

Сатыбаев А.Дж. abdu-satybaev@mail.ru

д.ф-м.н., проф. Омского технологического университета им. М.М. Адышева,

Закирова Д.А., anid_0308@mail.ru

преподаватель Гуманитарно-технологического колледжа Омского технологического университета.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССА ВПИТЫВАНИЯ ВЛАГИ В ОПОЛЗНЕВОЙ МАССИВ

Одной из основных причин появления оползня является впитывание влаги в геологических грунтах посредством дождей, таяния снега и ледников и т.д. В данной статье получена математическая модель вышеуказанных причин оползня с новыми начальными и граничными условиями. Подставленная параболическая задача приведена к эквивалентной гиперболической задаче, а последняя задача с помощью методов выпрямления характеристик и выделения особенностей приведена к задаче с данными на характеристиках в области внутри характеристик.

Она решена, конечно, разностным методом, изложен алгоритм решения, обоснована сходимость решения к точному решению.

Ключевые слова: Процесс оползня, инфильтрация, математическая модель, параболическая задача, преобразования Лапласа, гиперболическая задача, выпрямление характеристик, выделение особенностей, конечно-разностный метод, алгоритм.

Обзор литературы. В книге [6] обобщены и систематизированы основные теоретические положения по динамике подземных вод и приведено большое число относящихся сюда экспериментальных данных.

Основная цель книги – выяснение физической сущности процессов движения различных жидкостей в природных пористых средах и их математическое описание. Анализируются практически все существующие методы решения задач по фильтрации воды и других флюидов в насыщенных или ненасыщенных коллекторах.

Большое внимание уделяется эффективным приближенным методам решения практических задач и моделирования.

Приведено много готовых решений или подробных рецептов их получения для наиболее важных частных случаев.

В главе 6 монографии [6] приведены дифференциальные уравнения в частных производных насыщенного потока с граничными условиями, связывающими вектор плотности потока q с гидравлическим градиентом J или в пьезометрическом напоре ϕ .

В диссертационной работе [3] Ж.Т. Бексултанова исследованы основные оползнеобразующие факторы, построены и решены математические модели фильтрации и инфильтрации грунтовых вод в оползневых склонах, разработана методика расчета устойчивости оползневых горных склонов против оползания.

Таким образом, эта работа [3] посвящена оползневым процессам и методам их моделирования, аналитическим решениям краевых задач фильтрации и инфильтрации воды, а также вопросам устойчивости склонов и прогнозирования оползней.

Постановка и решение математического моделирования процесса в тепло- и массоперенос, проблема опасных и катастрофических природных явлений (в том числе оползни КР) и решение с применением новых информационных технологий изложены в диссертационной работе Б.И. Бийбосунова [5].

Исследованию движения грунтовых вод и их математическим методам решения посвящена книга П.Я. Полубариновой-Кочиной [4], применена теория дифференциальных уравнений для решения целого ряда задач фильтрации.

В работе Дж. Р. Филина [9] изложена теория инфильтрации – проникновение поверхностных вод в грунт по капиллярным порам и другим пустотам.

Оползни – один из наиболее опасных геологических процессов, и разработка методов прогноза оползневых процессов является важным и имеет существенное значение для народного хозяйства.

Основными характеристиками являются пространственное положение зоны развития оползневых деформаций, критические деформации, типы деформаций, время, скорость, расстояния перемещения масс горных пород в оползневом явлении.

В работе [11] изложены динамика поведения оползней, систематизированы основные причины оползней, разработана ММ поведения оползня в активной форме.

Математическая модель устойчивого равновесия оползня в координатах, имеющих произвольную поверхность скольжения, изложена в статье [16]. Определено также время начала движения оползня и прогнозирование.

В диссертационной работе [12] исследуется движение оползней потоков по поверхностям с постоянным переменным углом наклона и моделировано движение оползневых потоков с помощью различных вариантов метода частиц.

В статье [18] рассмотрены вопросы разработки численных моделей генерации и трансформации длинных поверхностных волн оползневого происхождения. Авторы во главе с З.И. Федотовой уточняют основы математических моделей, излагают принципы построения вычислительных алгоритмов, проводят результаты численных экспериментов.

А численное моделирование поверхностных волн движением оползня исследовано учеными Кузбасского государственного технического университета [4]. Здесь проведен анализ разных режимов волнообразования и нелинейная задача решена методом граничных элементов, а также получены эффекты «опрокидывания волн» в зависимости от типов оползней.

Математическим моделированием процесса оползней Кыргызстана на основе современного программного комплекса посвящена работа [8]. Авторами выявлены основные причины потери устойчивости откосов и склонов в условиях Кыргызстана, разработана методика оценки устойчивости горного массива, для практического решения задачи оползневого процесса был разработан программный комплекс Landslidem Modeller.

Оползневые процессы и явления Кыргызстана посвящена статья [1], и подробно изложены все оползневые опасности Кыргызстана и сохранения от этих явлений.

Чрезвычайным явлениям и ситуациям Кыргызстана, в том числе прорывоопасным озерам, посвящена монография ученых института водных проблем и гидроэнергетики [10]. Изложены истории развития и актуальные состояния прорывоопасных озер КР.

В монографии [2] приведены краткие сведения о природных и геологических условиях Юго-Западного Тянь-Шаня, сформулированы задачи геофизических изысканий на оползнеопасных горных склонах, предложены методики отдельных видов геофизических работ.

В книге [17] приведены сведения о состоянии ледников, золоторудных запасов, а также геоэкология Кумтора Кыргызстана.

В заключительных отчетах Центрально-Азиатского института прикладных исследований г. Бишкек [9] приведена единая база данных об оползнях Кыргызстана (Джалал-Абадская область, Узгенский район), описаны методы и средства решения задач оползневых процессов.

В предоставленной литературе приведены математические модели процесса движения оползня в различных явлениях оползня.

Созданная нами математическая модель наиболее близка к математической модели, разработанной в диссертационной работе Ж.Т. Бексултановым и Б.И. Бийбосуновым [3,5], это, во-первых, во-вторых, в [3,5] решение отыскивается в прямоугольнике при заданных значениях трех сторон и скорости движения.

А в наших исследованиях начальное и граничное условие задается в новом виде мгновенным источником, что часто возникает в прикладных задачах в процессах движений оползней.

Введение

Процесс вертикальной инфильтрации жидкости в оползневых склонах, т.е. впитывания влаги в почвогрунт, математически можно моделировать квазилинейным дифференциальным уравнением параболического типа второго порядка, относительно $H(x,t)$ – функции гидродинамического давления [6], [2 стр.78], [3 стр.21]:

$$\frac{dH(x,t)}{dt} = \frac{d}{dx} \left[D(H) \frac{dH(x,t)}{dx} \right] + \frac{dK(H)}{dx}, (x,t) \in R_+^2, \quad (1)$$

где $D(H)$, $K(H)$ – коэффициенты диффузии и влагопроводности, их еще называют коэффициентами влагопереноса.

Пусть геологическая среда однородно-изотропная и пусть в возмущении среды коэффициенты переноса $D(H(x,t))$, $K(H(x,t))$ не зависят от времени t , тогда уравнение имеет вид:

$$\frac{dH(x,t)}{dt} = \frac{d}{dx} \left[D(x) \frac{dH(x,t)}{dx} \right] + \frac{dK(x)}{dx},$$

где $D(x)$ – коэффициенты диффузии, $K(x)$ – коэффициент влагопроводности.

Физико-механический смысл этих коэффициентов D , K в процессах влагопереноса и инфильтрации жидкости приведен в работах [14,19].

Инфильтрационные жидкости в оползневых склонах – эта жидкости, появившиеся в результате климато-метеорологических явлений, от поверхностного стока, в результате оттаивания льдов зимнего периода, снегов, дождей. Наряду уравнения (1) задаем начальное и граничное условие вида

$$H(x,t)|_{t=0} = 0,$$

$$\left. \frac{H(x,t)}{dx} \right|_{x=0} = p_0 \theta(t), \quad (2)$$

где p_0 – положительное постоянное, $\theta(t)$ – тета-функция Хевисайда.

Первое условие (2) означает: до определенного времени t среда находится в покое, а второе условие (2) означает, начиная с момента $t=0$ к среде подействует (воздействует) возмущение вида (2).

Здесь мгновенным источником на среды могут быть климатические природные условия воздействия: дожди, снег, расстояние замерзавших почв-грунтов, подводные грунтовые воды, эрозия почв, землетрясения и т.д., а также антропогенные (человеческие) факторы: полив земельных участков, построение дорог, вырубка лесов, взрывные работы и т.д.

Постановка параболической задачи

Математическая постановка прямой задачи заключается в следующем: найти $H(x,t)$ из уравнения:

$$H_t^1(x,t) = \frac{d}{dx} \left[D(H(x)) H_x^1(x,t) \right] + \frac{d}{dx} (K(H(x))), \quad (3)$$

в полупространстве $x \in R_+$, $t \in R_+$, при начальном и граничном условии

$$H(x,t)|_{t=0} = 0, \quad H_x(x,t)|_{x=0} = p_0 \theta(t), \quad t \in R_+. \quad (4)$$

Прямая задача (3)-(4) является нелинейной задачей. Считая, что все входящие функции в уравнении (1) аналитические, то $H(x,t) \equiv 0$ в окрестности, и мы можем представить в виде ряда [2]:

$$D(H(x)) = D_0 + D_1 H + D_2 H^2 + \dots = \sum_0^{\infty} D_i H^i \quad (5)$$

А функции $H(x,t)$ и $K(H(x))$ разлагаем в ряд по малому параметру ε в следующем виде:

$$H(x,t) = H_0(x,t) \varepsilon + H_1(x,t) \varepsilon^2 + H_2(x,t) \varepsilon^3 + \dots = \sum_0^{\infty} H_i \varepsilon^{i+1}, \quad (6)$$

$$V(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{dV}{dx}|_{x=0} = p_0 \delta(t), t > 0, \quad (11)$$

где $H_0(x,t) = \int_0^{\infty} V(x,\tau)G(t,\tau)d\tau$, $G(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$ – функция Грина, $D_0(x)$, $K_0(x)$ –

коэффициенты уравнения.

Прямая гиперболическая задача (10)-(11) заключается в нахождении $V(x,t)$ – обобщенное решение при известных коэффициентах $D_0(x)$, $K_0(x)$ и постоянной p_0 , z_0 .

Приведение к задаче с данными на характеристиках

Предположим, что относительно коэффициентов выполнено следующее условие

$$D_0(x), K_0(x) \in \Lambda_0, \quad (12)$$

где $\Lambda_0 = \{D_0(x) \in C^2(0,T), 0 < M_1 < D_0(x) \leq M_2, \text{Supp}\{D_0(x)\} \in (0,T), \|D_0(x)\|_{C^2} \leq M_2\}$.

Введем новую переменную $z(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{D_0(\xi)}} d\xi$, а также новые функции

$$U = (z(x), t) = V(x, t), \quad d(z(x)) = D_0(x), \quad q(x) = K_0(x).$$

Сделаем некоторые выкладки: $V''_{tt}(x, t) = U''_{tt}(x, t)$

$$V(x, t) = U(z(x), t), \quad V'_x(x, t) = U'_z(z, t) \frac{1}{\sqrt{D_0(x)}},$$

$$V''_{tt}(x, t) = U''_{zz}(z, t) \frac{1}{D_0(x)} + \frac{1}{2} \frac{d'(z)}{dz} U'_z(z, t). \quad (13)$$

Подставляя выкладки (13) в задачу (10-11), имеем

$$U''_{tt}(z, t) = U''_{zz} + \frac{1}{2} \frac{d'(z)}{d(z)} U'_z(z, t) + q'_z(z) U(z, t), \quad z \in R_+, t > 0. \quad (14)$$

$$U(z, t)|_{t<0} \equiv 0, \quad U'_z(z, t)|_{z=0} = \frac{p_0}{\sqrt{d(0)}} \delta(t), t > 0. \quad (15)$$

Выделим теперь особенности задачи по методике [19].

Теорема 1. Пусть $d(z) \in C^1$, $q(z) \in C$, $z \in R_+$. Тогда соответствует единственное решение задачи (14) - (15), представимое в виде

$$U(z, t) = S(z)\theta(t - |z|) + \tilde{U}(z, t), \quad (16)$$

где $\tilde{U}(z, t)$ – непрерывная часть решения.

Доказательство можно проводить по теореме 10.10. [20, 280 стр.]. Для численного решения прямой задачи (14) - (15) выделим особенности решения задачи. Из (16) имеем:

$$\begin{aligned} U''_{tt}(z, t) &= S(z)\delta(t - |z|) + \tilde{U}''_{tt}(z, t), \\ U'_z(z, t) &= S'_z(z)\theta(t - |z|) + \tilde{U}'_z(z, t) - S(z)\delta(t - |z|), \\ U''_{zz}(z, t) &= S''_{zz}\theta(t - |z|) - 2S'_z(z)\delta(t - |z|) + S(z)\delta'(t - |z|) + \tilde{U}''_{zz}(z, t), \\ U'_z(z, t)|_{z=0} &= S'_z(0)\theta(t) - S(0)\delta(t) + \tilde{U}'_z(z, t)|_{z=0} = \frac{p_0}{\sqrt{d(0)}} \delta(t). \end{aligned}$$

Здесь $S'_z(0) = 0$ из четности функции, $\tilde{U}_z(z, t)|_{z=0} = 0$ из-за непрерывности, четности функции. Из последнего выражения имеем $S(0) = \frac{P_0}{\sqrt{d(0)}}$. Подставляя все эти выкладки в (14),

получим:

$$S(z)\delta'(t-|z|) + \tilde{U}_{zz}(z, t) = S''_{zz}(z)\theta(t-|z|) - 2S'_z(z)\delta(t-|z|) + S(z)\delta'(t-|z|) + U''_{zz}(z, t) + q'_z(z)S(z)\theta(t-|z|) + q'_z(z)\tilde{U}(z, t) + \frac{1}{2} \frac{d'(z)}{d(z)} S(z)\delta(t-|z|) + \frac{1}{2} \frac{d'(z)}{d(z)} \tilde{U}'_z(z, t).$$

Приравниваем к нулю при одинаковых значениях δ, θ :

$$\delta: 2S'_z(z) - \frac{1}{2} \frac{d'(z)}{d(z)} S(z) = 0, S(0) = \frac{p(0)}{\sqrt{d(0)}}$$

$$\theta: S''_{zz}(z) + q(z)S(z) = 0.$$

Из первого выражения:

$$\frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{1}{4} \frac{d'(z)}{d(z)}, \text{ логарифмируя, имеем } \ln S(x) = \frac{1}{4} \ln d(x). \text{ Итак, имеем}$$

$S(x) = \sqrt[4]{d(x)}$. Учитывая все изложенное, получим прямую задачу на характеристиках.

$$U''_{zz}(z, t) = U''_{zz}(z, t) + 2 \frac{S'_z(z)}{S(z)} U'_z(z, t) + q(z)U(z, t), \quad (17)$$

$$U(z, t)|_{t=|z|} = S(z), z \in [-T, T], \quad (18)$$

$$S(z) = \sqrt[4]{d(z)}. \quad (19)$$

В силу условия (12) и принципа конечной зависимости области гиперболического уравнения от области определения, от коэффициентов уравнения и от области данных можно ограничиться рассмотрением прямой задачи (17) - (19) в области

$$\Delta(T) = \{(z, t) \in R_+ \times R_+, z \in (-T, T), |z| < t < 2T\}. \quad (20)$$

Конечно-разностное решение

Решение задачи с данными на характеристиках (17)-(19) отыскиваем, конечно, разностным методом. Поэтому в область (20) введем конечно-разностную область, где h – шаг сетки по z , τ – шаг сетки по t ,

$$\Delta_{h,\tau}(T) = \{x_i = ih, h = \frac{T}{N}, i = \overline{0, N}; \tau_k = k\tau, \tau = \frac{T}{2N}, k = \overline{0, 2N}; -T < ih < T, |ih| < k\tau < 2T\}. \quad (21)$$

Разностный аналог дифференциальной задачи (17)-(19) имеет вид:

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + 2 \frac{S_{i+1} - S_i}{hS_i} \cdot \frac{U_{i+1}^k - U_i^k}{h} + q_i U_i^k, (ih, k\tau) \in \Delta_{h,\tau}(T), \quad (22)$$

$$U_i^i = S_i, i = \overline{-N, N}; \quad (23)$$

$$d_i = S_i^4, i = \overline{-N, N}; \quad (24)$$

где d_i, q_i – известные сеточные функции $d(x), q(x)$, для удобства и для сходимости возьмём

$$\tau = \frac{h}{2}. \text{ Из уравнения (22) имеем}$$

$$U_i^{k+1} = 2U_i^k - U_i^{k-1} + \frac{\tau^2}{h^2} [U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k] + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^k, (ih, k\tau) \in \Delta_{k,i}$$

$$\text{где } A_i^k = 2 \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \cdot (U_{i+1} - U_i) + h^2 q^i U_i^k.$$

$$U_i^k = 2U_i^{k-1} - U_i^{k-2} + \frac{\tau^2}{h^2} [U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-2} + U_{i-1}^{k-1}] + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^{k-1}, i = \overline{-N+1, N-1}, k = \overline{2(N-1), 1}$$

$$U_i^{k-1} = 2U_i^{k-2} - U_i^{k-3} + \frac{\tau^2}{h^2} [U_{i+1}^{k-2} - 2U_i^{k-3} + U_{i-1}^{k-2}] + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^{k-2}, i = \overline{-N+2, N-2}, k = \overline{2(N-2), 2}$$

$$U_i^{k-2} = 2U_i^{k-3} - U_i^{k-4} + \frac{\tau^2}{h^2} [U_{i+1}^{k-3} - 2U_i^{k-4} + U_{i-1}^{k-3}] + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^{k-3}, i = \overline{-N+3, N-3}, k = \overline{2(N-3), 3}$$

$$U_i^{k-3} = 2U_i^{k-4} - U_i^{k-5} + \frac{\tau^2}{h^2} [U_{i+1}^{k-4} - 2U_i^{k-5} + U_{i-1}^{k-4}] + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^{k-4}, i = \overline{-N+4, N-4}, k = \overline{2(N-4), 4}$$

$$U_i^2 = 2U_i^1 - U_i^0 + \frac{\tau^2}{h^2} [U_{i+1}^1 - 2U_i^1 + U_{i-1}^1] + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^1, i = \overline{-1, 1}, k=1.$$

Подставляя все эти выкладки последовательно в уравнение (22), получим:

$$U_i^{k+1} = 2 \frac{S_1 + S_{-1}}{2} - S_0 + \frac{\tau^2}{h^2} \sum_{p=1}^k \sum_{\mu=1}^p [U_{i-k+2\mu-p+1}^\mu - 2U_{i-k+2\mu-p}^\mu + U_{i-k+2\mu-p-1}^\mu] + \frac{\tau^2}{h^2} \sum_{p=1}^k \sum_{\mu=1}^p A_{i-k+2\mu-p}^\mu$$

$$k = \overline{N-1, 1}; i = \overline{-k, k}.$$

Если учесть, что функция $S(x)$ – четная функция, то $S_{-1}=S_1$, то следует

$$U_i^{k+1} = 2S_1 - S_0 + \frac{\tau^2}{h^2} \sum_{p=1}^k \sum_{\mu=1}^p [U_{i-k+2\mu-p+1}^\mu - 2U_{i-k+2\mu-p}^\mu + U_{i-k+2\mu-p-1}^\mu] + \frac{\tau^2}{h^2} \sum_{p=1}^k \sum_{\mu=1}^p A_{i-k+2\mu-p}^\mu. \quad (25)$$

Формула (23) является разностным аналогом интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$U(x, t) = 2S(x_1) - S(x_0) + \int_0^t [U(x + (t - \tau)) - U(x - (t - \tau))] d\tau + \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} A(\xi, \tau) d\xi d\tau, (x, t) \in \Delta(T). \quad (26)$$

Так как интегральные (от 0 до t) функции непрерывны и ограничены (условие(12)) в области $\Delta(T)$ и функции $d(x)$, $S(x)$, $q(x)$ также непрерывны и ограничены, то решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода (26) существует и единственно [7.стр 20].

Из-за эквивалентности задач (22)-(24) и (17)-(19), то и существует и единственное решение прямой задачи (17)-(19).

Изложим теперь численные алгоритмы решения одномерной прямой задачи с данными на характеристиках (22)-(24) конечно-разностным методом. Это задача рассматривается в сеточной перевернутой крышообразной области, указанной на рисунке 1.

Алгоритм вычисления прямой задачи (22)-(24):

- 1) Вычислим сеточные функции $d_k, q_k, k = \overline{0, 2N}$;
- 2) Вычислим сеточные функции S_k по формуле (24), $k = \overline{0, 2N}$, (на рисунке точки o);

- 3) Всем точкам, обозначенным Δ на рисунке 1, присвоим:

$$U_{\pm}^{\pm(k+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_{k+1} - S_k) + S_k, k = \overline{1, 2N-1}.$$

Эта формула получена из $\frac{U_{\pm k}^{\pm(k+1)} - S_k}{S_{k+1} - S_k} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow U_k^{\pm(k+1)} - S_k = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_{k+1} - S_k)$.

4) Всем точкам, обозначенным на рисунке 1, зададим значение

$$U_{\pm k}^{\pm(k+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_{k+2} - S_k) + S_k, k = \overline{1, 2N-2}.$$

Тоже получено из $\frac{U_{\pm k}^{\pm(k+2)} - S_k}{S_{k+2} - S_k} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Вычислим

$$B_i^k = [U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k] \text{ в текущем слое } k = \overline{1, 2N}, i = \overline{-k, k}.$$

6) Вычислим

$$A_i^k = 2 \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \cdot (U_{i+1}^k - U_i^k) + h^2 q^i U_i^k, k = \overline{1, 2N}, i = \overline{-k, k}.$$

7) Внутренние точки, обозначенные * на рисунке 1, вычисляются по формуле (17):

$$U_i^{k+1} = 2U_i^k - U_i^{k-1} + \frac{\tau^2}{h^2} B_i^k + \frac{\tau^2}{h^2} A_i^k, i = \overline{-k+2, k-2}, k = \overline{3, 2N}.$$

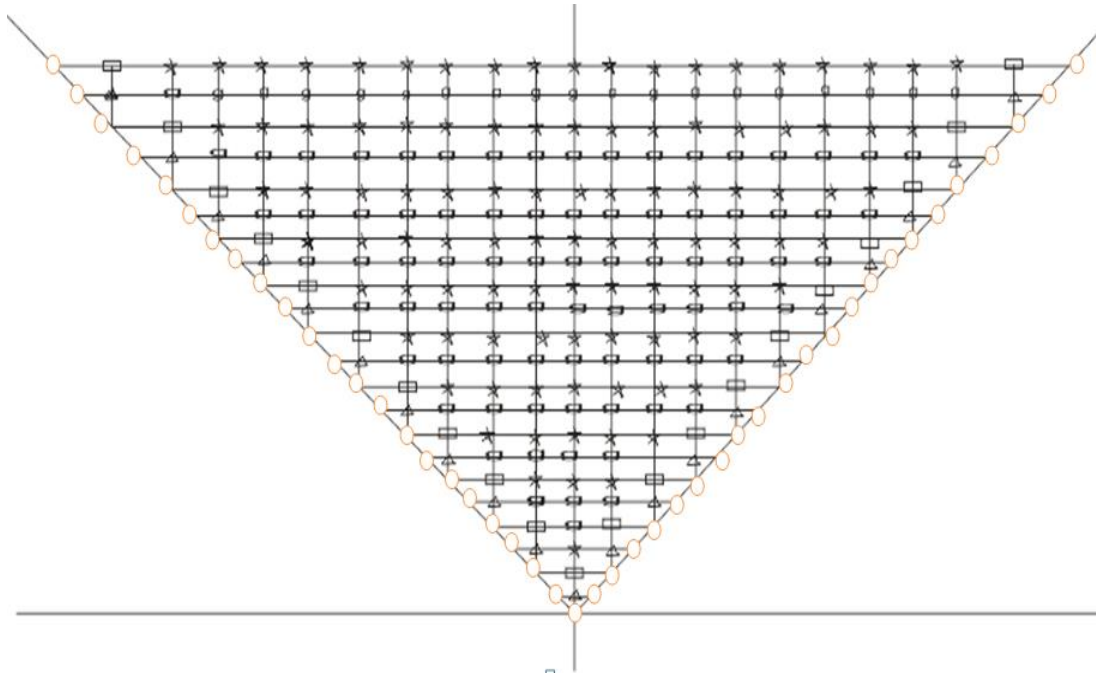


Рисунок 1

Замечание 1. Если учесть $h = 2\tau$, то $\frac{\tau^2}{h^2} = \frac{1}{4}$ будет, вычисление упрощается.

Замечание 2. Если учесть все входящие функции четные, то вычисление индексом i можно производить $i = \overline{-1, N}$, вычисление упрощается, сокращается почти наполовину.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (12) и пусть $U(z, t) \in C^4(\Delta)$. Тогда конечно-разностное решение задачи (22)-(24) сходится к точному решению прямой задачи (17)-(19) в порядке $O(h)$.

Литература

1. Ажикеев Б.Э., Шамырканов У.М. Оползневые процессы и явления на территории Кыргызской Республики. – Наука о Земле. – Вестник КРСУ. – 2023. – Т. 23. № 4. – С. 153–161.

2. Алешин Ю.Г. Геофизические изыскания на оползнях. – Бишкек, 2013.– С.254.
3. Бексултанов Ж.Т. Методы математического моделирования для анализа и прогноза оползней гидродинамического типа на территории КР. Дисс.... на соиск. уч. степени к.ф.-м.н. – Бишкек, 2013. – С. 178.
4. Березин Е.Н., Березина А.С. Численное моделирование генерации поверхностных волн движением оползня. – Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2016. № 3. – С. 45–50.
5. Бийбосунов Б.И. Математическое моделирование и информационные технологии и системы в прикладных задачах. Дисс. в виде научного доклада... на соиск. уч. степени д.т.н. – Бишкек, 2021. – С. 45.
6. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды/ Я. Бер, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.:Мир, 1971. – С.320.
7. Верлан А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы. Алгоритмы. Программы. Справочное пособие. – Киев: Наукова Думка, 1986. – С. 544.
8. Воробьев А.Е., Нефадьев В.И., Усманов С.Ф. Исследование поведения оползней на основе программного комплекса Landslide Modeller. –Вестник Кузбасского государственного технического университета. –2017. № 5. – С. 44–49.
9. Единая база данных об оползнях Кыргызстана. Узгенский район. Под руководством Молдобекова Б.Д. Отчет по итогам выполненных работ ЦАИИЗ. Книга 1. –Бишкек. 2013. – С. 36.
10. Ерохин С.А., Чонтоев Д.Т., Загинаев В.В. Прорывоопасные озера Кыргызстана. Бишкек. 2020. – С. 270.
11. Ефремов А.В., Титаренко В.Н. Математическая модель поведения оползней/ Строительство и техногенная безопасность. – Вып. 45. – 2013. – С. 75– 81.
12. Зеркаль С.В. Математическое моделирование движения оползней- потоков методом частиц. Дисс.... на соиск. уч. степени к.ф.-м.н. – М., 2002. – С. 99.
13. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Сибирское научное издательство. Новосибирск, 2009.– С. 457.
14. Полубаринова - Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод./ П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – С. 664.
15. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. – М.:Научный мир, 2005. – С. 304.
16. Симонян В.В., Кочиев А.А. Математическая модель устойчивого равновесия оползня. Безопасность строительства городского хозяйство. – Вестник МГСУ. Т. 14. – Вып.10. 2019. – С. 1292–1298.
17. Торгоев И.А. Ледники, золото и геоэкология Кумтора. – Бишкек, 2016. – С.197.
18. Федорова З. И., Чубарев Л. Б., Шокин Ю. И. Моделирование поверхностных волн, порожденных оползнями. – Вычислительные технологии. – Т. 9. – № 6. – 2004. – С. 89–96.
19. Филип Дж.Р. Теория инфильтрации[текст]/Дж.Р. Филип//В сб.: Изометрические передвижения влаги в зоне аэрации. – Л.:Гидрометеиздат,1972. – С. 6–71.
20. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990.– С. 304.