АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ И ПРОЦЕССАМИ

УДК 62-50

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОЦЕНКИ ГРУБОСТИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Р.О. Оморов
Институт машиноведения и автоматики НАН КР

В статье на базе метода топологической грубости рассматриваются вопросы грубости вырожденных динамических систем и оценки грубости высокого порядка. Метод топологической грубости динамических систем, который основан на понятии грубости по Андронову-Понтрягину, предполагает исследование грубости нелинейных систем вблизи особых траекторий в фазовом пространстве, в особенности вблизи особых точек. При традиционном рассмотрении грубости в особых точках матрицы линейной части являются невырожденными, и задача вычисления показателя грубости в виде числа обусловленности матрицы приведения к диагональному (квазидиагональному) виду не представляет сложности. Но на практике возможны случаи вырожденных матриц линейной части, для которых предлагается использование процедур псевдообращения матриц. Также для существенно нелинейных систем вводятся показатели грубости высокого порядка на основе процедур псевдообращения матриц.

Ключевые слова: вырожденные динамические системы, топологическая грубость, особые точки и траектории, матрицы линейной части, число обусловленности матрицы, процедуры псевдообращения матриц, показатели грубости высокого порядка.

Введение. Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1-3]. В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото, или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε-близость исходной и возмущенного гомеоморфизма [1, 2, 4]. В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [6 - 13]. В данной работе рассматриваются основные положения и развитие метода топологической грубости к случаям вырожденных динамических систем, а также введения показателей грубости высокого порядка для существенно нелинейных систем.

Основные положения метода топологической грубости. В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций систем были поставлены еще в начале становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре.

Термин «бифуркация» впервые введен А. Пуанкаре и означает дословно «раздвоение», или, другими словами, от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения.

Грубость динамических систем при этом определяется как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии бифуркация употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2], и сформулированы качественные критерии грубости.

В многомерной постановке рассматривается динамическая система n-го порядка

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \qquad (1)$$

где $\mathbf{z}(t) \in R^n$ – вектор фазовых координат; $\mathbf{F}$ $-n$-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову-Понтрягину в некоторой области G, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}), \qquad (2)$$

являются ε-тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε-тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n-мерном фазовом пространстве при $D \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$:

$$\exists\ \varepsilon, \delta > 0:$$

если $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})\| < \delta$, $|\mathbf{d}\mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{z}}) / \mathbf{d}\tilde{\mathbf{z}}_j| < \delta$, $i, j = \overline{1, n}$, то $|\|\mathbf{z}\| - \|\tilde{\mathbf{z}}\|| < \varepsilon$,

или

$$(\tilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \qquad (3)$$

иначе разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε-тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями, близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типов:

- особых точек (положений равновесия);
- особых линий (сепаратрис);
- замкнутых (периодических) траекторий;
- притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [5] на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину предложены основы метода топологической грубости на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ – матрицы $\mathbf{M}$ – нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства, введенных в [5], определяется следующей теоремой, доказанной в [5].

Теорема. Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки $(\mathbf{z}_0)$ была максимально грубой, а в окрестности негиперболической – минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:

$$\mathbf{M}^* = \operatorname{argmin} C\{\mathbf{M}\},$$

где $\mathbf{M}$ – матрица приведения матрицы линейной части $\mathbf{A}$ системы (1), в особой точке $(\mathbf{z}_0)$ к диагональному (квазидиагональному) базису; $C\{\mathbf{M}\}$ – число обусловленности матрицы $\mathbf{M}$.

Теорема сформулирована для общего случая системы (1), когда особая точка $(\mathbf{z}_0)$, соответствующая уравнению $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0$, не выроždена, или иначе, матрица линейной части $\mathbf{A}$ не вырождена. В случае вырожденной в особой точке динамической системы вычисление

$C\{\mathbf{M}\}$вызывает затруднения при диагонализации (квазидиагонализации) базиса матрицы $\mathbf{A}$ в силу того, что матрицы, обратной к матрице **M,** не существует. Но в этом случае предлагается воспользоваться процедурой псевдообращения матриц [14] и вычислять $C\{\mathbf{M}\}$ по базовому соотношению для числа обусловленности [15]:

$$C\{\mathbf{M}\}=\|\mathbf{M}\|\cdot\|\mathbf{M}^*\|, \tag{4}$$

где $\|\mathbf{M}\|,\|\mathbf{M}^*\|$ – соответственно какие-либо (обычно спектральные) нормы матриц $\mathbf{M}$ и псевдообратной матрицы $\mathbf{M}^*$.

Возможности псевдообращения матриц позволяют сравнивать по грубости близкие по топологическим структурам системы, поскольку, как установлено в работах [5, 12], множества грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества, для которых показатель грубости $C\{\mathbf{M}\}$ может принимать непрерывные значения от 1 до ∞. В этом случае предполагается сравнение систем по грубости, вводя показатели грубости высокого порядка, а именно 2-го, 3-го и т.д. n–го порядка, пользуясь процедурой псевдообращения и формулой (4) для матриц приближения 2-го, 3-го и т.д. n-го порядка в особых точках фазового пространства, которые соответствуют порядкам разложения в классический ряд Тейлора.

Заключение. Метод топологической грубости, разработанный автором на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем показаны на примерах многих динамических и синергетических систем[16] при невырожденных особых точках и траекториях фазового пространства. В данной работе предложен подход к исследованиям вырожденных случаев систем, когда матрица линейной части в особых точках вырождена. В этом случае предлагается использование процедур псевдообращения матриц и вычисление числа обусловленности через нормы матриц. Псевдообращение матриц предлагается использовать и в случае сравнения по грубости близких динамических систем, вычисляя числа обусловленности высокого порядка.

Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. – 1937. –Т.14. №5. – С. 247–250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). – М.: Наука, 1985. – С. 59–93.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. – Т. 32. – М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3–31.
4. Peixoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. – Vol. 69. No. 1. – P. 199–222.
5. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36–45; Omorov R.O. Maximal coarseness of dinamical systems // Automation and Remote Control. – 1992. – V. 52. No 8 pt 1. – P. 1061–1068.
6. Оморов Р.О. Оценка грубости управляемых динамических систем. // Изв. вузов. Электромеханика. – 1990. №7. – С. 81–87.
7. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв.вузов. Электромеханика. –1991. №1. – С. 78–85.
8. Оморов Р. О. Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах // Синтез алгоритмов стабилизации систем: Межведомств. сб.: Вып.8. Таганрог. 1992. – С. 128–134.

9. Оморов Р. О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Дисс… докт. техн. наук. –СПб.: СПб ИТМО, 1992. –188 с.

10. Оморов Р.О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР. – 2009. № 3. – С. 144–148.

11. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. – Бишкек: Илим, 2019. – 287 с.

12. Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2020. – Т. 20. № 2. – С. 257–262.

13. Оморов Р.О. Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. – 2012. № 2. – С. 5–12; Omorov R.O. Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. – 2012. V. 44. – P. 61–70.

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

15. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 454 с.

16. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с.