УДК 550.82

Э.Ф. Абдылдаева, efa_69@mail.ru
А. Керимбеков, akl7/@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОМ И ГРАНИЧНОМ ВЕКТОРНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

В данной статье исследована задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функции внешнего и граничного воздействия нелинейно зависят от нескольких параметров управления. Исследование проведено с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами, установлены условия оптимальности типа равенств и неравенств. Соотношения типа равенств приводят к системе нелинейных интегральных уравнений, которые обладают свойством равных отношений, а вторые приводят к дифференциальным неравенствам относительно функций внешнего и граничного источников. Свойство равных отношений является одной из особенностей рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: задача нелинейной оптимизации, распределенное векторное управление, граничное векторное управление, обобщенное решение, принцип максимума, свойства равных отношений, оптимальное управление, оптимальный процесс, минимальное значение функционала.

Введение

Многие технологические процессы описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных [1,2,3]. С начала 21 века задачи оптимального управления процессами, описанными интегро-дифференциальными уравнениями, стали привлекать внимание зарубежных и отечественных ученых [4-10].

В данной статье исследована задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функции внешнего и граничного воздействия нелинейно зависят от нескольких параметров управления. Исследование проведено с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [3,11], установлено, что распределенное и граничное оптимальные управления удовлетворяют одновременно соотношениям типа равенств и неравенств. Соотношения типа равенств приводят к системе нелинейных интегральных уравнений, которые обладают свойством равных отношений, а вторые приводят к дифференциальным неравенствам относительно функций внешнего и граничного источников. Свойство равных отношений является одной из особенностей рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации, ибо оно способствует построить решения системы нелинейных интегральных уравнений по решению лишь одного скалярного интегрального уравнения. Разработана методика, которая позволяет довести решения задачи до численных расчетов. Полученный результат представляет научный интерес как в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, так и в теории нелинейных интегральных уравнений.

1. Постановка задачи нелинейной оптимизации

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J[\bar{u}(t,x),\bar{\vartheta}(t,x)]=\int_Q [V(T,x)-\xi_1(x)]^2+[V_t(T,x)-\xi_2(x)]^2 \quad dx+$$
$$+\int_0^T\left[\alpha\int_Q h^2[t,x,\bar{u}(t,x)]dx+\beta\int_\gamma b^2[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]dx\right]dt,\alpha,\beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}-AV=\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+f[t,x,\bar{u}(t,x)],\quad x\in Q\subset R^n,0<t\le T, \tag{2}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),V_t(0,x)=\psi_2(x),\ x\in \mathrm{Q}, \tag{3}$$

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1,n}^{n}a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i)+a(x)V(t,x)=p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)],x\in\gamma,0<t\le T. \tag{4}$$

где функция $V\ t,x$, определенная в области $Q_T=Q\times\ 0,T$, описывает состояние управляемого колебательного процесса и является искомой функцией, $Q-$ область n-мерного евклидового пространства R^n, ограниченная кусочно-гладкой границей, γ,T – фиксированный момент времени.

$A-$эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x)V(t,x),\ a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,c_0>0,$$

а $a(x)\ge 0,c(x)\ge 0-$ известные измеримые функции; функция $K\ t,\tau$, которая является ядром интегрального оператора Фредгольма, определена в области $D=\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\}$ и является элементом гильбертова пространства квадратично суммируемых функций в $H(\mathrm{D})$, т.е. удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\ t,\tau\ \ d\tau dt=K_0<\infty, \tag{5}$$

$\lambda-$ параметр; функция $\psi_1(x)\in H_1(Q),$ характеризует начальное состояние управляемого процесса в начальный момент времени, а$\psi_2(x)\in H(Q)$ – начальная скорость точек управляемого объекта, где $H_1(Q)$ – пространство Соболева первого порядка; $H(Q)-$ гильбертово пространство квадратично-суммируемых в области Q функций; δ – вектор нормали, исходящий из точки $x\in\gamma$.

Скалярная функция $f[t,x,\bar{u}(t,x)]$ описывает действия внешнего источника и нелинейно зависит от векторного распределенного управления $\bar{u}(t,x)=\ u_1(t,x),...,u_k(t,x)\ \in H^k(Q_T),$ которое является элементом пространства

$H^k(Q_T)=H(Q_T)\times...\times H(Q_T)$ и $\|\bar{u}(t,x)\|^2_{H^k(Q_T)}=\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{k}u_i^2(t,x)dxdt,.$

Скалярная функция $p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]$ описывает действия граничного источника и нелинейно зависит от векторного граничного управления $\bar{\vartheta}(t,x)=\ \vartheta_1(t,x),...,\vartheta_m(t,x)\ \in H^m(\gamma_T)$, которое является элементом пространства

$H^m(Q_T) = H(\gamma_T)\times \ldots \times H(\gamma_T)$ и $\left\|\bar{\vartheta}(t,x)\right\|^2_{H^k(\gamma_T)} = \int\limits_{\gamma_T}\sum_{j=1}^{m}\vartheta_j^2(t,x)dxdt.;\xi_1(x)\in H_1(Q), \xi_2(x)\in H(Q)-$ заданные функции.

2. *Обобщенное решение краевой задачи*

Известно, что при выше заданных условиях, налагаемых на исходные функции, краевая задача *(2)-(4)* не может иметь классического решения. Поэтому будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи *(2)-(4)*.

Определение. Обобщенным решением краевой задачи *(2)-(4)* называется функция $V(t,x)\in H(Q_T)$, которая при любых t_1, t_2, $0 < t_1 \le t \le t_2 \le T$ и $\Phi(t,x)\in H_1(Q_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q V_t(t,x)\cdot\Phi(t,x) - V(t,x)\cdot\Phi_t(t,x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx = -\int\limits_Q\int\limits_{t_1}^{t_2} V(t,x)\cdot\Phi_{tt}(t,x)dtdx -$$
$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_Q\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_i} + c(x)V(t,x)\Phi(t,x)\right)dx -\right.$$
$$\left. -\int\limits_\gamma p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)] - a(x)V(t,x)\ \Phi(t,x)dx\right)dt + \tag{6}$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_1}\int\limits_Q\left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + f[t,x,\bar{u}(t,x)]\right)\Phi(t,x)dxdt,$$

а также начальным условиям в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_Q V(t,x)\phi_0(x)dx = \int\limits_Q\psi_1(x)\phi_0(x)dx,\ \lim_{t\to+0}\int\limits_Q V_t(t,x)\phi_1(x)dx = \int\limits_Q\psi_2(x)\phi_1(x)dx, \tag{7}$$

для любых функций $\phi_0\ \ x\in H\ \ Q$, $\phi_1\ \ x\in H\ \ Q$.

Решение краевой задачи (2)-(4) ищем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)z_n(x), \tag{8}$$

где $z_n(x)$ являются обобщенными собственными функциями краевой задачи

$$D_n(V, z_r(x)) = \int\limits_Q\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)V_{x_j}z_{rx_i} + c(x)Vz_r(x)\right)dx + \int\limits_\gamma a(x)V\ z_r(x)dx = \lambda_r^2\int\limits_Q V(t,x)z_r(x)dx,$$

$\Gamma z_r(x) = 0,\quad x\in\gamma,\quad 0 < t < T,\quad r = 1,2,\ldots,(9)$

и образуют полную ортонормированную систему $z_r(x)$ в гильбертовом пространстве $H\ \ Q$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяют следующим условиям $\lambda_n \le \lambda_{n+1},\quad \forall n = 1,2,3,\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$.

$$V_n(t) = \langle V(t,x), z_n(x) \rangle = \int_Q V(t,x) z_n(x) dx$$ – коэффициенты Фурье.

Используя подход Лиувилля, легко показать, что коэффициенты Фурье являются решением линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t,s) V_n(s) ds + q_n(t), \quad n = 1,2,3,\dots, \tag{10}$$

где $$q_n(t) = \psi_{1n} \cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin\lambda_n (t-s) \; f_n[s,\bar{u}] + p_n[s,\bar{\vartheta}] \; ds. \tag{11}$$

$$K_n(t,s) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin\lambda_n (t-\tau) K(\tau,s) d\tau. \tag{12}$$

Решение интегрального уравнения (10) определяется [12] по формуле

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t, s\lambda) q_n(s) ds + q_n(t), \tag{13}$$

где $$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \tag{14}$$

резольвента ядра $K_n \; t,s \; \equiv K_{n,1} \; t,s$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\dots$, определяются по формулам

$$K_{n,i+1} \; t,s \; = \int_0^T K_n \; t,\eta \; K_{n,i} \; \eta,s \; d\eta, \; i = 1,2,3,\dots, \; K_{n,1} \; t,s \; = K_n \; t,s \; . \tag{15}$$

Исследуем сходимость ряда Неймана *(14)*. Согласно следующим оценкам

$$| \mathrm{K}_{n,i}(t,s) |^2 \le \frac{T^{2i-1} K_0^{i-1}}{(\lambda_n^2)^i} \int_0^T K^2(\tau,s) \, \mathrm{d}\tau, \quad i = 1,2,3,\dots. \tag{16}$$

Легко показать, что ряд Неймана *(15)* для значений параметра λ, удовлетворяющих условию

$$|\lambda| < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

абсолютно сходится при каждом $n = 1,2,3,\dots$. При этом радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n, и резольвента как сумма абсолютно сходящегося ряда является непрерывной функцией. Легко проверить, что имеют место следующие оценки

$$|R_n(t,s,\lambda)| \le \left(\int_0^T K^2 \; \tau,s \; d\tau \right)^{1/2} \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n - |\lambda| T \sqrt{K_0}};$$

$$\int_0^T |R_n(t,s,\lambda)|^2 ds \le \frac{K_0 T}{\lambda_n - |\lambda| T \sqrt{K_0}^{\;2}},$$

Заметим, что при выполнении условия

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}} \tag{17}$$

ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции при любом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots$.

Таким образом, решение краевой задачи *(2)-(4)* находим по формуле

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda) q_n(s)ds + q_n(t)\right) z_n(x). \tag{18}$$

Решение вида (18) преобразуем к следующему виду

$$V_n(\mathrm{t}) = \psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \mathrm{E}_n(t,\eta,\lambda)\left(f_n[\eta,\bar{u}] + p_n[\eta,\bar{\vartheta}]\right)d\eta, \tag{19}$$

где

$$\psi_n(t,\lambda) = \psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]; \tag{20}$$

$$\mathrm{E}_n(t,\eta,\lambda) = \begin{cases} \sin\lambda_n(t-\eta) + \lambda\int_\eta^T R_n(t,s\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0 \le \eta \le t, \\ \lambda\int_\eta^T R_n(t,s\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t \le \eta \le T. \end{cases} \tag{21}$$

***Лемма 1*:** Обобщенное решение краевой задачи *(2)-(4)*, определенное формулой *(18)*, является элементом гильбертова пространства $H(Q_T)$.

Доказательство: Непосредственным вычислением имеем следующее неравенство, которое доказывает справедливость леммы 1.

$$\int_0^T\int_Q V^2(t,x)dxdt = \int_0^T\int_Q\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\mathrm{z}_n(x)\right)^2 dxdt = \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t)dt \le$$

$$\le \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \mathrm{E}_n(t,\eta,\lambda)\left(f_n[\eta,\bar{u}] + p_n[\eta,\bar{\vartheta}]\right)d\eta\right\}^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \mathrm{E}_n(t,\eta,\lambda)\left(f_n[\eta,\bar{u}] + p_n[\eta,\bar{\vartheta}]\right)d\eta\right\}^2 dt \le$$

$$\le 6T\left[1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{\left(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0}\right)^2}\right]\left(\|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_n^2}\|\psi_2(x)\|_H^2 + \frac{2T}{\lambda_n^2}\left(\|f(t,x,\bar{u}(t,x))\|_H^2 + \|p(t,x,\bar{\vartheta}(t,x))\|_H^2\right)\right) < \infty.$$

Аналогичным образом можно показать, что $V_t(t,x) \in H(Q_T)$.

3.Условия оптимальности

Согласно методике вывода принципа максимума [3,9-10], приращение функционала *(1)* можно представить в виде

$$\Delta J[u] = J[u+\Delta u] - J[u] =$$
$$= -\int_0^T \Delta \prod[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\bar{u}(t,x),\bar{\vartheta}(t,x)]dt + \int_Q \left[\Delta V^2(T,x) + \Delta V_t^2(T,x)\right]dx, \quad (22)$$

где

$$\prod(t,x,V(t,x),\omega(t,x),\bar{u}(t,x),\bar{\vartheta}(t,x)) = \int_Q f[t,x,\bar{u}(t,x)]\,\omega(t,x)dx + \alpha\int_Q h^2[t,x,\bar{u}(t,x)]\,dx +$$
$$+\int_\gamma p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]\,\omega(t,x)dx + \beta\int_\gamma b^2[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]\,dx; \quad (23)$$

а функция $\omega(t,x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau \;\; x\in Q,\; 0\le t<T,$$
$$\omega(\mathrm{T},x) + 2[V_t(T,x) - \xi_2(x)] = 0, \quad \omega_t(\mathrm{T},x) - 2[V(T,x) - \xi_1(x)] = 0,$$
$$\Gamma\omega(t,x) = \sum_{i,j=1,n}^{n} a_{ij}(x)\omega_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i) + a(x)\omega(t,x) = 0, x\in\gamma, 0<t\le T. \quad (24)$$

и определяется по формуле

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T W_n(s,t,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t)\right)z_n(x)\,, \quad (25)$$

где $a_n(t) = -2\left\{[V_n'(T) - \xi_{2n}]\cos\lambda_n(\mathrm{T}\text{-}\,t) + \dfrac{1}{\lambda_n}[V_n(T) - \xi_{1n}]\sin\lambda_n(\mathrm{T}\text{-}\,t)\right\}$ (26)

$W_n(s,t,\lambda)$ резольвента ядра $B_n(s,t)$ имеет вид

$$W_n(s,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t), \quad B_{n,i+1}(s,t) = \int_0^T B_n(\eta,t)B_{n,i}(s,\eta)d\eta, \quad i=1,2,3,\dots, \quad (27)$$

и является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценкам

$$\left|B_{n,i}(s,t)\right|^2 \le \frac{T^{2i-1}K_0^{i-1}}{\lambda_n^2\; i}\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta, \quad i=1,2,3,\dots \quad (28)$$

$$\int_0^T\left|B_{n,i}(s,t)\right|^2 ds \le \frac{T^{2i-1}K_0^{i-1}}{\lambda_n^2\; i}\int_0^T\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta ds = \frac{T^{2i-1}K_0^{i}}{\lambda_n^2\; i}, \quad i=1,2,3,\dots \quad (29)$$

Исследуем функцию $\prod(t,x,V(t,x),\omega(t,x),\bar{u}(t,x),\bar{\vartheta}(t,x))$ на максимум. Учитывая, что область допустимых значений компонентов распределенного и граничного управлений является открытым множеством, находим, что оптимальные векторные управления $\bar{u}^0(t,x)$ и $\bar{\vartheta}^0(t,x)$ должны удовлетворять следующей системе равенств

$$\begin{cases} f_{u_i}[t,x,\bar{u}(t,x)]\omega(t,x) - 2\alpha h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_i}[t,x,\bar{u}(t,x)] = 0, & i=1,\dots,k, \quad x\in Q; \\ p_{\vartheta_j}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]\omega(t,x) - 2\beta b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_j}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)] = 0, & j=1,\dots m, \quad x\in\gamma; \end{cases} \quad (30)$$

и неравенств

$$\prod_{i=1}^{k} f_{u_i}(\cdot)\begin{vmatrix} \left(\dfrac{hh_{u_1}}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & \cdots & \left(\dfrac{hh_{u_1}}{f_{u_1}}\right)_{u_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\dfrac{hh_{u_k}}{f_{u_k}}\right)_{u_1} & \cdots & \left(\dfrac{hh_{u_k}}{f_{u_k}}\right)_{u_k} \end{vmatrix} > 0, \quad x\in Q;$$

$$\prod_{i=1}^{m} p_{\vartheta_i}(\cdot)\begin{pmatrix} \left(\dfrac{bb_{\vartheta_1}}{p_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_1} & \cdots & \left(\dfrac{bb_{\vartheta_m}}{p_{\vartheta_m}}\right)_{\vartheta_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\dfrac{bb_{\vartheta_m}}{p_{\vartheta_m}}\right)_{\vartheta_1} & \cdots & \left(\dfrac{bb_{\vartheta_m}}{p_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_m} \end{pmatrix} > 0, \quad x\in \gamma, \tag{31}$$

которые называются *условиями оптимальности* для функций управлений $\bar{u}(t,x), x\in Q \quad u \quad \bar{\vartheta}(t,x), x\in \gamma$.

Отметим, что рассматриваемая задача нелинейной оптимизации обладает тем специфическим свойством, что условия оптимальности вида равенства (30) обладают свойством равных отношений

$$\omega(t,x)=\frac{2\alpha h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_1}[t,x,\bar{u}(t,x)]}{f_{u_1}[t,x,\bar{u}(t,x)]}=\ldots=\frac{2\alpha h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_k}[t,x,\bar{u}(t,x)]}{f_{u_k}[t,x,\bar{u}(t,x)]}, x\in Q; \tag{32}$$

$$\omega(t,x)=\frac{2\beta b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_1}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}{p_{\vartheta_1}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}=\ldots=\frac{2\beta b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_m}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}{p_{\vartheta_m}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}, x\in \gamma. \tag{33}$$

Условия (30) и (31) ограничивают класс функций $f[t,x,\bar{u}(t,x)]$ *и* $p[t,x,\bar{\vartheta}\ \ t,x\ ]$, т.е. задача нелинейной оптимизации может иметь решение только для таких функций $f[t,x,\bar{u}(t,x)]$ *и* $p[t,x,\bar{\vartheta}\ \ t,x\ ]$, для которых выполняется система равенств (30) и неравенств (31). Будем считать, что это условие выполнено.

4. Система нелинейных интегральных уравнений оптимального управления

Согласно условиям оптимальности, имеем систему равенств

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-E_n^*\ \ T-t,\lambda\ \ h_n+\int_0^T E_n^*\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \ \ f_n[\tau,\bar{u}]+p_n[\tau,\bar{\vartheta}]\ \ d\tau\right\}z_n(x)=$$

$$=\frac{2\alpha h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_1}[t,x,\bar{u}(t,x)]}{f_{u_1}[t,x,\bar{u}(t,x)]}=\ldots=\frac{2\alpha h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_n}[t,x,\bar{u}(t,x)]}{f_{u_n}[t,x,\bar{u}(t,x)]},\quad x\in Q;$$

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-E_n^*\ \ T-t,\lambda\ \ h_n+\int_0^T E_n^*\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \ \ f_n[\tau,\bar{u}]+p_n[\tau,\bar{\vartheta}]\ \ d\tau\right\}z_n(x)=$$

$$=\frac{2\beta b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_1}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}{p_{\vartheta_1}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}=\ldots=\frac{2\beta b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_n}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}{p_{\vartheta_n}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]},\quad x\in \gamma;$$

Отсюда имеем следующие нелинейные интегральные уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E_n^*\left(T-t,\lambda\right)h_n-\int_0^T E_n^*\left(T-t,\lambda\right)G_n\left(T-\tau,\lambda\right)f_n[\tau,\bar{u}(\tau,\xi)z_n(\xi)]d\xi\right\}z_n(x)=$$
$$=\frac{\alpha h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_1}[t,x,\bar{u}(t,x)]}{f_{u_1}[t,x,\bar{u}(t,x)]},\quad x\in Q; \tag{34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E_n^*\left(T-t,\lambda\right)h_n-\int_0^T E_n^*\left(T-t,\lambda\right)G_n\left(T-\tau,\lambda\right)p_n[\tau,\bar{\vartheta}(\tau,\xi)]z_n(\xi)d\tau\right\}z_n(x)=$$
$$=\frac{\beta b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_1}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}{p_{\vartheta_1}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]},\quad x\in\gamma; \tag{35}$$

Рассмотрим вопрос разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений (34) и (35). Введем обозначения

$$\alpha\frac{h[t,x,\bar{u}(t,x)]h_{u_i}[t,x,\bar{u}(t,x)]}{f_{u_i}[t,x,\bar{u}(t,x)]}=\theta_1(t,x),\quad x\in Q,\quad i=1,...,k; \tag{36}$$

$$\beta\frac{b[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]b_{\vartheta_i}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}{p_{\vartheta_i}[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]}=\theta_2(t,x),\quad x\in\gamma,\quad i=1,...,m; \tag{37}$$

Из (36), согласно условиям оптимальности (31) и теореме о неявных функциях, компоненты [12] оптимального векторного распределенного управления однозначно определяются по формулам

$$\begin{aligned} &u_1\left(t,x\right)=\varphi_1(t,x,\theta_1(t,x),\alpha),\quad x\in Q,\\ &\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ &u_k\left(t,x\right)=\varphi_k(t,x,\theta_1(t,x),\alpha),\quad x\in Q, \end{aligned} \tag{38}$$

или векторной форме $\bar{u}(t,x)=\bar{\varphi}(t,x,\theta_1(t,x),\alpha)=\left(\varphi_1(t,x,\theta_1(t,x),\alpha),...,\varphi_k(t,x,\theta_1(t,x),\alpha)\right)$.

Аналогичным образом из системы (38) находим, что

$$\begin{aligned} &\vartheta_1\left(t,x\right)=\upsilon_1(t,x,\theta_2(t,x),\beta),\quad x\in\gamma,\\ &\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ &\vartheta_m\left(t,x\right)=\upsilon_m(t,x,\theta_2(t,x),\beta),\quad x\in\gamma, \end{aligned} \tag{39}$$

или в векторной форме $\bar{\vartheta}\left(t,x\right)=\bar{\upsilon}(t,x,\theta_2(t,x),\beta)=\left(\upsilon_1(t,x,\theta_2(t,x),\beta),...,\upsilon_m(t,x,\theta_2(t,x),\beta)\right)$,

где $\upsilon_i(t,x,\theta_2(t,x),\beta),\quad i=1,...,m,$ известные функции.

Согласно (36)-(39) имеем следующие уравнения

$$\theta_1(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n^*\left(T-t,\lambda\right)h_n-\int_0^T E_n^*\left(T-t,\lambda\right)G_n\left(T-\tau,\lambda\right)\times\right. \tag{40}$$
$$\left.\times\left[\int_Q f[\tau,\xi,\bar{\varphi}(\tau,\theta_1(t,\xi),\alpha)]z_n(\xi)]d\xi+\int_\gamma p[\tau,\xi,\bar{\upsilon}(\tau,\xi,\theta_2(t,\xi),\beta)]z_n(\xi)d\xi\right]d\tau\right\}z_n(x),\quad x\in Q,$$

$$\theta_2(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E_n^*\left(T-t,\lambda\right)h_n-\int_0^T E_n^*\left(T-t,\lambda\right)G_n\left(T-\tau,\lambda\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\int_Q f[\tau,\xi,\bar{\varphi}(\tau,\theta_1(t,\xi),\alpha)]z_n(\xi)]d\xi+\int_\gamma p[\tau,\xi,\bar{\upsilon}(\tau,\xi,\theta_2(t,\xi),\beta)]z_n(\xi)d\xi\right]d\tau\right\}z_n(x),\quad x\in\gamma, \tag{41}$$

где $\bar{\varphi}(t,x,\theta_1(t,x),\alpha)=\left(\varphi_1(t,x,\theta_1(t,x),\alpha),...,\varphi_k(t,x,\theta_1(t,x),\alpha)\right)$,

$\bar{\upsilon}(t,x,\theta_2(t,x),\beta)=\left(\upsilon_1(t,x,\theta_2(t,x),\beta),...,\upsilon_m(t,x,\theta_2(t,x),\beta)\right)$.

Сравнивая разложения (40) и (41) заметим, что

$$\theta_{1n}(t)=E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ h_n-\int_0^T E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \left[\int_Q f[\tau,\xi,\bar{\varphi}(\tau,\xi,\theta_1(t,\xi),\alpha)]z_n(\xi)]d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_\gamma p[\tau,\xi,\bar{\upsilon}(\tau,\xi,\theta_2(t,\xi),\beta)]z_n(\xi)d\xi\right]d\tau=\theta_{2n}(t)=\theta_n(t),$$

Далее введем новые функции

$$\theta(t,x)=\begin{cases}\theta_1(t,x), & x\in Q,\\ \theta_2(t,x), & x\in\gamma,\end{cases}\quad F(t,x,\theta(t,x))=\begin{cases}f[t,x,\bar{\varphi}(t,x,\theta_1(t,x),\alpha)], & x\in Q,\\ p[t,x,\bar{\upsilon}(t,x,\theta_2(t,x),\alpha)], & x\in\gamma,\end{cases}\tag{42}$$

и будем пользоваться разложением

$$\theta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)z_n(x),\tag{43}$$

где

$$\theta_n(t)=E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ h_n-\int_0^T E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \left[\int_Q f[\tau,\xi,\bar{\varphi}(\tau,\xi,\theta_1(t,\xi),\alpha)]z_n(\xi)]d\xi+\right.$$

$$+\int_\gamma p[\tau,\xi,\bar{\upsilon}(\tau,\xi,\theta_2(t,\xi),\beta)]z_n(\xi)d\tau=E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ h_n-$$

$$-\int_0^T E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \int_{\bar{Q}}F[\tau,\xi,\theta(t,\xi)z_n(\xi)]d\xi d\tau,\tag{44}$$

$$\theta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ h_n z_n(x)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \int_{\bar{Q}}F[\tau,\xi,\theta(t,\xi)]z_n(\xi)]d\xi d\tau z_n(x),\quad \bar{Q}=Q\cup\gamma.\tag{45}$$

Введем обозначения

$$\aleph(t,\lambda,x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ h_n z_n(x);\tag{46}$$

$$\Im(t,x,\tau,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}E_n^{*}\ \ T-t,\lambda\ \ G_n\ \ T-\tau,\lambda\ \ z_n(\xi)z_n(x),\tag{47}$$

и (45) перепишем в виде

$$\theta(t,x)=\int_0^T\int_Q\Im(t,x,\tau,\xi)F[\tau,\xi,\theta(t,\xi)]d\xi d\tau+\aleph(t,\lambda,x).\tag{48}$$

Непосредственными вычислениями доказаны следующие леммы.

Лемма 2. Функция $\aleph(t,\lambda,x)$ является элементом пространства $H(\bar{Q}_T)$.

Лемма 3. Оператор

$$F_0(\theta(t,x))=\int_0^T\int_{\bar{Q}_T}\Im(t,x,\tau,\xi)F[\tau,\xi,\theta(t,\xi)]d\xi d\tau,\tag{49}$$

отображает пространство $H(\bar{Q}_T)$ в себя.

Лемма 4. Оператор $F_0[\theta(t,x)]$ является сжимающим оператором.

Поскольку в пространстве $H(\bar{Q}_T)$ метрика определяется равенством

$$\rho^2\left(\bar{\theta}(t,x),\tilde{\theta}(t,x)\right)=\int_0^T\int_{\bar{Q}}\left|\bar{\theta}(t,x)-\tilde{\theta}(t,x)\right|^2dxdt=$$
$$=\int_0^T\left\{\int_Q\left|\bar{\theta}(t,x)-\tilde{\theta}(t,x)\right|^2dx+\int_\gamma\left|\bar{\theta}(t,x)-\tilde{\theta}(t,x)\right|^2dx\right\}dt, \qquad (50)$$

а норма элемента $\theta(t,x)$ определяется по формуле

$$\|\theta(t,x)\|^2_{H(Q_T)}=\int_0^T\int_{\bar{Q}}|\theta(t,x)|^2dxdt=\int_0^T\left\{\int_Q|\theta(t,x)|^2dx+\int_\gamma|\theta(t,x)|^2dx\right\}dt. \qquad (51)$$

Непосредственными вычислениями имеем неравенство

$$\rho^2\left(F_0[\bar{\theta}(t,x)],F_0[\tilde{\theta}(t,x)]\right)\le 2E_0^2G_0^2T^2\left(\left\|f[t,x,\bar{\varphi}[t,x,\bar{\theta}_1(t,x),\alpha]-f[t,x,\tilde{\varphi}t,x,\tilde{\theta}_1(t,x),\alpha]\right\|^2_{H(Q_T)}+\right.$$
$$\left.+\left\|p[t,x,\bar{\upsilon}[t,x,\bar{\theta}_2(t,x),\beta]-p[t,x,\tilde{\upsilon}[t,x,\tilde{\theta}_2(t,x),\beta]\right\|^2_{H(\gamma_T)}\right); \qquad (52)$$

где E – нулевая и G – положительная постоянные. Далее с учетом соотношений непосредственными вычислениями имеем соотношения

$$\left\|f[t,x,\bar{\varphi}[t,x,\bar{\theta}_1(t,x),\alpha]]-f[t,x,\tilde{\varphi}[t,x,\tilde{\theta}_1(t,x),\alpha]]\right\|^2_{H(Q_T)}+$$
$$+\left\|p[t,x,\bar{\upsilon}[t,x,\bar{\theta}_2(t,x),\beta]]-p[t,x,\tilde{\upsilon}[t,x,\tilde{\theta}_2(t,x),\beta]]\right\|^2_{H(Q_T)}\le$$
$$\le f_0^2m\,\varphi_0^2(\alpha)\left\|\bar{\theta}_1(t,x)-\tilde{\theta}_1(t,x)\right\|^2_{H(Q_T)}+p_0^2r\,\upsilon_0^2(\beta)\left\|\bar{\theta}_2(t,x)-\tilde{\theta}_2(t,x)\right\|^2_{H(\gamma_T)}\le \qquad (53)$$
$$\le C^2(\alpha,\beta)\left\|\bar{\theta}(t,x)-\tilde{\theta}(t,x)\right\|^2_{H(\bar{Q}_T)}=C^2(\alpha,\beta)\rho^2\left(\bar{\theta}(t,x),\tilde{\theta}(t,x)\right).$$

где $C^2(\alpha,\beta)=\max\left\{f_0^2m\,\varphi_0^2(\alpha),\,p_0^2r\,\upsilon_0^2(\beta)\right\}$, $\sum_{k=1}^m\varphi_{k0}^2(\alpha)=\varphi_0^2(\alpha)$, $\sum_{k=1}^r\upsilon_{k0}^2(\alpha)=\upsilon_0^2(\alpha)$.

Имея в виду соотношения

$$\left\|\bar{\theta}(t,x)-\tilde{\theta}(t,x)\right\|^2_{H(Q_T)}=\int_0^T\int_Q\left|\bar{\theta}(t,x)-\tilde{\theta}(t,x)\right|^2dxdt=$$
$$=\int_0^T\left\{\int_Q\left|\bar{\theta}_1(t,x)-\tilde{\theta}_1(t,x)\right|^2dx+\int_\gamma\left|\bar{\theta}_2(t,x)-\tilde{\theta}_2(t,x)\right|^2dx\right\}dt=$$
$$=\left\|\bar{\theta}_1(t,x)-\tilde{\theta}_1(t,x)\right\|^2_{H(Q_T)}+\left\|\bar{\theta}_1(t,x)-\tilde{\theta}_1(t,x)\right\|^2_{H(\gamma_T)}.$$

Имеем неравенство

$$\rho\left(F_0[\bar{\theta}(t,x)],F_0[\tilde{\theta}(t,x)]\right)\le C(\alpha,\beta)\rho\left(\bar{\theta}(t,x),\tilde{\theta}(t,x)\right),\ C(\alpha,\beta)=\sqrt{\max\left\{f_0^2m\,\varphi_0^2(\alpha),\,p_0^2r\,\upsilon_0^2(\beta)\right\}},$$

при $C(\alpha,\beta)<1$ следует, что оператор $F_0[\theta(t,x)]$ является сжимающим. Тогда операторное уравнение

$$\theta(t,x)=F_0[\theta(t,x)]$$

в пространстве $H(Q_T)$ имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений

$$\theta_n(t,x)=F_0[\theta_{n-1}(t,x)],\quad n=1,2,3,...$$

Как известно [12], предельный элемент $\theta^0(t,x)=\lim_{n\to\infty}\theta_n(t,x)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\theta(t,x)-\theta_n(t,x)\right\|_{H(\bar{Q}_T)}\le\frac{C^m(\alpha,\beta)}{1-C(\alpha,\beta)}\left\|F_0(\theta_0(t,x))-(\theta_0(t,x))\right\|_{H(\bar{Q}_T)}$$

Далее найденную функцию

$$\theta^0(t,x)=\begin{cases}\theta_1^0(t,x), & x\in Q,\\ \theta_2^0(t,x), & x\in\gamma,\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}\theta_n(t)=\theta^0(t,x).$$

подставляем в (38) и (40), находим векторное распределенное управление по формулам

$$\bar{u}^0(t,x)=\left(u_1(t,x),...,u_k(t,x)\right)\ \text{где}\ u_i^0(t,x)=\varphi_i[t,x,\theta_1^0(t,x),\alpha],\quad i=1,...,k,\quad x\in Q,$$

и граничное векторное управление

$$\vartheta_0(t,x)=\left(\vartheta_1(t,x),...,\vartheta_m(t,x)\right),\ \text{где}\ \vartheta_i^0(t,x)=\upsilon_i[t,x,\theta_2^0(t,x),\beta],\quad i=1,...,m,\quad x\in\gamma.$$

Используя найденные оптимальные векторные управления, находим оптимальный процесс

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)z_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)\cos\lambda_n s ds\right]+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T E_n\left(t,\eta,\lambda\right)\left(f_n[\eta,\bar{u}^0(\eta,..)]+p_n[\eta,\bar{\vartheta}^0(\eta,..)]\right)d\eta\right\}z_n(x).$$

$$f_n[\eta,\bar{u}^0(\eta,\xi)]=\int_Q f_n[\eta,\bar{u}^0(\eta,\xi)]z_n(\xi)d\xi=\int_Q f_n[\eta,u_1^0(\eta,\xi),...,u_k^0(\eta,\xi)]z_n(\xi)d\xi,$$

$$p_n[\eta,\bar{\vartheta}^0(\eta,\xi)]=\int_\gamma p_n[\eta,\bar{\vartheta}^0(\eta,\xi)]z_n(\xi)d\xi=\int_\gamma p_n[\eta,\vartheta_1^0(\eta,\xi),...,\vartheta_m^0(\eta,\xi)]z_n(\xi)d\xi,$$

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле

$$J[\bar{u}^0(t,x),\bar{\vartheta}^0(t,x)]=\int_Q\left([V^0(T,x)-\xi_1(x)]^2+[V_t^0(T,x)-\xi_2(x)]^2\right)dx+$$

$$+\int_0^T\left[\alpha\int_Q h^2[t,x,\bar{u}^0(t,x)]dx+\beta\int_\gamma b^2[t,x,\bar{\vartheta}^0(t,x)]dx\right]dt,\alpha,\beta>0,$$

Тройка $\left(\bar{u}^0(t,x),\bar{\vartheta}^0(t,x),V^0(t,x),J[\bar{u}^0(t,x),\bar{\vartheta}^0(t,x)]\right)$ определяет полное решение задачи нелинейной оптимизации.

Заключение

Отметим, что система равных отношений существенно упрощает процедуру построения оптимального векторного управления. Это обстоятельство является новизной в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, и оно имеет место независимо от природы управляемого объекта, т.е. обладает свойством универсальности.

Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации с векторными управлениями является конструктивным и может быть полезным при проведении численных расчетов, а также при разработке новых методов решения задач нелинейной оптимизации, описываемых функциональными уравнениями более сложной природы.

Литература

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / Пер. с англ. // Ред. П.И.Кузнецов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

2. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр.МИАН. – 1961. – Т. 61. – С. 3–158.

3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 500 с.

4. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир,1972. – 414 с.

5. Sachs E.W., Strauss A.K. Efficient solution of partial integro-differential equation in finance // Appl.Numer. Math. – 2008. Vol. 58, no. 11. – P. 1687–1703.

6. Kowalewski A. Optimal control of an infinite order hyperbolic system with multiple time-varying lags // Automatyka. – 2011. – T. 15. – P. 53–65.

7. Thorwe J., Bhalekar S. Solving partial integro-differential equations using Laplace transformmethod // American J. Comput. Appl. Math. – 2012. Vol. 2 (3). – P. 101–104.

8. Khurshudyan As. Zh. On optimal boundary and distributed control of partial integro-differentialequations // Arch. Contol. Sci. – 2014. Vol. 24 (60), no. 1. – P. 5–25.

9. Kerimbekov A.K. On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations // Proc. World Congress on Engineering. London. – 2011. Vol. 1. – P. 270–275.

10. Kerimbekov A.K. On the solvability of a nonlinear optimal control problem for the thermal processes described by Fredholm integro-differential equations // Current Trends in Analysis and Its Applications: Proc. of the 9th ISAAC Congress (Krakyw 2013) / eds. V.V.Mityushev, M.V.Ruzhansky. London: Springer. – 2015. – P. 803–822. (A Series of Trends in Mathematics.)

11. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. – М.: Мир, 1975. – 158 с.

12. Краснов М.В. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 303 с.