УДК 517.9.92.949

Баратова Б.Ш., baratova@mail.ru
Темиров Б.К., bekjant@mail.ru
КНУ им. Ж. Баласагына

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БИЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

В статье изучаются осцилляционные свойства решений линейного дифференциального-разностного уравнения с конечными разностями второго порядка с биэллиптическим оператором и устанавливается достаточное условие осцилляции решений данного уравнения.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, биэллиптический оператор, осцилляция решений, конечные разности второго порядка, линейные дифференциальные уравнения, условия осцилляции, эллиптические операторы.

Рассмотрим оператора в виде

$$L_o[L_o(u)] \equiv \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{P} \frac{\partial}{\partial x_K}\left\{B_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u[h_1(n),x] \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{P} \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{B_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\{B_{ki}(x)U[h_1(n),x]\}\right\}\right\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{P} \frac{\partial}{\partial x_k^2}\left\{B_{ki}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}U[h_1(n),x]\right\}$$

который будем называть биэллиптическим оператором.

Введем обозначения:

1) QCR^P– открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей Г=∂Q.
2) $\Delta U(n,x)$ = U(n+1 x) – U (n, x).
3) x = ($x_{1,}x_{2,}$ …. x_p).
4) $D_0 = \{n \geq n_{0,}\ x \in Q\}$; $\quad \overline{D}_0 = \{n \geq n_1,\ x \in \bar{Q}\}$;
$D_0^0 = \{n \geq n_{0,} x \in \bar{Q},\ y \in \bar{Q}\}$.
5)$L_0(u) = \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{P} \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{B_{ki}(x)\frac{\vartheta}{\vartheta x_k}u[h(n),x]\right.$ – эллиптический оператор.
6) $L(u) = b(n)L_o[L_o(u)] + C_1(n,x)u[h_1(n),x] + C_2(n,x)u[h_2(n),x]$.
7) Через (F) – обозначим множество функций $\{\vartheta(n,x)\}$, имеющих
непрерывные частные производные четвертого порядка по переменным $x_1, x_2, \dots, x_p$; $\forall x \epsilon$Q.
8) Через $(К_1)$ – множество всех правильных функций $\{\vartheta(n,x)\}$, удовлетворяющих краевому условию

$$L_o[L_o(\vartheta)] - \lambda_0\,\vartheta \,\Big|_{Г} = 0\,. \tag{1}$$

9) $(К_2)$ – множество всех правильных функций, удовлетворяющих граничному условию

$$[L_o(\vartheta)]\,\Big|_{Г} = 0\,. \tag{2}$$

А также предполагается, что

1) для любого набора вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m,}$

$$\sum_{i,k=1}^{P} A_{lk}(x)\xi_i\xi_k \geq \mu\sum_{k=1}^{m} \xi_k^{\ 2},\ \mu > 0.$$

2) $A_{lk}(x) = A_{kl}(x)$ – достаточно гладкие функции (достаточно предполагать, чтобы эти функции имели частные производные четвертого порядка, удовлетворяющие в замкнутой области $\bar{Q}$ некоторому условию Гёльдера).

Будем исходить из следующих определений [1].

1. Всякую функцию $u(n, x)$, определенную в области D_0, называют правильной.
2. Правильную функцию $u\ (n, x)$ будем называть положительной {отрицательной},если $\exists n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall n, x) \in D_2$

$$u\ (n, x) \geq 0\ ,\ \vartheta(n) = \int_Q u(n, x)dx > 0,$$

$$\{u\ (n, x) \leq 0\ ,\ \vartheta(n) = \int_Q u(n, x)dx < 0\}.$$

3. Правильную функцию $u\ (n, x)$называют неосциллирующей, если она либо не отрицательна, либо не положительна, в противном случае – осциллирующей.
4. Правильную функцию $u(n, x)$называют положительной {отрицательной}, если $\exists n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall\ (n.x) \in D_1 u(n, x) > 0\{\ u(n.x) < 0\ \}$. Правильную функцию называют С−неосциллирующей, если она либо не отрицательна, либо не положительна, в противном случае – осциллирующей С−осциллирующее.

Из определения следует, что всякая С−неосциллирующая функция неосциллирует и всякая С−осциллирующая функция, С−осциллирует.

Теорема 1. [4]. Множество собственных значений $\{\lambda_k\}$ краевой задачей

$$\mathrm{L_0}\ У(x) + \lambda У(x) = 0, \quad У(x)\ \Big|_{\Gamma} = 0\ ,$$

не имея конечных предельных точек, причем $\lambda_k > 0$, каждое собственное значение λ_k имеет конечную кратность. Наименьшему собственному значению λ_0 (приближенные вычисления собственного значения λ_0 даны в [3]) отвечает единственная нормированная в смысле ($\int_Q \Phi(x)dx = 1$) собственная функция $\Phi\ (x) > 0, \forall x \in Q$.

Если Q=$\{a_k < x_k < b_k,\ \text{к} = 1,2, \dots, m\}$ – параллелепипед, то

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\pi}{b_k - a_k}\right)^2.$$

Если Q – выпуклая область, то

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{m-1}{d^2}\right).$$

где ρ – радиус наибольшего шара, вписанного в Q;
d – диаметр области Q;
m – размерность области Q.

В статье изучаются достаточные условия С– осцилляции решений дифференциально - разностного уравнения с биэллиптическим оператором в виде

$$\Delta[r(n)\Delta u(n, x)] + L(u) = 0(1),$$

$$\text{где } L(u) = b(n)L_o[L_o(u)] + C_1(n, x)u[h_1(n), x] + C_2(n, x)u[h_2(n), x].$$

Лемма 1. Для всякой функции $u(n, x) \in (\text{К}_1)$ имеет место равенство

$$\int_Q \Phi(x)\, L_2(u)dx = \lambda_0^2 \int_Q \Phi(x)u(n, x)dx.$$

Доказательство: Дважды используя формулу Грина для эллиптического оператора L_0, получим равенство

$$\int_Q Q(x)L_2(u)dx = \lambda_0^2 \int_Q \Phi(x)u(n,x)dx + \int_{\text{г}} \begin{bmatrix}\lambda_0 u - \\ L_0(u)\end{bmatrix} \sum_{ik} B_{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \cos(\gamma, x_l) d\Gamma.$$

Отсюда при $u(n,x) \in (K_1)$ получим утверждение леммы.

Лемма 2. Если $u(n,x) \in (K_2)$ неотрицатеьная функция, то имеет место равенство

$$\int_Q \Phi(x)L_2(u)dx = \lambda_0^2 \int_Q \Phi(x)\, u(n,x)dx, \quad \forall n \geq n_1.$$

Доказательство. В силу условий леммы и из формулы (1) получим равенство

$$\int_Q \Phi(x)L_2(u)dx = \lambda_0^2 \int_Q \Phi(x)\, u(n,x)dx + \Psi(n)(3),$$

где

$$\Psi(n) = \lambda_0 \int_{\text{г}} u(n,x) \sum_{ik}^{\text{P}} B_{lk}\,(x) \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \cos(\gamma\,, x_l)\, d\Gamma.$$

Рассуждая так же, как и в [4], доказывается, что $\Psi(n) \leq 0, \forall n \geq n_1$.
С учетом этого неравенства из [3] вытекает утверждение леммы.
Скажем, что выполнено условие ($\mathring{\text{E}}_0$), если $\forall (n,x,y) \in D_0$ выполняются неравенства:

1) $\text{C}_1(n,x) + \lambda_0^2 b(n) \geq a_1(n) \geq 0; \text{C}_2(n,x) \geq a_2(n) \geq 0;$
2) $d(n) = a_1(n) + a_2(n)$.

Введем обозначения: а) $\vartheta\,(n) = \int_Q \Phi(x)\, u(n,x)dx$.
Если $u(n.x) > 0, \ \forall\,(n.x) \in D_1$, то $\vartheta\,(n) > 0, \forall n \geq n_1.$
Отсюда следует, что для каждой С – неосциллирующей функции $u(n.x)$ существует натуральное число $n_{1.} \exists n_1 \geq n_0$, такое , что $\vartheta(n) \neq 0, \ \forall n \geq n_{1.}$

Лемма 3. Если уравнение (1) имеет С – неосциллирующее решение $u(n.x) \in (K_1)$, то неравенство

$$\Delta y(n) + \sum_{k=1}^{2} a_k(n) y[h_k(n)] \leq 0 \tag{4}$$

имеет положительное решение $y(n) = |\vartheta(n)|$.

Доказательство.Пусть $u(n,x) \in (K_1)$ положительное решение уравнения (1). Тогда $\exists n_1 \geq n_0$такое, что $\forall (n,x) \in D_{1,} u(n.x) > 0$.
Зафиксируем число $n_2 \geq n_1$такое, чтобы $\forall n \geq n_2$ выполнялось неравенство

$$h_k(n) \geq n_1, \ k = 1{,}2; u[h_k(n), x] > 0.$$

С учетом этого неравенства из тождества (1) имеем

$$\Delta u(n,x) + b(n)L_2(u) + c_1(n,x)u[h_1(n),x] + a_2(n)u[h_2(n),x] \leq 0$$
$$\forall (n,x) \in D_2.$$

Умножая это неравенство на функцию $\Phi(x)$, затем интегрируя и учитывая лемму 1 и условие(E_0^0), получим неравенство

$$\Delta\vartheta(n) + \sum_{k=1}^{2} a_k(n)\vartheta[h_k(n)] \leq 0, \ \forall n \geq n_2.$$

Следовательно, $y(n) = \vartheta(n)$– положительное решение неравенства (4).
Пусть $u(n,x) \in (K_1)$ отрицательное решение уровнения (1). Тогда

$$\text{Z}(n,x) = -\,u(n,x)$$

положительное решение этого уравнения. Поэтому по доказанному выше получим

$$y(n) = \int_Q \Phi(x) u(n,x) dx = -\vartheta(n)$$

положительное решение неравенства (4).

Лемма 4. Пусть 1) $d(n) \geq 0, \forall n \geq n_0$; 2) Уравнение (1) имеет C – неосциллирующее решение $u(n,x)$. Тогда неравенство (4) имеет положительное решение $y(n) = |\vartheta(n)|$.
Лемма доказывается с использованием формулы (2).

Теорема 1. Пусть $\sum^{\infty} d(m) = \infty$. Тогда каждое решение$u(n,x) \in (K_1)$: уравнение (1) C – осциллирует.

Доказательство. Допустим, что уравнение(1) имеет C – неосциллирующее решение $u(n,x) \in (K_1)$. Тогда по лемме 3 имеет положительное решение, что противоречит теореме 1.1 из [3]. Следовательно, предположение существования C – неосциллирующего решения приводит к противоречию.

Теорема 2. Пусть:1) выполнены условия теоремы1; 2) $d(m) \leq 0, \forall n \geq n_0$. Тогда каждое решение $u(n,x) \in (K_2)$1) уравнение (1) C – осциллирует.

Теорема доказывается почти так же, как и теорема 1.

Литература

1. БЫКОВ Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. — Фрунзе: Илим, 1985.
2. БЫКОВ Я.В., ТИМИРОВ Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного четного порядков. — Фрунзе: Илим, 1990.
3. БЫКОВ Я.В., МЕРЗЛЯКОВА Г.Д., ШЕВЦОВ Е.И. Об осциллируемости решений нелинейных разностных уравнений //Дифференциальные уравнения . – 1975. –Т. II. №8.
4. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1962.
5. ТЕМИРОВ Б. К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольных нечетных порядков. – Бишкек, 214. – С. 177.