Проблемы автоматики и управления. 2020, №1 (38)

УДК 519.3:62–50 10.5281/zenodo.3904081

Т.П. Самохвалова, *sam_tp@mail.ru*
Институт машиноведения и автоматики НАН КР

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ПРОЦЕССА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Построен алгоритм управления с обратной связью методом Р. Беллмана для одномерного процесса с последействием.

Ключевые слова: оптимальное управление; обратная связь; принцип оптимальности Р. Беллмана; интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; производная по направлению.

Введение

Математические модели с интегро-дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных представлены в известной монографии Я.В. Быкова [1] и его школы [2] и др. Задачи оптимального управления с такими моделями не выявлены и не являются изученными. В процедурах решения этих задач требуется дифференцировать по функции функционал. В данной статье разработаны расчетные формулы решения линейных одномерных задач оптимального управления с интегро-дифференциальной моделью с использованием производной по направлению [3, 4]. Алгоритмы оптимального управления построены методом динамического программирования Р. Беллмана, изложенным для дифференциальных моделей в обыкновенных производных в [5, 6].

Приведем определение из [3]. «Известно, что для вещественных функций $F(x)$ одного вещественного переменного x два определения – *существование* конечного предела

$$1)\quad \lim_{h\to 0}\frac{F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})}{h}$$

и *возможность* асимптотического разложения при $h\to 0$

$$2)\quad F(\hat{x}+h)=F(\hat{x})+F'(\hat{x})h+o(h)$$

– приводят к одному и тому же понятию дифференцируемости.

Для функций нескольких переменных, а тем более для функций с бесконечномерной областью определения дело обстоит не так просто.

Определение 1) и обобщающее его определение частной производной приводят к понятию *производной по направлению*, первой вариации и производной Гато. В то же время обобщение определения 2) приводит к производной Фреше и строгой дифференцируемости.

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, U – окрестность точки $\hat{x}$ в X, F – отображение из U в Y.

Определение 1. Предел

$$3)\quad \lim_{\alpha\to +0}\frac{F(\hat{x}+\alpha h)-F(\hat{x})}{\alpha}$$

в предположении, что он существует, называется *производной F в точке $\hat{x}$ по направлению h* и обозначается $F'(\hat{x};h)$ (а также у других авторов $D_hF(\hat{x})$ и др.).

Для вещественных функций $(Y = R)$ будем понимать 1) несколько расширенно, допуская в качестве предела $-\infty$ и $+\infty$».

В данной работе будем ориентироваться на определение 1 и на формулу 3) вычисления производной по направлению в тех ситуациях, когда требуется вычислить производную по функции (производную сложной функции, производную под знаком интеграла) [3, 4]. Направление h будем полагать равным единичной функции $h(t) \equiv 1$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления одномерным процессом, моделью которого является линейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \lambda \int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0;T]. \tag{1}$$

Минимизируемый критерий качества запишем в виде

$$J = \gamma_1 \int_0^T Qx^2(t)dt + \gamma_2 Fx^2(T) + \beta \int_0^T u^2(t)dt. \tag{2}$$

Здесь A, B, λ, x_0 – заданные постоянные, $T, \gamma_1, \gamma_2, Q, F, \beta$ – положительные постоянные, $G(t,\tau)$ – заданная непрерывная дифференцируемая по t функция; $x(t)$ – абсолютно непрерывная функция; $u(t)$ – управляющая функция из множества W допустимых управлений. На рис. 1 приведен график состояния процесса $x(t)$ при нулевом управлении $u(t) \equiv 0$. В критерии (2) требуется минимизация отклонения состояния процесса $x(t)$ от нуля.

2. Решение задачи 1

Задача 1. Найти управление $u(t, x(t)) \in W$ и соответствующее решение $x(t)$ уравнения (1), минимизирующие критерий (2).

Для решения задачи 1 применим метод динамического программирования Р.Беллмана, разработав модификации, связанные с интегральным слагаемым в модели (1). Обозначим

$$y_1(x) = \int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau, \ \frac{d}{dx} y_1(x) = \int_0^t G(t,\tau)d\tau = v(t). \tag{3}$$

Выполнив соответствующие преобразования, следуя [5, 6], учитывая обозначения (3), получим для (1), (2) функциональное уравнение Беллмана в виде

$$-\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = \gamma_1 Qx^2(t) + Ax\frac{\partial S(t,x)}{\partial x} + \lambda \int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau \cdot \frac{\partial S(t,x)}{\partial x} - \frac{B^2}{4\beta}\left(\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\right)^2 \tag{4}$$

с условием в конечный момент времени

$$S(T,x) = \gamma_2 Fx^2(T). \tag{5}$$

В данной статье решение уравнения (4) предлагается искать в виде формы второго порядка

$$S(t,x(t)) = K(t)x^2(t) + \lambda K_1(t)(y_1(x))^2 + \lambda K_2(t)x(t)y_1(x),$$

или $$S(t,x(t)) = K(t)x^2(t) + \lambda K_1(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)^2 + \lambda K_2(t)x(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right), \tag{6}$$

где $K(t),\ K_1(t),\ K_2(t)$ – пока не определенные вспомогательные функции.

С учетом (6) и формулы Ньютона-Лейбница дифференцирования интеграла по параметру выпишем левую часть $-\dfrac{\partial S(t,x)}{\partial t}$ уравнения Беллмана (4), состоящую из выражения

$$-\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}=-\frac{dK(t)}{dt}x^2-\lambda\frac{dK_1(t)}{dt}\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)^2-$$
$$-2\lambda K_1(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)\cdot\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)x(\tau)d\tau+G(t,t)x(t)\right)-$$
$$-\lambda\frac{dK_2(t)}{dt}x\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)-\lambda K_2(t)x\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)x(\tau)d\tau+G(t,t)x(t)\right). \qquad (7)$$

Правую часть уравнения Беллмана (4) здесь не выписываем, так как для (6) она весьма громоздкая. Группируя коэффициенты при линейно независимых функциях $x^2(t),\ (y_1(t))^2,\ x(t)y_1(t)$, выпишем полученные средствами пакета Maple уравнения относительно $K(t),\ K_1(t),\ K_2(t)$, конечные условия определим по (5). Получим систему типа Риккати для задачи 1:

$$-\frac{dK(t)}{dt}=\gamma_1 Q+2AK(t)-\frac{B^2}{\beta}K^2(t)-\lambda\frac{B^2}{\beta}K(t)K_2(t)v(t)+\lambda AK_2(t)v(t)-$$
$$-\lambda^2\frac{B^2}{4\beta}K_2^2(t)v^2(t)+\lambda K_2(t)G(t,t),\quad K(T)=\gamma_2 F; \qquad (8)$$

$$-\lambda\frac{dK_1(t)}{dt}=-\lambda^2\frac{B^2}{\beta}K_1^2(t)v^2(t)-\lambda^2\frac{B^2}{\beta}K_1(t)K_2(t)v(t)+$$
$$+2\lambda^2K_1(t)v(t)-\lambda^2\frac{B^2}{4\beta}K_2^2(t)+\lambda^2K_2(t),\qquad K_1(T)=0; \qquad (9)$$

$$-\lambda\frac{dK_2(t)}{dt}=-\lambda^2\frac{B^2}{2\beta}K_2^2(t)v(t)+2\lambda K(t)+2\lambda AK_1(t)v(t)+\lambda^2K_2(t)v(t)-$$
$$-2\lambda\frac{B^2}{\beta}K(t)K_1(t)v(t)-\lambda\frac{B^2}{\beta}K(t)K_2(t)+\lambda AK_2(t)-$$
$$-\lambda^2\frac{B^2}{\beta}K_1(t)K_2(t)v^2(t)+2\lambda K_1(t)G(t,t),\qquad K_2(T)=0. \qquad (10)$$

В уравнениях (8) – (10) $\lambda\neq 0$, в левой части (7) на подынтегральную функцию $G(t,\tau)$ наложено ограничение

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)=0. \qquad (11)$$

Оптимальное управление вычисляем по известной формуле [5, 6]

$$u^0(t,x)=-\frac{B}{2\beta}\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}, \qquad (12)$$

получаем в задаче 1

$$u^0(t,x)=-\frac{B}{2\beta}\left\{2K(t)x(t)+2\lambda K_1(t)y_1(x)v(t)+\lambda K_2(t)y_1(x)+\lambda K_2(t)x(t)v(t)\right\},$$

или $$u^0(t,x)=-\frac{B}{2\beta}\left\{2K(t)x(t)+2\lambda K_1(t)\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\int_0^t G(t,\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\lambda K_2(t)\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau+\lambda K_2(t)x(t)\int_0^t G(t,\tau)d\tau\right\}. \qquad (13)$$

Из (13) получим расчетную величину управления в первой точке $t=0$:

$$u^0(0,x(0))=-\frac{B}{2\beta}\{2K(0)x(0)\}.$$

3. Решение задачи 2

Если требуется минимизировать отклонение $x(t)$ от ненулевой заданной величины $g\neq 0$, то критерий J записывается в виде

$$J_1=\gamma_1\int_0^T Q(x(t)-g)^2dt+\gamma_2F(x(T)-g)^2+\beta\int_0^T u^2(t)dt. \qquad (14)$$

Задача 2. Найти управление $u(t,x(t))\in W$ и соответствующее решение $x(t)$ уравнения (1), минимизирующие критерий (14).

В задаче 2 уравнение Беллмана имеет вид

$$-\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}=\gamma_1Q\big(x(t)-g\big)^2+Ax\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}+\lambda\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\cdot\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}-\frac{B^2}{4\beta}\left(\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\right)^2 \qquad (15)$$

с условием в конечный момент времени

$$S(T,x)=\gamma_2F\big(x(T)-g\big)^2. \qquad (16)$$

Соответствующий функционал Беллмана $S(t,x)$ в (15) в задаче 2 предлагается определять в виде формы второго порядка

$$S(t,x(t))=K(t)x^2(t)+\lambda K_1(t)(y_1(x))^2+\lambda K_2(t)x(t)y_1(x)+\varphi(t)x+\lambda\varphi_1(t)y_1(x)+\eta(t),$$

или с учетом обозначений (3)

$$S(t,x(t))=K(t)x^2(t)+\lambda K_1(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)^2+\lambda K_2(t)x(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\varphi(t)x+\lambda\varphi_1(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)+\eta(t), \qquad (17)$$

где $K(t),\ K_1(t),\ K_2(t),\ \varphi(t),\ \varphi_1(t),\ \eta(t)$ пока не определенные вспомогательные функции. Тогда

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}=2K(t)x+2\lambda K_1(t)y_1(x)v(t)+\lambda K_2(t)y_1(x)+2K_2(t)xv(t)+\varphi(t)+\lambda\varphi_1(t)v(t)$$

и оптимальное управление $u^0(t,x)$ в соответствии с (12) определяется в виде

$$u^0(t,x)=-\frac{B}{2\beta}\left\{2K(t)x(t)+2\lambda K_1(t)y_1(x)v(t)+\lambda K_2(t)[y_1(x)+x(t)v(t)]+\varphi(t)+\lambda\varphi_1(t)v\right\}$$

или $$u^0(t,x)=-\frac{B}{2\beta}\left\{2K(t)x(t)+2\lambda K_1(t)\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\int_0^t G(t,\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\lambda K_2(t)\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau+\lambda K_2(t)x(t)\int_0^t G(t,\tau)d\tau+\varphi(t)+\lambda\varphi_1(t)\int_0^t G(t,\tau)d\tau\right\}. \qquad (18)$$

Из (18) получим расчетную величину управления в первой точке $t=0$:

$$u^0(0,x(0))=-\frac{B}{2\beta}\{2K(0)x(0)+\varphi(0)\}.$$

Левая часть $-\dfrac{\partial S(t,x)}{\partial t}$ уравнения Беллмана (15) в задаче 2 дополняется слагаемыми относительно функций $\varphi(t),\ \varphi_1(t),\ \eta(t)$ и принимает вид:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} &= -\frac{dK(t)}{dt}x^2-\lambda\frac{dK_1(t)}{dt}\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)^2-\\
&-2\lambda K_1(t)\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)\cdot\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)x(\tau)d\tau+G(t,t)x(t)\right)-\\
&-\lambda\frac{dK_2(t)}{dt}x\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)-\lambda K_2(t)x\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)x(\tau)d\tau+G(t,t)x(t)\right)-\\
&-\frac{d\varphi(t)}{dt}\cdot x-\lambda\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\left(\int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)-\\
&-\lambda\varphi_1(t)\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)x(\tau)d\tau+G(t,t)x(t)\right)-\frac{d\eta(t)}{dt}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Правую часть уравнения Беллмана в задаче 2 также не выписываем, так как для (15) она еще более громоздкая. Группируем коэффициенты при линейно независимых функциях $x^2(t),\ (y_1(t))^2,\ x(t)y_1(t),\ x(t),\ y_1(t)$ и свободные члены, выпишем уравнения относительно $K(t),\ K_1(t),\ K_2(t),\ \varphi(t),\ \varphi_1(t),\ \eta(t)$. В задаче 2 уравнения относительно $K(t),\ K_1(t),\ K_2(t)$ совпадают с (8) – (10). Уравнения относительно $\varphi(t),\ \varphi_1(t),\ \eta(t)$ и конечные условия, полученные из (16), имеют вид:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d\varphi(t)}{dt} &= \lambda A\varphi_1(t)v(t)-\frac{B^2}{\beta}K(t)\varphi(t)+A\varphi(t)-\lambda\frac{B^2}{\beta}K(t)\varphi_1(t)v(t)-\\
&-\lambda^2\frac{B^2}{2\beta}K_2(t)\varphi_1(t)v^2(t)-2\gamma_1Qg-\lambda\frac{B^2}{2\beta}K_2(t)\varphi(t)v(t)+\lambda\varphi_1(t)+\lambda\varphi_1(t)G(t,t),\\
&\varphi(T)=-2\gamma_2Fg; \qquad (20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda\frac{d\varphi_1(t)}{dt} &= -\lambda\frac{B^2}{\beta}K_1(t)\varphi(t)v(t)-\lambda^2\frac{B^2}{\beta}K_1(t)\varphi_1(t)v^2(t)+\lambda\varphi(t)-\\
&-\lambda\frac{B^2}{2\beta}K_2(t)\varphi(t)+\lambda^2\varphi_1(t)v(t)-\lambda^2\frac{B^2}{2\beta}K_2(t)\varphi_1(t)v(t), \quad \varphi_1(T)=0; \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{d\eta(t)}{dt}=\gamma_1Qg^2-\lambda^2\frac{B^2}{4\beta}\varphi_1^2(t)v^2(t)-\frac{B^2}{4\beta}\varphi^2(t)-\lambda\frac{B^2}{2\beta}\varphi(t)\varphi_1(t)v(t), \quad \eta(T)=\gamma_2Fg^2. \qquad (22)
$$

Таким образом, получены новые вспомогательные уравнения типа Риккати в задаче 1 при $g=0$ и в задаче 2 при $g\neq 0$ и построены соответствующие новые алгоритмы управления. Интегральное слагаемое входит только в уравнение (1) модели управляемого процесса.

В работе [6] в выводе соответствующих уравнений помогли добавки в форму решения $S(t,x)$ уравнения Беллмана и в критерий J. В данной работе показано, что уравнения Риккати можно получить без добавок в традиционный критерий J (2).

Требуется дальнейшая работа в этом направлении.

4. Пример 1, $g = 0$

Рассмотрим пример 1. В задаче 1 в расчетах использована схема Эйлера первого порядка [7]. В программе расчетов для статьи [8], где в критерий качества также были введены интегральные слагаемые, взяли равными нулю параметры $Q1 = 0$; $F1 = 0$. То есть по этой программе расчеты выполнены для критерия (2), вспомогательной системы Риккати (8) – (10), управления (13). На рис. 2 – 4 приведены графики функций $K(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ (8) – (10), на рис. 5, 6 графики управления $u^0(t)$ (13) и соответствующего состояния процесса $x^0(t)$ (1) с начальным условием $x_0 = 30$.

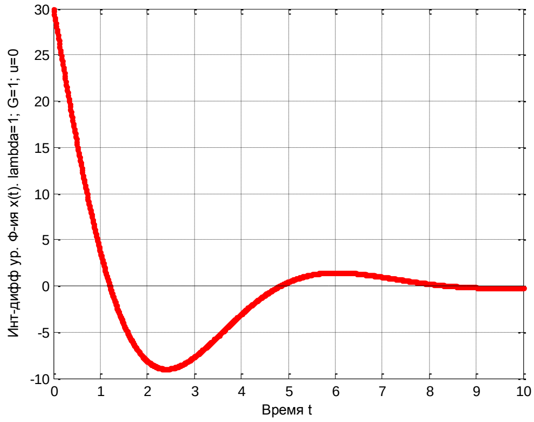

Рисунок 1 – Состояние $x(t)$ при $u(t) \equiv 0$.

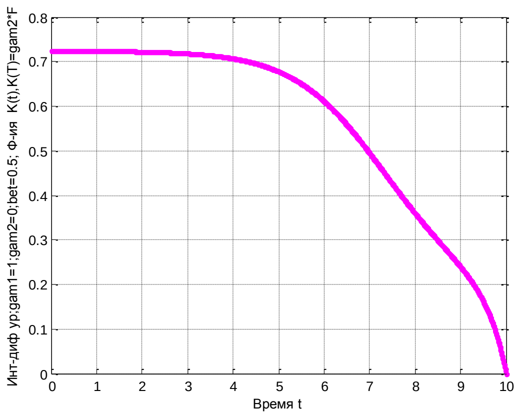

Рисунок 2 – Функция Риккати $K(t)$.

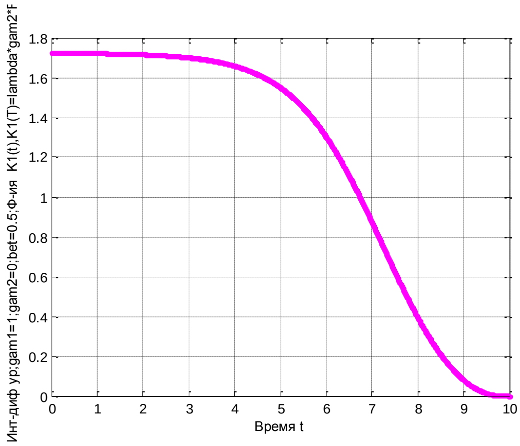

Рисунок 3 – Функция Риккати $K_1(t)$.

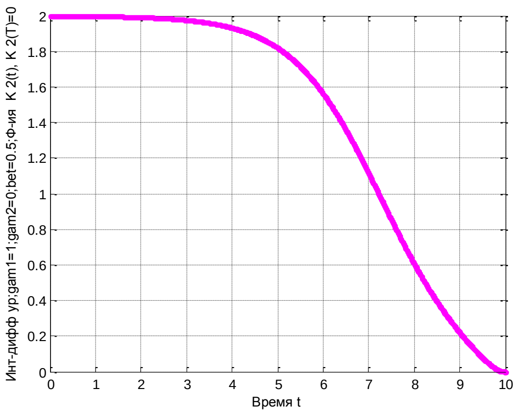

Рисунок 4 – Функция Риккати $K_2(t)$.

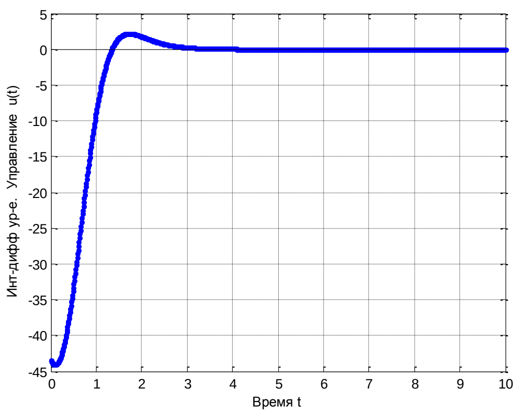

Рисунок 5 –Управление $u^0(t)$; $\lambda = 1$; $G = 1$.

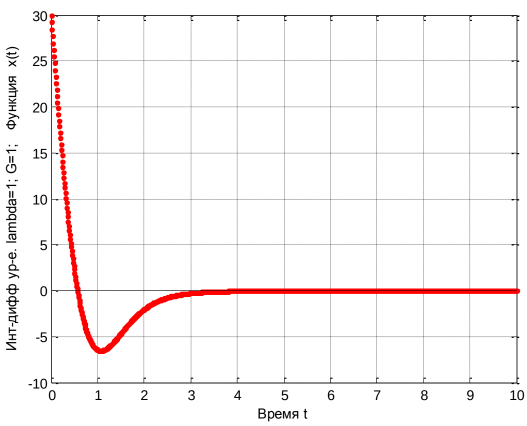

Рисунок 6 – Состояние $x(t)$ при $u^0(t)$.

Получено методом динамического программирования в задаче 1: критерий качества (2) равен $J^0 = 637.8569$, управление в начальной точке $u^0(0) = -43.4678$. Рисунки 1 и 6 показывают, что управление $u^0(t)$ интенсивно переводит состояние процесса $x(t)$ к нулю по сравнению с нулевым управлением.

Заключение

Построены новые алгоритмы управления с обратной связью процессом с последействием, описываемым одномерным интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра. Компьютерное моделирование показало работоспособность предложенных алгоритмов управления.

Литература

1. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргосуниверситет. Типография №1 Главиздата Министерства культуры Киргизсой ССР, 1957. – 328 с.
2. Егоров А.И. Об асимптотическом поведении решений системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Дисс… канд. физ.-мат. наук. Фрунзе, Киргосуниверситет, 1955.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. 432 с.
4. Люстерник Л.А., Соболев С.Л. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
5. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. 744 с.
6. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. 552 с.
7. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
8. Самохвалова Т.П., Керимбеков А.К., Таирова О.К. Интегро-дифференциальное уравнение в модели управляемого процесса // Проблемы автоматики и управления. – 2019. № 1 (36). – С. 77 – 83.