ГРНТИ27.29.17

УДК 517.927.2

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Сакенкызы, aibibisakenkyzy@gmail.com(магистрант 2 курса, специальность математика)
С.А. Айсагалиев,Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz(д.т.н., профессор)
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Разработан новый метод решения двухточечной краевой задачи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи с краевыми условиями и заданных выпуклых и замкнутых множеств. Предлагается метод построения решения краевой задачи путем погружения исходной задачи к специальной начальной задаче оптимального управления. Основой предлагаемого метода решения краевой задачи является разрешимость и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированным параметром.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, необходимые и достаточные условия, построение решения, минимизирующая последовательность, оптимальное управление.

Введение

Основы теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в [1−5]. Решение краевой задачи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к построению n-линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения и нахождению функции Грина, удовлетворяющей однородным краевым условиям. Построение функций Грина, удовлетворяющих однородным краевым условиям, с требованиями на произведение n-го порядка − довольно сложная задача. В данной работе предлагается совершенно другой метод решения краевой задачи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основой предлагаемого метода решения краевой задачи является разрешимость и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированным параметром. При таком подходе необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи могут быть получены из условия достижения нижней грани функционала на заданном множестве, а решение исходной краевой задачи определяется по предельным точкам минимизирующих последовательностей.

Результаты, полученные в статье, являются продолжением научных исследований по интегральному уравнению [6−8], качественной теоремы дифференциальных уравнений [9−14], а также по оптимальному управлению[15−20].

Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\dot{x} = A(t)x + \mu(t), t \in I = [t_0, t_1] \quad 1$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n}. \quad 2$$

Здесь $A(t)$ − матрица порядка $n\times n$ с кусочно-непрерывными элементами $\mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_n(t))$,

$t\in I$ − заданная кусочно-непрерывная функция, S − заданное выпуклое замкнутое множество. В частности, множество $S = S_0\times S_1$,где $x_0\in S_0,\ x_1\in S_1,\ S_0\subset R^n,\ S_1\subset R^n$. Например: $S_0=\{x_0\in R^n \mid C_1x_0=b_0\}, S_1=\{x_1\in R^n \mid D_1x_1=b_1\}$, где S_1, D_1 − заданные матрицы порядка $m_1\times n, m_2\times n$, соответственно, $b_0\in R^{m_1}, b_1\in R^{m_2}, b_1\in R^{m_1}$. В практике часто встречаются множества $S=\{(x_0,x_1)\in R^{2n} \mid Cx_0+Dx_1=b\}$. В общем случае $S=\{(x_0,x_1)\in R^{2n} \mid H_j(x_0,x_1)\le 0,\ j=\overline{1,s_1},\ H_j(x_0,x_1)=\langle d_jx_0\rangle+\langle e_jx_1\rangle-\alpha_j=0,\ j=\overline{s_1+1,p_1}\}$,

где $H_j(x_0,x_1), j=\overline{1,s_1}$ − выпуклые функции соотносительно переменных $x_0, x_1, x_0=x(t_0)$,

$x_1=x(t_1), d_j\in R^n, e_j\in R^n, j=\overline{s_1+1,p_1}, \alpha_j, j=\overline{s_1+1,p_1}$ − заданные числа. Множества

$S_0=\{x_0\in R^n \mid |x_0-x_0|^2\le r^2\},\ S_1=\{x_1\in R^n \mid |\overline{x_1}-x_1|^2\le R^2\}$ − замкнутые шары с центрами в точках $x_0\in R^n, x_1\in R^n$ соответственно.

Определение 1. *Краевая задача(1),(2)имеет решение, если решение дифференциального уравнения(1), исходящее из точки* $x_0=x(t_0)\in S_0$ *в момент времени* t_0*, проходит через точку* $x_1=x(t_1)\in S_1$ *в момент времени* $t_1, t_1>t_0$.

Задача1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1),(2).
Задача 2. Разработать метод построения решения краевой задачи (1),(2).

Интегральное уравнение

Для решения задачи 1,2 требуются результаты исследования интегрального уравнения Фредгольма первого рода с фиксированными параметрами следующего вида

$$Ku=\int_a^b K(t_*,\tau)w(\tau)d\tau=\beta, t_*\in[t_0,t_1], \qquad 3$$

Где $K(t_*,\tau)$ – матрица порядка $n\times m$ с элементами из L_2,
$t_*\in[t_0,t_1]$ – фиксированная точка, $w(\tau)\in L_2(I,R^m)$ – искомая функция, $\beta\in R^n$.

Теорема 1.*Интегральное уравнение(3)для любого вектора* $\beta\in R^n$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} K(t_*,\tau)K^*(t_*,\tau)d\tau \qquad 4$$

порядка $n\times n$ *является положительно определенной.*

Теорема 2. *Пусть матрица* $W(t_0,t_1)$*, определяемая по формуле(4), положительно определенная.*

Тогда общее решение интегрального уравнения (3) равно

$$W(t)=K^{*}(t)W^{-1}(t_0,t_1)\beta+v(t)-K^{*}(t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}K(\eta)v(\eta)d\eta, t\in I, \quad 5$$

где $v(t) \in L_2(I,R^m)$ *– любая функция,* $\beta\in R^n$ *– любой вектор,*$(*)$ *– знак транспонирования.*

Доказательство теорем 1,2 можно найти в[6-8].

Преобразование. Линейная управляемая система

Представим матрицу$A(t),t\in I$ порядка $n\times n$ с кусочно-непрерывными элементами в виде суммы $A(t) = A_1(t)+B_1(t)P(t),t \in I$, так, чтобы матрица

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t_1)B_1(t)B^{*}(t)\Phi^{*}(t_0,t_1)dt \quad 6$$

порядка $n\times n$ была положительно определенной, где – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi}=A_1(t)\xi$. Заметим, что матрица $\kappa(t)$ является решением матричного уравнения $\dot{\kappa}(t)=A_1(t)\kappa(t),\kappa(t_0)=I_n$, где

I_n– единичная матрица порядка $n\times n, B_1(t), P(t), t\in I$ – матрицы порядков $n\times m, m\times n$ соответственно.

Возможность представления матрицы $A(t) = A_1(t)+B_1(t)P(t)$, где $W(t_0,t_1)>0$, покажем на примере. В работах[1-5] рассматриваются краевые задачи для дифференциального уравнения вида

$$\ddot{x}+g(t)\dot{x}+h(t)x=\mu(t), t\in I= [0,1]. \quad 7$$

Уравнение(7) можно представить в виде

$$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-g(t)x_2-h(t)x_1+\bar{\mu}(t), t\in I. \quad 8$$

В векторной форме уравнение (8) запишется так

$$\dot{x}=A(t)x+\mu(t), t\in I;$$

Матрицу $A(t)$ можно представить в виде суммы $A(t)=A_1(t)+B_1(t)P(t)$, где

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h(t) & -g(t) \end{pmatrix}, \mu(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}(t) \end{pmatrix}.$$

Матрица $\Phi(t,\tau)=\kappa(t)\kappa^{-1}(\tau), \kappa(t)=e^{A_1t}=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \kappa^{-1}(\tau)=\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$W(0,1)=\int_0^1\Phi(0,t)B_1(t)B_1^{*}(t)\Phi^{*}(0,t)dt=\int_0^1 e^{-A_1t}B_1(t)B_1^{*}(t)e^{-A_1^{*}t}dt=\begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}>0.$$

После представления матрицы $A(t)=A_1(t)+B_1(t)P(t)$ краевая задача(1),(2) запишется в виде

$$\dot{x}=A_1(t)x+B_1(t)P\ (t)+\mu(t), t\in I=[0,1]. \quad 9$$

$$(x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1)\in S, \quad 10$$

где матрица $W\ (t_0,t_1)>0$. Наряду(9),(10) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y}=A_1(t)y+B_1(t)v(t)+\mu(t), \quad 11$$

$$(y(t_0)=x_0, y(t_1)=x_1\ )\in S, S+S_0\times S_1, \quad 12$$

$$u(t)\in L_2(I,R^m). \quad 13$$

Заметим, что если $w(t)=P\ (t)x(t)$, то $y(t)=x(t), t\in I$.

Теорема 3. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$,определяемая по формуле(6), положительно определенная.Тогда управление $u(t)\in L_2(I,R^m)$ переводит траекторию системы(11)-(13)из любой начальной точки $x(t_0)=x_0\in S_0$ в момент времени t_0,в любое конечное состояние $x(t_1)=x_1\in S_1$,в момент времени $t_1, t_1>t_0$ тогда и только тогда, когда*

$$u(t)\in U=\{u(t)\in L_2(I,R^m)\,|\,u(t)=v(t)+\Lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t,v), t\in I, \forall v, v(t)\ \in L_2\ (I,R^m)\}, \quad 14$$

где

$$\Lambda_1(t,x_0,x_1)=B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a, a=\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$N_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

функция $z(t,v), t\in I$ − решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}=A_1(t)z+B_1(t)v(t), z(t_0)=0, v(t)\in L_2(I,R^m). \quad 15$$

Д*оказательство.* Решение дифференциального уравнения (11) запишется в виде

$$y(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\tau\ )B_1(\tau\ )u(\tau\ )d\tau+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\tau\ )\mu(\tau\ )d\tau, t\in I. \quad 16$$

Отсюда при $t=t_1, y(t_1)=x_1$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)u(t)dt = a = \Phi(t_0,t_1)x_1 - x_0 - \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt. \quad 17$$

Следовательно, искомое управление $u(t)\in L_2(I,R^m)$ является решением интегрального уравнения (17).Интегральное уравнение (17) совпадает с (3) при $K(t_*,t) = \Phi(t_0,t)B_1(t),\ t_* = t_0 \in I$. Тогда утверждения теоремы следуют из теорем 1,2. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда решение дифференциального уравнения(11), соответствующее управлению* $u(t)\in U$ *, имеет вид*

$$y(t)=z(t,v)+\Lambda_2(t,x_0,x_1)+N_2(t)z(t,v), t\in I, \quad 18$$

где

$$\Lambda_2(t,x_0,x_1)=\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)x_0+\Phi(t,t_0)W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)x_1$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\tau)\mu(t)dt-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$N_2(t)=-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1).$$

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(\tau)B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,t)d\tau,$$

$$W(t,t_1)=W(t_0,t_1)-W(t_0,t), t\in I.$$

функция $z(t,v), t\in I$ − *решение дифференциального уравнения(15).*

Доказательство. Подставляя значение $u(t)\in U\ (t)$ из(14) в (16) с учетом формул (15),(17), получим формулу(18).

Из теоремы 3,4 следует, что решения задач 1,2 могут быть сведены к решению задачи оптимального управления

$$J\ (v,x_0,x_1)=\int_{t_0}^{t_1}|\,v(t)+T_1(t)x_0+T_2(t)x_1+\mu_1(t)-P\ (t)y(t)\,|^2\ dt\to inf \quad 19$$

при условиях

$$\dot{z}=A_1(t)z+B_1(t)v(t), z(t_0)=0, v(t)\in L_2(I,R^m), t\in I, \quad 20$$

$$(x(t_0)=x_0=y(t_0), x(t_1)=x_1=y(t_1))\in S. \quad 21$$

где

$$T_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),\ T_2(t)=B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)$$

$$\mu_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$y(t)=z(t,v)+C_1(t)x_0+C_2(t)x_1+f\ (t)+N_2(t)z(t,v),$$

$$C_1(t)=\Phi(t,t_0)W\ (t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1), C_2(t)=\Phi(t,t_0)W\ (t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$f(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau-\Phi(t,t_0)W\ (t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)>0$. Для того, чтобы краевая задача (1),(2) имела решения, необходимо и достаточно, чтобы значение $J\ (v_*,x_{0*},x_{1*})=0$,где ($v_*,x_{0*},x_{1*})\in X_*\subset X=-$ решение оптимизационной задачи (19)-(21).*

Доказательство. Значение $J\ (v_*,x_{0*},x_{1*})=0$ тогда и только тогда, когда

$$x_*(t)=y_*(t)=z(t,v_*)+\Lambda_2(t,x_{0*},x_{1*})+N_2(t)z(t,v_*), t\in I.$$

Теорема 6. *Пусть матрица* $W\ (t_0,t_1)>0$ *,функция*

$$F_0(q,t)=|\Delta_0(q,t)|^2,\ \Delta_0(q,t)=v(t)+T_1(t)x_0+T_2(t)x_1+\mu_1(t)-P\ (t)y(t),\ q=(v,x_0,x_1,z,z(t_1)).$$

Тогда функционал(19)при условиях(20),(21)непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$J'(v,x_0,x_1)=(J'_v(v,x_0,x_1), J'_{x_0}(v,x_0,x_1), J'_{x_1}(v,x_0,x_1))$$

определяется по формуле

$$J'_v(v,x_0,x_1)=2\Delta_0(q,t)-B_1^*(t)\Psi(t)\in L_2(I,R^m), \qquad 22$$

$$J'_{x_0}(v,x_0,x_1)=\int_{t_0}^{t_1}[2T_1^*(t)-2C_1^*(t)P^*(t)]\Delta_0(q,t)dt.$$

$$J'_{x_1}(v,x_0,x_1)=\int_{t_0}^{t_1}[2T_2^*(t)-2C_2^*(t)P^*(t)]\Delta_0(q,t)dt.$$

где функция $z(t,v),t\in I$ *−решение дифференциального уравнения(20),а функция* $\psi(t),t\in I$ − *решение сопряженной системы*

$$\dot\psi=-2P^*(t)\Delta_0(q,t)-A^*(t)\psi(t);$$

$$\psi(t_1)=-\int_{t_0}^{t_1}[2N_1^*(t)-2N_2^*(t)P^*(t)]\Delta_0(q,t)dt \qquad 23$$

,

кроме того, градиент $J'(\theta),\theta=(v,x_0,x_1)\in X$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'(\theta_1)-J'(\theta_2)\|\le K\|\theta_1-\theta_2\|,\ \forall\theta_1,\theta_2\in X. \qquad 24$$

Доказательство. Пусть

$$\theta(t)=(v(t),x_0,x_1)\in X,\theta(t)+\Delta\theta(t)=(v(t)+h(t),x_0+\Delta x_0,x_1+\Delta x_1).$$

Тогда приращение функционала

$$\Delta J=J(\theta+\Delta\theta)-J(\theta)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\{h^*(t)[F_{0v}(q,t)-B_1^*(t)\psi(t)]+\Delta x_0^*F_{0x_0}(q,t)+\Delta x_1^*F_{0x_1}(q(t),t)\}dt+R$$

$$|R|\le C_0\|\Delta\theta\|^2,\Delta\theta=\theta_1-\theta_2=(h,\Delta x_1,\Delta x_2).$$

Отсюда следует(22).Так как в силу(23)

$$\|J'(\theta_1)-|J'(\theta_2)\|^2=\int_{t_0}^{t_1}|J'(\theta_1)-|J'(\theta_2)|^2\,dt\le K\|\theta_1-\theta_2\|,$$

то верно неравенство(24).Теорема доказана.

Теорема7. *Пусть выполнены условия теоремы 6 последовательности*

$$v_{n+1}=v_n-\alpha_n J_n^{'}(\theta_n), x_{0n+1}=P_{S_1}\ [x_{0n}-\alpha_n J_{x_0}^{'}\ (\theta_n)],$$
$$x_{1\ n+1}=P_{S_1}\ [x_{1n}-\alpha_n J_{x_1}^{'}(\theta_n)],$$
$$n=0,1,2,\ \dots\ ,\ \alpha_n>0,\ 0\le\varepsilon_0\le\alpha_n\le\frac{2}{K+2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1>0\ ,$$

Где K=const>0 – постоянная Липщица из(24).Тогда

1) *числовая последовательность* $\{J\ (\theta_n)\},\theta_n=(v_n,x_{0n},x_{1n})\in X$, *строго убывает;*

2) $\|v_n-v_{n+1}\|\to 0, |x_{0n}-x_{0n+1}|\to 0, |x_{1n}-x_{1n+1}|\to 0$ *при* $n\to\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\{J\ (\theta_n)\}=J_*=\inf\limits_{\theta\in X} J\ (\theta)$;

4) $v_n\to v_*, x_{0n}\to x_{0*}, x_{1n}\to x_{1*}$ *при* $n\to\infty$, $(v_*,x_{0*},x_{1*})=\theta_*\in X_*\subset X$

5) $J\ (\theta_n)-J\ (\theta_*)\le\dfrac{m_0}{n}\ ,n=1,2,\ \dots\ ,m_0=const>0;$

6) *Краевая задача(1),(2)имеет решение тогда и только тогда, когда значение* $J\ (v_*,x_{0*},x_{1*})=0$*.Решение краевой задачи(1),(2)функция*

$$x_*(t)=z(t,v_*)+\Lambda_2(t,x_{0*},x_{1*})+N_2(t)z(t,v_*),t\in I$$

Решение модельной задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{\eta}+\eta=cos\,t,t\in\ [0,\pi],\eta\ \ 0\ =0,\eta(\pi)=0.$$

Пусть $x_1=\eta,\dot{\eta}=x_2$.Тогда

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 P x + \mu(t), x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = x_{2_0} \end{pmatrix}, x(\pi) = \begin{pmatrix} x_1(\pi) = 0 \\ x_2(\pi) = x_{2_1} \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P(0,1).$$

Легко убедиться в том, что

$$W(0,\pi) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^3}{3} & -\frac{\pi^2}{2} \\ -\frac{\pi^3}{3} & \pi \end{pmatrix} > 0,\ W^{-1}(0,\pi) = \begin{pmatrix} \frac{12}{x^3} & \frac{6}{\pi^2} \\ \frac{6}{\pi^2} & \frac{4}{\pi} \end{pmatrix},$$

$$a = \Phi(0,\ \pi) x(\pi) - x\ \ 0\ - \int_0^p \pi \Phi(0,\ \mathrm{t}) \mu(t) = \begin{pmatrix} -\pi x_2 & -2 \\ x_{2_1} & -x_{2_0} \end{pmatrix}$$

Линейная управляемая система

$$\dot{y} = A_1 y + B_1 u(t) + \mu(t), y\ \ 0\ = x\ \ 0\ \in S_0, y(\pi) = x(\pi) \in S_1, u(t) \in L_2(I, R^1),$$

$$S_0 = \{(x_1\ \ 0\ \ , x_2\ \ 0\ \ ) \in R^2 \,|\, x_1\ \ 0\ = 0, x_2\ \ 0\ \ = x_{2_0} \in R^1\},$$

$$S_1 = \{(x_1(\pi), x_2(\pi))\ \in R^2 \,|\, x_1(\pi)\ = 0, x_2(\pi) = x_{2_1} \in R^1\}.$$

Оптимизационная задача

$$J\ \ (v, x_{2_0}\ \ , x_{2_1}\ \ ) = \int_0^{\pi} |\, u(t) + y_1(t)\,|^2\ dt \to inf,$$

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), z(t_0) = 0, v(t) \in L_2(I, R^1).$$

Решение оптимизационной задачи:

$$x_{1_*}(t) = y_{1_*}(t) = \frac{1}{2} t\, sin t - \frac{\pi}{4} sin t,$$

$$x_{2_*}(t)=y_{2_*}(t)=\frac{1}{2}sin\,t+\frac{1}{2}t\,cos\,t-\frac{\pi}{4}cos\,t, t\in I=[0,\pi].$$

Заключение

Основные результаты:
- получены необходимые и достаточные условия разрешимости исходной краевой задачи;
- путем преобразования исходная краевая задача сводится к линейной управляемой системе;
- разработан метод построения решения краевой задачи;
- найдено решение модельной задачи;
- создана теория линейныхуправляемых систем;
- приведен пример для иллюстраций теоритических результатов;
- полученные результаты являются весомым вкладом в теорию краевых задач динамических систем.

Литература

1. *Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. −М.:Наука,1970. −332с.*
2. *Петровский И.Г.Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. −М.:Наука,1965. −272с.*
3. *Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. III. – Ч. 2. −М.: Наука, 1974.−672с.*
4. *Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. −Минск,"Высшая школа", 1974 −766с.*
5. *Красовский Н.Н. Теория управления движением. − М.: Наука, 1968. − 475с.*
6. *Тихонов А.Н.,Васильева А.Б.,Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. −М.:Наука, 1985. −232с.*
7. *AisagalievS.A.ConstructivemethodforSolvabilityofFredholmequationofthefirstkind //ElectronicJournalofQualitativeTheoryofDifferentialEquationsehis(EJQTDE),2017, No.72,DOI:10.14232/ejqtde.2017.*
8. *AisagalievS.A.Totheboundaryvalueproblemofordinarydifferentialequations//Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE), 2015, No.57, p.1-17 DOI: 10.14232/ejqtde.2015.*
9. *Aisagaliev S.A. On Periodic Solutions of Autonomous Systems// Journal of Mathematical Sciences (United States), Volume 229, Issue 4, March, 2018, p.335-353.*
10. *AisagalievS.A.Aizermansprobleminabsolutestabilitytheoryforregulatedsystems// Sbornig Mathematics (SB MATH) ,2018,209, DOI: 10.1070/SM 8948,p.780-801.*
11. *AisagalievS.A.Controllabilityofdifferentialequationsystems//DifferentialEquations.Vol.*27,No.9,1991.p.1037-1047.
12. *AisagalievS.A.,AisagalievaS.S.Aconstructuremethodforsolvingthecontrollability problemforordinarydifferentialequations//DifferentialEquations,Vol.29,XXX4.1993,p.471-482.*
13. *AisagalievS.A.,Belogurov A.P. Controllability and Speed of the process described by a*

parabolic equation with bounded control//Siberian Mathematical Journal,2012. Vol.53, XXX1,p.13-28.

14. *Aisagaliev S.A. Optimal control of linear systems with fixed trajectory end points andboundedcontrol//DifferentialEquations,-1996.-vol.32,XXX5.p.1017-1023.*
15. *AisagalievS.A.,KabidoldanovaA.A.OntheOptimalControloflinearsystemswithlinear performance criterion and constraints//Differential Equations,2012.-vol.48,XXX6, p.826-836.*
16. *Aisagaliev S.A.Certainproblemsofbynchrinization(непонятно)theory//Journalinverse [I]PosedProblems.-XXX21,2013.-p.159-175.*
17. *Aisagaliev S.A. AioanovSh.A. A remark of of the global asymptotic siability theory of phase system// Differential Equations (35), 8,1999,p. 1019-1025.*
18. *Aisagaliev S.A. Absolute stability in controlled systems // Differential Equations,vol.30,XXX5,1994.p.687-695.*
19. *AisagalievS.A.Tothesolutionofaboundaryvalueproblemwithaparameterforordinary differentialequations//ISSN2074-1863.UfaMathematicalJournal.vol.8,No.3(2016).p.3- 13.*
20. *Айсагалиев С.А.Теория краевых задач динамических систем. –Алматы,2021. −565с.*
21. *Айсагалиев С.А. Качественная теория интегро-дифференциальных уравнений. – Алматы, 2022. −272с.*