

УДК: 519.711.2: 621.311.212

М.Т. Медетбеков, [kambar@list.ru](mailto:kambar@list.ru)

## СКОРОСТЬ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ВЫТЕКАЮЩЕЙ ВОДЫ ПРИ ОБРАЗОВАВШЕЙСЯ ВИХРЕВОЙ ВОРОНКЕ

Во многих цилиндрических сосудах, если имеется на дне отверстие, при вытекании воды через отверстие на дне сосуда может образоваться вихревая воронка. Образование вихревых воронок является серьезной проблемой, они приводят к существенному снижению пропускной способности сливных отверстий и препятствуют нормальному функционированию этих устройств. Особенно если устанавливается такое устройство гидротурбины, как микро-ГЭС, то такое снижение скорости потока приводит к снижению мощности гидростанции. Поэтому появился вопрос изучения потенциальной возможности вихревого потока и его перспективы. В связи с этим был сделан схематический расчет для вывода рабочего уравнения скорости вихревого потока и построена зависимость уменьшения скорости воды в воронке при увеличении расстояния радиуса  $r$  вращения до центра вращения.

**Ключевые слова:** вихрь, воронка, гидротурбина, микро-ГЭС, скорость, поток.

### Введение

В любом цилиндрическом сосуде при вытекании воды через отверстие на дне сосуда может образоваться вихревая воронка (см. на пр. [1,2]). Это наблюдается во многих хозяйственных бытовых, промышленных устройствах и в гидротехнических сооружениях, в которых происходит вытекание жидкости через сливные отверстия, и образование вихревых воронок является серьезной проблемой. Эта проблема приводит к существенному снижению пропускной способности сливных отверстий и препятствует нормальному функционированию устройств (способствует проникновению воздуха в трубопроводы и приводит к изменению характеристик потока и т.д.) [3,4]. Особенно если устанавливается гидротурбина микро-ГЭС, то такое снижение скорости потока приводит к снижению мощности гидростанции. Поэтому появился вопрос изучения потенциальной возможности вихревого потока и его перспективы.

### Скорость вытекающей воды в образовавшихся вихревых воронках

При вытекании воды из сосуда уровень воды в нем постоянно понижается, требуется постоянное пополнение в зависимости от объема сосуда и диаметра сливного отверстия. Управляемый темп пополнения позволяет не только компенсировать потерю воды в сосуде при сливе через сливное отверстие и поддерживать постоянство уровня, но и наращивать его [5-10].

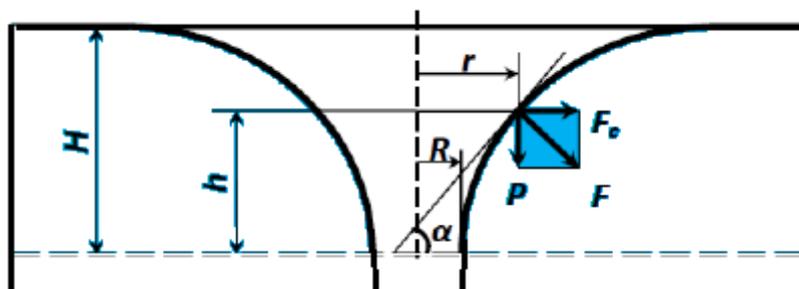


Рисунок 1– Схематический рисунок образующейся вихревой воронки и его обозначения

Прежде чем решить скорость вращающейся жидкости в воронке, мы будем наблюдать за стационарным состоянием процесса, при котором вращение жидкости в воронке рассматривается в горизонтальной плоскости без изменения энергии. Для этого обращаемся к схеме (рис.1), которую наметили геометрическими обозначениями. От радиуса кривизны в воронке и к воронке образования проводим касательную линию под углом  $\alpha$ , перпендикулярно к касательной проводим линии, показывающие результирующие силы  $F$ . Результирующая сила должна быть перпендикулярна к касательной линии поверхности

воронки, так как в противном случае рассматриваемый малый объем воды  $dV$  начнет смешиваться выше или ниже по поверхности воронки. Мы же рассматриваем стационарный процесс, при котором вращение воды в воронке происходит горизонтально плоскости без изменения энергии. Касательная линия проводится под углом  $\alpha$  на поверхности воронки  $h(r)$ , испытывает одновременно воздействие двух сил: силы тяжести воды  $P$  и центробежной силы  $F_c$ , возникающей из-за вращения воды в воронке (рис. 1).

$$\text{Центробежная сила равна } F_c = \frac{m\omega^2}{r}. \quad (1)$$

$$\text{Сила тяжести } P = mg. \quad (2)$$

Угол наклона  $\alpha$  касательной линии, определяющий величину производной искомой, образующей линии поверхности воронки  $h(r)$ , определяется отношением центробежной силы к силе тяжести (рис.1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dh}{dr} = \frac{F_c}{P} = \frac{dV\rho v^2}{r(dV\rho g)} = \frac{v^2}{rg}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $v$  – скорость,  $g$  – ускорение свободного падения,  $r$  – радиус вращения,  $\alpha$  – угол наклона касательной линии.

Стационарный характер процесса, который происходит по горизонтальной линии, дает нам возможность применить уравнение Бернулли для определения скорости [3]:

$$p + \rho gh + \frac{\rho V^2}{2} = C = \text{const}. \quad (4)$$

Константа  $C$  определяется из условия, что на бесконечном расстоянии от воронки скорость  $v$  равна нулю, а высота  $h$  равна невозмущенному уровню  $H$  (давление воздуха над водой  $p$  считаем везде одинаковым)

$$C = \rho gH + p. \quad (5)$$

С другой стороны, когда давление воздуха над водой  $p$  считаем везде одинаковым, тогда можно записать уравнение Бернулли в следующем виде

$$\rho gH + p = p + \rho gh + \frac{\rho V^2}{2}.$$

Преобразуя, получим следующий вид уравнения

$$\begin{aligned} \rho gH - \rho gh &= \frac{\rho V^2}{2} \\ (H - h) &= \frac{V^2}{2g}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$v^2 = 2g(H - h). \quad (6)$$

Уравнение (3) с учетом (5) и (6) приобретает вид

$$\frac{dh}{dr} = \frac{2(H - h)}{r}, \quad \frac{dh}{H - h} = 2 \frac{dr}{r}. \quad (7)$$

После интегрирования уравнения (5) получаем

$$H - h = \frac{Q}{r^2}, \quad \text{где } Q = HR^2. \quad (8)$$

Здесь  $Q$  – постоянная интегрирования, определяемая из условия, что  $h$  равно нулю при  $r = R$ . Окончательно форма идеальной воронки определяется уравнением:

$$h = H - \frac{HR^2}{r^2} = H \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (9)$$

Одновременно из (4) и (6) получаем зависимость величины скорости на поверхности воронки от расстояния до центра

$$v = v_0 \frac{R}{r}, \quad v_0 = \sqrt{2gH}. \quad (10)$$

Чтобы представить себе наглядно форму огибающей идеальной воронки, приведем результат расчета для одного частного случая, допустим:  $H=1$ ,  $r=0,1$  изменяется  $r$  (рис. 2).

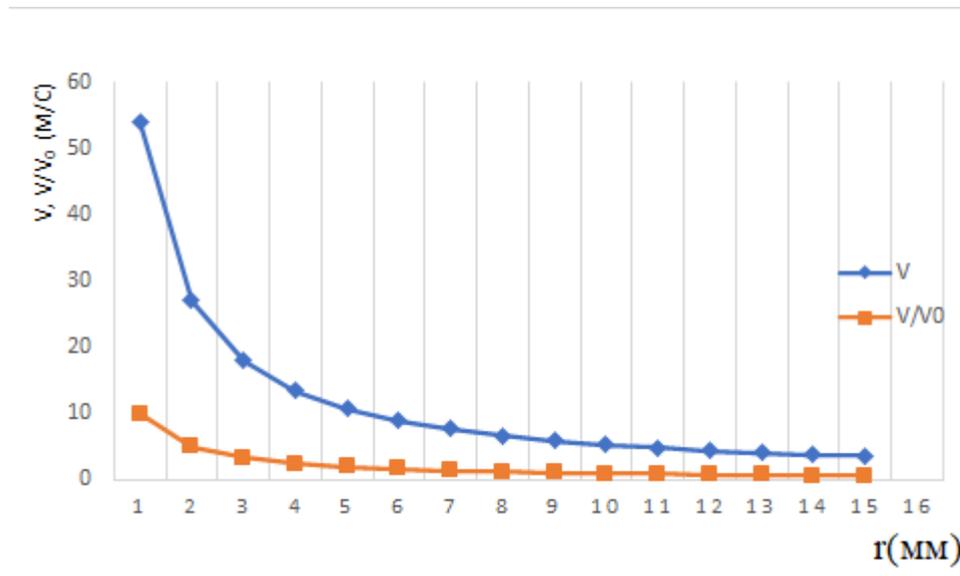


Рисунок 2 – На рисунке построен график относительного уменьшения скорости воды в воронке при увеличении расстояния радиуса  $r$  до центра вращения

На этом же рисунке построен график относительного уменьшения скорости воды в воронке при увеличении расстояния до центра вращения. Дело в том, что центробежная сила имеет горизонтальное направление и перпендикулярна силе тяжести, в результате чего изменение давления по вертикали определяется только величиной водяного столба. Из-за возрастающего влияния центробежной силы по мере приближения к центру вращения поверхности одинаковых давлений все плотнее приближаются друг к другу, что говорит о соответствующем увеличении градиента давления в радиальном направлении. Следовательно, воронка «противостоит», т.е. производит трения, тем самым создает давление окружающей жидкости, используя относительно малый объем воды (расстояние между поверхностями равных давлений становится все меньше по мере приближения к центру).

Что касается скорости воды на разных глубинах, она определяется формой поверхностей одинаковых давлений. Так как на больших расстояниях от воронки скорость движения воды пренебрежимо мала (и на поверхности, и под водой). Таким образом, скорость воды зависит только от расстояния до центра вращения и не зависит

от глубины, а выражение (10) справедливо как для скорости на поверхности воронки, так и для скорости воды на любой глубине.

Попробуем теперь оценить потенциальную энергию воды образовавшихся вихревых воронок. Будем исходить из того, что для создания «углубления» в виде воронки требуется «раздвинуть» воду по сторонам, преодолевая ее давление. Следовательно, для расчета нам необходимо использовать «горизонтальные» элементарные объемы воронки (при изменении  $h$ ), каждый из которых следует умножить на давление воды вдали от воронки, соответствующее этому уровню  $h$ , а затем суммировать все элементарные слагаемые (рис. 6). Сначала, используя формулу (7), выразим квадрат радиуса огибающей поверхности воронки через высоту

$$h = H - \frac{HR^2}{r^2} = H \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (11),$$

Преобразуя (7), выразим через квадрат радиуса

$$r^2 = R^2 \frac{H}{H - h} \quad (12)$$

Соответственно, используя (9), получаем выражение для элементарного объема воронки (рис. 6):

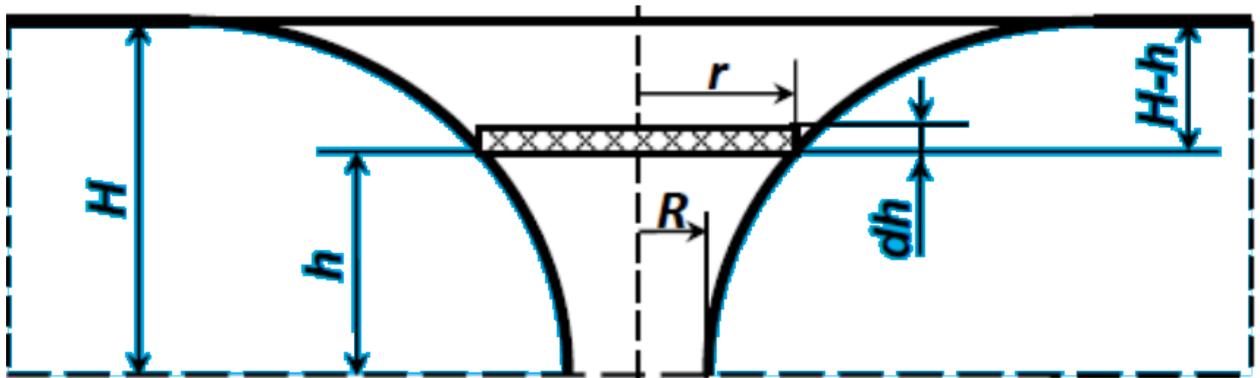


Рисунок 6 – К расчету потенциальной энергии воронки

Легко увидеть, что интегрирование (16) по  $h$  от 0 до  $H$  дает бесконечную величину объема воронки. Тем не менее поскольку давление воды в противоположность объему при увеличении  $h$  уменьшается (вдали от воронки)

$$p = \rho g(H - h) \quad (13)$$

то вклад любого элементарного объема воронки в потенциальную энергию после умножения на (10) оказывается конечным и одинаковым

$$dW_p = pdV = \rho g \pi R^2 H dh \quad (14)$$

После интегрирования по всей высоте окончательно получаем:

$$W_p = \rho g \pi R^2 H^2 \quad (15)$$

Что касается кинетической энергии, то, как мы видели, в идеальной воронке она бесконечна [6,7,10]. Однако реальные воронки конечны по размерам и не могут иметь бесконечную кинетическую энергию. С другой стороны, можно предположить, что величина кинетической и потенциальной составляющих общей энергии реальной воронки в какой-то степени «следуют» друг за другом.

Поэтому для ориентации и оценки энергии воронки будем полагать, что кинетическую энергию воронки, равную потенциальной энергии, и с учетом (10с) запишем выражение для кинетической энергии в преобразованном виде, опуская все преобразования:

$$W_k = \rho g \pi R^2 H^2 = \frac{(\pi R^2 H \rho) v_0^2}{2}. \quad (16)$$

Как видим, естественной единицей измерения объема воронки оказывается объем цилиндра с радиусом основания воронки  $R$  и высотой  $H$ , а масса воды этого объема может рассматриваться как «эффективная масса» воронки

$$V_e = \pi R^2 H, m_e = V \rho = \pi R^2 H \rho.$$

Полная энергия воронки может быть оценена в виде суммы потенциальной и кинетической энергии

$$W = W_p + W_k = 2\pi R^2 H^2 \rho g. \quad (17)$$

### Выводы

1. Как видно на рисунке 2, скорость вытекающей воды из воронки показывает уменьшение скорости воды в воронке при увеличении расстояния до центра вращения. Как известно, при закручивании воды в воронке действует центробежная сила, имеет горизонтальное направление и перпендикулярна силе тяжести, в результате чего изменение давления по вертикали определяется только величиной водяного столба. Из-за возрастающего влияния центробежных сил по мере приближения к центру вращения поверхности одинаковых давлений все плотнее приближаются друг к другу, что говорит о соответствующем увеличении градиента давления в радиальном направлении. Следовательно, воронка «противостоит», т.е. производит трения, тем самым создает давление окружающей жидкости, используя относительно малый объем воды (расстояние между поверхностями равных давлений становится все меньше по мере приближения к центру). Таким образом, скорость воды зависит только от расстояния до центра вращения и не зависит от глубины, а выражение (10) справедливо как для скорости на поверхности воронки, так и для скорости воды на любой глубине.

2. Можно предположить, что величины кинетической и потенциальной составляющих общей энергии реальной воронки в какой-то степени «следуют» друг за другом. На рисунке 1 показано, что вращающийся поток воды прежде функционирует горизонтально центробежной силе, действующей радиально, и срабатывают силы тяжести массы воды, которые тянут вниз, вытекая через отверстия, и взаимодействуют с истечением воды.

### Литература:

1. А. А. Павельев, А. А. Штарев. Влияние симметрии положения сливного отверстия на формирование нестационарных вихревых воронок // Изв. РАН. МЖГ. 2005. – № 5. – С. 182–188.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Пер. с нем. – 2 изд. – М., 1951.
3. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. Главная редакция физ.-мат. литературы. – М.: Наука, 1985.
4. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. – М.: Энергия, 1971.
5. A.Andersen, T.Bohr, B.Stenum, J.JuulRasmusen, and B.Lautrup. Anatomy of a Bathtub Vortex. // Phys.Rev.Lett. 91, 104502-1 (2003)
6. A. Pavel'ev, A. A. Shtarev. Experiment on Vortex Formation in a Fluid Flowing out of a Reservoir. // Fluid Dynamics, 2001, Vol. 36, #5.
7. B.Yu.Bazarov, Yu.B.Bazarov, M.B.Golubev, A.E.Kortuykov, E.E.Meshkov, D.I.Orlov, T.A.Vorsina. Instability as possible cause of bath-tube vortex initiation. Experiment.

// Selected Papers of the Intern. Confer. "Fluxes and Structures in Fluids: Physics of Geospheres 2009", Moscow, 2010. Editors Yu. Chashechkin & V. Baydulov, pp.43–48.

8. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. – М.: Энергия, 1971.

9. Чаплина Т.О., Кистович А.В. Перемещение плавучих маркеров по поверхности вихревой воронки // Изв. РАН. МЖГ. – 2022. – № 6. – С. 42–55.

10. Т. О. Чаплина, А. В. Кистович. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ПЛАВУЧИХ МАРКЕРОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВИХРЕВОЙ ВОРОНКИ. Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2022. – № 6. – Стр. 41–54.