УДК 517.977.5 (575.2)

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО – ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Керимбеков А.К., Кадиримбетова А.К.
Кыргызско-Российский Славянский университет

В статье исследованы вопросы разрешимости задач нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма при минимизации кусочно-линейного функционала. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Выявлено влияние интегрального оператора на существование единственности обобщённого решения. Задача минимизации кусочно-линейных функционалов имеет специфические особенности и мало изучена. На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены условия оптимальности искомого управления. Далее установлено, что, согласно условиям оптимальности, искомое оптимальное управление следует находить как решение нелинейного интегрального уравнения и удовлетворяющего дифференциальному неравенству и при этом решение должно быть определенного знака, т.е. положительного или отрицательного на всем промежутке времени. Разработан алгоритм построения такого решения нелинейной задачи оптимизации.

Ключевые слова: Краевая задача, интегро-дифференциальные уравнения, оператор Фредгольма, кусочно-линейный функционал, минимизация, управление.

Введение

В теории оптимального управления системами с распределенными параметрами задачи минимизации кусочно-линейного функционала мало исследованы, в частности, не достаточно разработаны конструктивные методы их решения. В статье исследованы вопросы разрешимости задач нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма при минимизации кусочно-линейного функционала в случае, когда функция граничного воздействия нелинейно зависит от параметров управления. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса [1, 2]. Выявлены условия и единственности обобщённого решения при наличии интегрального оператора Фредгольма в уравнении. Задача нелинейной оптимизации исследована на основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [1]. Установлено,что, согласно условиям оптимальности, искомое оптимальное управление следует находить как решение нелинейного интегрального уравнения и удовлетворяющего дифференциальному неравенству и при этом решение должно быть определенного знака, т.е. положительного или отрицательного на всем промежутке времени.Это обстоятельство существенно усложняет вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации. Найдены классы функций граничных воздействий, где задача нелинейной оптимизации при минимизации кусочно-линейного функционала разрешима и разработан алгоритм построения ее решения.

Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим тепловой процесс описываемый функцией $v(t,x)$, которая в области $Q=\{0<x<\ 1;\ 0<t<T\}$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению:

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + g(t,x), 0<x<1; 0<t<T; \tag{1}$$

а на границе области Q начальному

$$v(0,x)=\psi(x),\ 0<x<1; \tag{2}$$

и граничным

$$v_x(t,0)=0,\ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)= f[t,u(t)],\ \alpha>0, \tag{3}$$

Условиям, где ядро интегрального оператора Фредгольма $K(t,\tau)\in H(D)$, $D=\{0<t,\tau<T\}$, функция началного состояния $\psi(x)\in H_1(0,1)$, функция граничного воздействия $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ считаются известными; $u(t)\in H(0,T)$ является функцией управления; λ – параметр; T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y; $H_1(0,1)$ – соболево пространство превого порядка.

Поскольку в краевой задаче (1)-(3) заданные функции могут быть разрывными, то существование классическкгоо решения является мало вероятным. Поэтому будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи, которое более-менее адекватно описывает реально происходящий процесс.

Определение: Под обобщенным решением краевой задачи (1) – (3) будем понимать функцию $V(t,x)\in H(Q)$, которая имеет обощенные производные, удовлетворяет $V_x(t,x)\in H(Q)$ и интегральному тождеству

$$\int_0^1 (v(t,x)\phi(t,x)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 v(t,x)\phi_t(t,x)-v_x(t,x)\phi_x(t,x)\ dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)\phi(t,x)dxdt-\int_t^{t_2}\ \phi(t,1)(-\alpha V(t,1)+f(t,u(t))\ \ dt$$

при любых t_1 и t_2 $(0<t_1<t<t_2<T)$ и для любой функции $\phi(t,x)\in H_1(Q)$, а также в слабом смысле начальному и граничным условиям, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1[v(t,x)-\psi(x)]\phi_0(x)dx=0,$$

$$\lim_{x\to1}\int_0^T[v_x(t,1)-\alpha v(t,1)-f[t,u(t)]]\phi_1(t)dt=0$$

$\phi_0(x)\in H(0,1),\ \phi_1(t)\in H(0,T)$ – произвольные функции. Установлено, что обощенное решение краевой задачи (1)-(3) имеет вид [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, 2]

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n ds+a_n(t)\right]z_n(x) \tag{4}$$

,

где $R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента ядра

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau,$$

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(1)f[\tau,u(\tau)]d\tau$$

,

которая существует лишь при значениях параметра λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K_0T}}\lambda_1,K_0=\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt\,. \tag{5}$$

Здесь $\{z_n(x)\}$ полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$z_n''+\lambda_n^2 z_n(x)=0, z_n'(1)+\alpha z_n(1)=0,$$

а

$$\{\lambda_n\}:\lambda_n<\lambda_{n+1},\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,((n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(\lambda_n-1)$$

система собственных значений.

В[**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] доказано, что $v(t,x)\in H_1(Q),\forall\, u(t)\in H(0,T)$.

Отметим, что между элементами пространства управлений $\{u(t)\}=H(0,T)$ и пространства состояний $\{v(t,x)\}$ взаимно-однозначное соответствие имеет место лишь при выполнении условия

$$f_u[t,u(t)]\neq 0,\forall t\in(0,T), \tag{6}$$

т.е. когда функция $f[t,u(t)]$ является монотонной относительно функциональной переменной $u(t)$.

Постановка задачи нелинейной оптимизации и условия оптимальности

В задаче нелинейной оптимизации требуется минимизировать кусочно-линейный функционал

$$J[u(t)]=\int_0^1[v(T,x)-\xi(x)]^2dx+2\beta\int_0^T|u(t)|dt,\beta>0, \tag{7}$$

на множестве обобщеных решений краевой задачи (1)-(3). Здесь $\xi(x)\in H(0,1)$ – заданная функция.

В работе [2] установлено, что при выполнении условия (6), применяя принцип максимума [1] для систем с распределенными параметрами, искомое управление следует определить из соотношений

$$2\beta\, f_u^{-1}[t,u(t)]sign\;\, u(t)=\omega(t,1), \tag{8}$$

$$\frac{f_{uu}[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]}sign\; u(t)<0, \tag{9}$$

которые называются *условиями оптимальности* для искомого управления. Здесь $\omega(t,x)$ является решением сопряженной краевой задачи [2]

$$\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0, 0<x<1, 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x)+2[v(T,x)-\xi(x)]=0, 0<x<1$$

$$\omega_x(t,0)=0,\;\omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\;\;0\le t<T,$$

и имеет вид

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}[v_n(T)-\xi_n]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(x), \tag{10}$$

где $R_n(s,t,\lambda)$ – резольвента ядра

$$B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau$$

$v(t,x)$ – обобщенное решение краевой задачи (1)-(3).

С учетом (4) имеем соотношение

$$v_n(T)-\xi_n=-h_n+\int_0^T G_n(\tau,\lambda)\,f[\tau,u(\tau)]d\tau, \tag{11}$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right),$$

$$G_n(t,\lambda) = z_n(1) \left[e^{-\lambda_n^2 (T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T,\tau,\lambda) e^{-\lambda_n^2 (\tau - t)} d\tau \right],$$

Подставляя (11) в (8), получим нелинейное интегральное уравнение

$$Bf_u^{-1}[t,u(t)] sign\ u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f[s,u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n\ , \qquad (12)$$

которое следует рассматривать вместе с условием (9). Эта задача в зависимости от знака значений функции $u(t)$ может иметь тот или иной вид. В области, где $u(t) > 0$ уравнение (12) примет вид

$$Bf_u^{-1}[t,u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f[s,u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n \qquad (13)$$

и получим задачу, где искомое управление $u^0(t)$ следует находить как решение уравнения (13), удовлетворяющее дифференциальному неравенству

$$f_u[t,u(t)]\ \ f_n^{-1}[t,u(t)]\ _u < 0, \forall t \in [0,T]. \qquad (14)$$

В области, где $u(t)\ <\ 0$ уравнение (12) примет вид

$$-Bf_u^{-1}[t,u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f[s,u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n \qquad (15)$$

и получим задачу, где искомое управление $u^0(t)$ следует находить как решение уравнения (15), удовлетворяющее дифференциальному неравенству

$$f_u[t,u(t)]\ \ f_n^{-1}[t,u(t)]\ _u > 0, \forall t \in [0,T]. \qquad (16)$$

Эти задачи обладают специфическими свойствами, т.е. они могут иметь решение лишь определенного знака (положительного или отрицательного) на всем промежутке $[0,T]$. Это связано с тем, что (14) и (16) являются уравнениями Фредгольма 2-го рода, у которого решение не обладает свойством продолжаемости[5, 6].

Сначала рассмотрим случай $u(t) > 0$, т.е. задачу (13)-(14). В нелинейном интегральном уравнении (13) положим

$$\beta\ f_u^{-1}[t,u(t)] = p(t). \qquad (17)$$

В силу условия оптимальности (14) и согласно теореме о неявных функциях[7-10], это равенство однозначно разрешается относительно управления, т.е. имеет место соотношение

$$u(t) = \varphi[t,\ p(t), \beta\,], \qquad (18)$$

где $\varphi(\bullet)-$ известная однозначная функция. Далее, согласно (18), уравнение (13) перепишем в виде

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f[s, \varphi[s,\ p(s), \beta\,]] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n \qquad (19)$$

.

Это уравнение подробно исследовано в работе [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], где найдены достаточные условия существования единственного решения $p^0(t) \in H(0,T)$ и указан алгоритм его построения. Предположим, что функция $p^0(t)$ найдена. Ее подставляя в (18), получим управление

$$u^0(t) = \varphi[t,\ p^0(t), \beta\,]\ , \qquad (20)$$

которое при выполнении условий

$$\varphi[t, p^0(t),\beta]>0,\forall t\in[0,T], \tag{21}$$

и

$$f_u \quad t,\varphi[t, p^0(x),\beta] \quad f_u^{-1}(t,\varphi[t, p^0(t),\beta] \quad _u <0,\forall t\in[0,T] \tag{22}$$

является решением задачи (13)-(14). Как следует из неравенства (22), где $p^0(t)$, как решение нелинейного интегрального уравнения (13) носит независимый характер и разрешимость задачи оптимизации зависит от свойства функции $f[t,u(t)]$. Это обстоятельство усложняет вопросы разрешимости рассматриваемой нелинейной задачи оптимизации в целом. Однако можно указать класс функций $M=\{f[t,u(t)]\}$ такой, что задача (13)-(14) имеет решение при любом решении $p^0(t)$ интегрального уравнения (13). Приводим простой пример, что множество M не пусто.

Пусть $f[t,u(t)]=[u(t)]^{\frac{2k+1}{2}}, k=1,2,3,....,u(t)>0$. Она монотонно возрастающая функция. Непосредственными вычислениями находим, что

$$f_u[t,u(t)]=\frac{2k+1}{2}[u(t)]^{\frac{2k-1}{2}};$$

$$f_u^{-1}[t,u(t)]=\frac{2}{2k+1}[u(t)]^{-\frac{2k-1}{2}};$$

$$\beta\, f_u^{-1}[t,u(t)]=\beta\,\frac{2}{2k+1}[u(t)]^{-\frac{2k-1}{2}}=p(t);$$

$$u(t)=\varphi[t, p(t),\beta]=\left[\frac{2\beta}{(2k+1)\,p(t)}\right]^{\frac{2}{2k-1}}>0,\forall k=1,2,3,....$$

$$f_u^{-1}[t,u(t)]\quad_u=\frac{2}{2k+1}\left(u(t)^{-\frac{2k-1}{2}}\right)_u=-\frac{2}{2k+1}\frac{(2k-1)[u(t)]^{\frac{2k-3}{2}}}{[u(t)]^{2k-1}};$$

$$f_u[t,u(t)]\quad f_u^{-1}[t,u(t)]\quad_u=\frac{2k+1}{2}[u(t)]^{\frac{2k-1}{2}}\left(-\frac{2}{2k+1}\right)\frac{(2k-1)[u(t)]^{\frac{2k-3}{2}}}{[u(t)]^{2k-1}}=$$

$$=-\frac{2k-1}{2}\left[\frac{2\beta}{(2k+1)\,p(t)}\right]^{-\frac{2}{2k-1}}<0,\forall k=1,2,3,.....$$

Этот пример показывает, что существуют функции $f[t,u(t)]\in M$, для которых условия (21) и (22) выполняются независимо от вида функции $p(t)$, т.е. для элементов класса M задача (13)-(14) всегда имеет решение.

Аналогичным образом для задачи (15)-(16) можно указать класс $N=\{f[t,u(t)]\}$, где она всегда имеет решение. На основе вышеизложенного получим следующий результат.

Теорема

Пусть функция $f[t,u(t)]$ является элементом множества M или N и удовлетворяет условию монотонности (6). Тогда задача нелинейной оптимизации (1)-(3), (7) всегда имеет решение.

Отметим, что задача нелинейной оптимизации (1)-(3),(7) может иметь решение и тогда, когда функции $f[t,u(t)]$ не являются элементом множеств M или N. Однако этот случай требует дополнительных исследований.

Заключение

В заключение отметим, что задача минимизации кусочно-линейного функционала обладает специфическими свойствами и является одной из трудных проблем теории оптимального управления. Недостаточно разработаны методы ее решения. Поэтому полученные в статье результаты представляют научный интерес. Разработанный алгоритм построения решения нелинейной задачи (1)-(3), (7) является конструктивным и может оказаться полезным при разработке методов решения нелинейных задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, а также при решении практических задач.

Литература

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. –500с.
2. Евтушенко, Ю. Г. Оптимальное управление тепловыми процессами с фазовыми переходами / Ю. Г. Евтушенко, В. И. Зубов, А. Ф. Албу. – М.: ООО "МАКС Пресс", 2021. – 248 с. – ISBN 978-5-317-06677-2. – DOI 10.29003/m2449.978-5-317-06677-2. – EDN PNAKVX.
3. Кадиримбетова А.К. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ / А.К. Кадиримбетова // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. № 5. С. 74-76.
4. Керимбеков, А. О сходимости приближенных решений задачи нелинейной оптимизации теплового процесса / А. Керимбеков, З. С. Кабаева, Э. Ф. Абдылдаева // Проблемы автоматики и управления. – 2022. – № 1(43). – С. 72–83. – EDN WWODFV.
5. Краснов М.Л.Интегральные уравнения.–М.: Наука, 1975. – 303с.
6. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков ; Верлань А.Ф., Сизиков В.С.. – Киев : Наукова думка, 1986. – 544 с. – EDN VZPJJP.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.– М.: Наука, 1965. –520 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ. /Пер. с англ. — М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Изд. четвёртое, переработанное. — М.: Наука, 1976. — 544 с.