n-\theta_{n+1}\|^2.$$

Отсюда следуют утверждения (1) – (4) теоремы. Теорема доказана.

Оптимальное быстродействие. Пусть t_0 – фиксировано, t_1 – не фиксировано.

Необходимо найти наименьшее значение $t_1=t_*$.

I. Задаем значение $t_1>t_*$. Находим $u_{*t_1}(t)$. Далее, выбираем $t_{11}=t_1/2$. Находим пару $(v_{**},u_{**})\in X,\ t\in[t_0,t_{11}]$. Если значение $J(v_{**},u_{**})=0$, то выберем значение $t_{12}=t_1/4,\ t_{12}<t_{11}$ и так далее. Если значение $J(v_{**},u_{**})>0$,, то $t_{12}=\dfrac{3t_1}{4}$.

II. Между последовательных приближений. Рассмотрим оптимизационную задачу $J(v,u,t_1)\to\inf$ при условиях (17),(18), $t_1>t_0$. Пусть

$$J(v,u,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}F_0(q(t),t_1,t)dt.$$

Находим $J'_v(v,u,t_1),\ J'_u(v,u,t_1),\ J'_{t_1}=F_0(q(t_1),t_1,t_1)+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0}{\partial t_1}dt.$ Далее, строим последовательности $\{v_n\},\{u_n\},\ \{t_{1n}\},t_{1n+1}=t_{1n}-\alpha_n J'_{t1}(v_n,u_n,t_{1n}).\ n=0,1,2,...$

Решение модельной задачи

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(x,u,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1\cdot\, dt = t_1 - t_0 \to \inf$$

при условиях

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u,\ t \in I_1[0,t_1],$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0,$$

$$u(t) \in \Lambda = \left\{ u(t) \in L_2(I_1, R^1) \,|\, -1 \le u(t) \le +1,\ \text{п.в.}\ t \in [0,t_1] \right\}$$

Применяя теоремы (1) – (7), находим решение задачи оптимального быстродействия. Можно показать для данной задачи: $\inf t_1 = t_* = 2.$ Функции

$$v_* = u_*(t) = \begin{cases} -1,\ \text{если}\ \ 0 \le t < 1, \\ 1,\ \text{если}\ \ 1 \le t < 2, \end{cases}$$

$$I(x_*, u_*, t_*) = 0$$

$$x_{1*}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{2},\ \ 0 \le t < 1, \\ \dfrac{t^2}{2} - 2t + 2,\ 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$x_{2*}(t) = \begin{cases} -t, \quad 0 \le t < 1 \\ t - 2,\ 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Заключение

Основными результатами, полученными в работе, являются:

– необходимые и достаточные условия управляемости процессов;

– описываемые линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями;

– разработанный метод построения управления для решения задачи управляемости;

– найденное решение задачи оптимального быстродействия;

– созданная общая теория управляемости и оптимального быстродействия;

– приведенный пример для иллюстраций теоретических результатов.

Литература

1. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления//Труды. I Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т.II. – АНСССР, 1961. – Стр.521–547.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука,1968. – 475с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука,1971. – 480с.
4. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.:Наука,1975. – 495с.
5. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.Н. Синтез ограниченного управления линейными динамическимии системами с помощью общей функции Ляпунова// Доклады РАН, 2010. – Т.434. –№3. – Стр.51–53.
6. Семенов Ю.М. О полной управляемости линейных неавтономных систем//Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т.48. – №9. – Стр.1269– 1270.
7. Емельянов С.В.,Крищенко А.П. Стабилизация нерегулярных систем//Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т.48. –№11. – Стр.1515– 1524.

8. Коровин С.К., Каплин И.В., Фолмичев В.В. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем// Доклады РАН, 2011. – Т.441. –№5.-Стр.606–611.

9. Понтрягин А.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Т.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука,1969. – 384с.

10. Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные по бытродействию процессы при ограниченных фазовых координатах, ДАН СССР. –Т.125. –№3. – 1959. – Стр.475–478.

11. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука,1977. –392с.

12. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления/Перев.с англ. – М.: Наука,1972. – 576с.

13. Брайсон А.,Хо Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления. – М.:Мир,1972. – 482с.

14. Aisagaliev S.A. Constructive method for solvability of Fredholm equation of the first kind// Electrnic Journal of Qualitative Theory of Differential Equationsthis(EJQTDE), 2017,№72,p.1-11.DOI:10.14232/ejqtde.2017

15. Aisagaliev S.A. To the boundary value problem of ordinary differential equations// Electrnic Journal of Qualitotive Theory of Differential Equationsthis(EJQTDE), 2015,№57,p.1-17.DOI:10.14232/ejqtde.2015

16. Aisagaliev S.A. On Periodic Solutions of Autonomous Systems//Journal of Mathematical Sciences(United States), Volume 229, Issue 4, March,2018, p.335-353.

17. Aisagaliev S.A. Aizerman's problem in absolute stability theory for regulated systems//Sbornic mathematics(SBMATH),2018,209,DOI:10.1070/SM8948,p.780-801

18. Aisagaliev S.A. Controllability of differential equation systems//Differential equations,vol.27,№9,1991,p.1037-1047.

19. Aisagaliev S.A.,Aisagalieva S.S. A constructive method for solving the controllability problem for ordinary diffeerential equations//Differential Equations, vol.29,№4,1993,p.471-482.

20. Aisagaliev S.A., Belogorov A.P. Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control//Siberian Mathematical Journal,2012,vol.53,№1,p.13-28.

21. Aisagaliev S.A. Optimal control of linear systems with fixed trajectory end points and bounded control//Differential Equations,-1996.-vol 32,№6,p.1017-1023.

22. Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A. On the Optimal Control of linear systems with linear performance criterion and constraints//Differential Equations, 2012.-vol.48,№6,p.826-836.

23. Aisagaliev S.A. Certain problems of synchronization theory//Journal inverse Ill-Posed Problems.-№21,2013,-p.159-175.

24. Aisagaliev S.A., AipanovSh.A. A remark of the global asymptotic stability theory of phase system//Differential Equations (35),8,1999,p.1019-1026.

25. Aisagaliev S.A. Absolute stability in controlled systems// Differential Equations,vol.30,№5,1994,p.587-695.

26. Aisagaliev S.A. To the solution of a boundary value problem with a parameter for ordinary differential equations//ISSN 2074-1863. Ufa mathematical Journal, vol.8,№3(2016),p.3-13.

27. Айсагалиев С.А. Теория краевых задач динамических систем. – Алматы,2021. –565с.

28. Айсагалиев С.А. Качественная теория интегро-дифференциальных уравнений. – Стр.272.