

УДК 517.928

Алыбаев К.С., Нурматова М.Н.

Жалал-Абадский государственный университет имени Б. Осмонова

СЛИЯНИЕ ТОЧЕК ПОВОРОТА И ЗАДЕРЖКА РЕШЕНИЙ

В данной работе рассматривается автономная система сингулярно возмущенных уравнений, состоящая из четырех уравнений быстрых переменных первого порядка и одного уравнения медленной переменной. Матрица первого приближения быстрых переменных имеет попарно комплексно-сопряженные, собственные значения. Система имеет положение равновесия, причем устойчивость положения равновесия теряется всеми собственными значениями при двух значениях медленной переменной. Введено понятие задержки решения вблизи неустойчивого положения равновесия. Решена задача задержки решения системы вблизи неустойчивого положения равновесия. Решение задачи базируется на геометрических построениях с использованием свойств линии уровней гармонических функций. Использован метод аналитического продолжения рассматриваемой системы на некоторый круг комплексной плоскости независимой переменной, содержащий отрезок действительной оси. Явление задержки решения для аналитических систем имеет некоторое сходство с явлением задержки решения для систем с траекториями-утка.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения; положение равновесия; устойчивость; аналитические; гармонические функции; линии уровня; ограниченность; сходимоссть; задержка решения

Введение и постановка задачи

Сингулярно возмущенные системы уравнений применяются в процессе моделирования и исследования объектов различной природы, способных одновременно совершать быстрые и медленные движения [1-3]. В связи с этим задача разделения медленных и быстрых движений системы является актуальной. Работы [1-4], посвященные построениям оптимальных решений в задачах с разнотемповыми динамическими системами с разделением движений на сингулярно возмущенные системы, а также работы [3-4] в дискретных задачах оптимального управления. Приемы исследования сложных объектов, системный подход, взаимодействие и взаимосодействие в сложных динамических системах были изложены в работе [5]. В работах [6-7] впервые для построения траектории-утки был применен метод «склеивания» устойчивых и неустойчивых медленных интегральных многообразий дифференциальной системы. Для случая, когда дифференциальная система имеет траекторию-утку, в работе [8] была получена оценка затягивания потери устойчивости.

Пусть рассматривается система

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(y)\tilde{x}(t, \varepsilon) + V^2\tilde{x}(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$y'(t) = 1 \quad (2)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} x(t_0, \varepsilon) - y(t_0) &= \tilde{x}(t_0, \varepsilon) = x^0 \\ y(t_0) &= t_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $t \in D = \{t \in C, |t| < r_0 \varepsilon R - r_0 \gg |t_0|\}$, C, R – множество комплексных и вещественных чисел.

$$x(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), x_3(t, \varepsilon), x_4(t, \varepsilon)),$$

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_1(t, \varepsilon) - y, x_2(t, \varepsilon), x_3(t, \varepsilon) - y, x_4(t, \varepsilon)),$$

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 \\ 0 & A_2(y) \end{pmatrix}, A_1(y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}, A_2(y) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 & 2y \\ -2y & 1 - y^2 \end{pmatrix},$$

$$V = (x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2.$$

Систему (1) принято называть системой быстрых переменных, а уравнение (2) – медленной [9-10].

Система (1) в точке $(y, 0, y, 0)$ имеет положение равновесия, а матрица $A(y)$ – собственные значения $\lambda_{1,2} = y \pm i$, $\lambda_{3,4} = -(y \pm i)^2$, $i = \sqrt{-1}$.

Таким образом, устойчивость положения равновесия сначала теряется при $y = -1$, затем при $y = 0$.

Определение. Если некоторая система быстрых переменных имеет положение равновесия и устойчивость положения равновесия теряется при некотором значении медленных переменных, причем решение системы быстрых переменных не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течение конечного времени остается вблизи него, то будем говорить, что происходит задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия (ЗР).

Впервые явление ЗР обнаружено под руководством Л.С.Понтрягина и опубликовано в [11]. Затем результаты этой работы обобщены в [12-14]. Во всех перечисленных работах устойчивость положения равновесия определяется одной парой комплексно-сопряженных собственных значений.

В [15] рассмотрен случай, когда устойчивость положения равновесия определяется двумя парами комплексно-сопряженных собственных значений. Нули собственных значений не совпадают и лежат на мнимой оси, а устойчивость положения равновесия теряется при одном значении медленной переменной.

Задача. Исследовать задачу (1)-(2)-(3) на ЗР.

Решение задачи

При решении поставленной задачи воспользуемся методом изложенного в [15-18]. Решение задачи разделим на несколько частей.

1. Преобразование исходного уравнения

Решение уравнения (2) примем в виде $y = t$ и в (1) введем новые неизвестные функции $x_1(t, \varepsilon) - t = u_1(t, \varepsilon)$, $x_2(t, \varepsilon) = u_2(t, \varepsilon)$, $x_3(t, \varepsilon) - t = u_3(t, \varepsilon)$, $x_4(t, \varepsilon) = u_4(t, \varepsilon)$ (4)

$u(t, \varepsilon) = colon(u_1, u_2, u_3, u_4)$, где $u_j(t, \varepsilon)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – новые неизвестные функции (4), подставляя в (1), получим (далее аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\varepsilon u' = A(t)u + V^2 u - \varepsilon a, \quad (5)$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u^0, \quad (6)$$

где $a = colon(1, 0, 1, 0)$.

В (5) первое и третье уравнение, умножив на i , затем первое уравнение, сложив со вторым, а третье с четвертым, имеем

$$\varepsilon z' = \Lambda(t)z + V^2 z - \varepsilon a_1, \quad (7)$$

$$z(t_0, \varepsilon) = z^0, \quad (8)$$

где $z = colon(z_1 = u_1 + iu_2, z_2 = u_1 - iu_2, z_3 = u_3 + iu_4, z_4 = u_3 - iu_4)$,

$\Lambda(t) = diag(t + i, t - i, -(t + i)^2, -(t - i)^2)$, $V = z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$.

Будем считать

$$|z^0| \leq C_1 \varepsilon.$$

Здесь и далее буквами C_1, C_2, \dots обозначим положительные постоянные, не зависящие от ε .

(7)-(8) заменим следующим

$$z = z^0 E(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V^2 z - \varepsilon a_1) E(t, \tau, \varepsilon) d\tau, \quad (9)$$

где

$$E(t, \tau, \varepsilon) = diag \left(\exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon}, \exp \frac{(t-i)^2 - (\tau-i)^2}{2\varepsilon}, \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon}, \exp \frac{-(t-i)^3 + (\tau-i)^3}{3\varepsilon} \right).$$

К (9) применим метод последовательных приближений, которые определим так

$$z_m = z^0 E(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (V^2 z_{m-1} - \varepsilon a_1) E(t, \tau, \varepsilon) d\tau, \quad (10)$$

$z_0 \equiv 0, m = 1, 2, \dots$

Теперь задача состоит в оценке последовательных приближений (10) и доказательстве их равномерной сходимости.

2. Построение и деление области

Для решения поставленной задачи определим область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Определим \mathcal{D}_0 , используя линии уровня функций $Re(t \pm i)^2$, $Re(t \pm i)^3$.

Пусть $t = t_1 + it_2$, t_1, t_2 – вещественные переменные.

Рассмотрим функции $Re(t + i)^2$, $Re(t + i)^3$ и линии уровня

$$(p_{01}) = \{t \in \mathcal{D}, Re(t + i)^2 = 0\},$$

$$(p_{02}) = \{t \in \mathcal{D}, Re(t + i)^3 = 0\}.$$

Линии $(p_{01}), (p_{02})$ в точке $(0, -1)$ разветвляются (рис. 1). Ветви обозначим $(p_{01}^j) (j = 1, 2), (p_{02}^j) (j = 1, 2, 3)$.

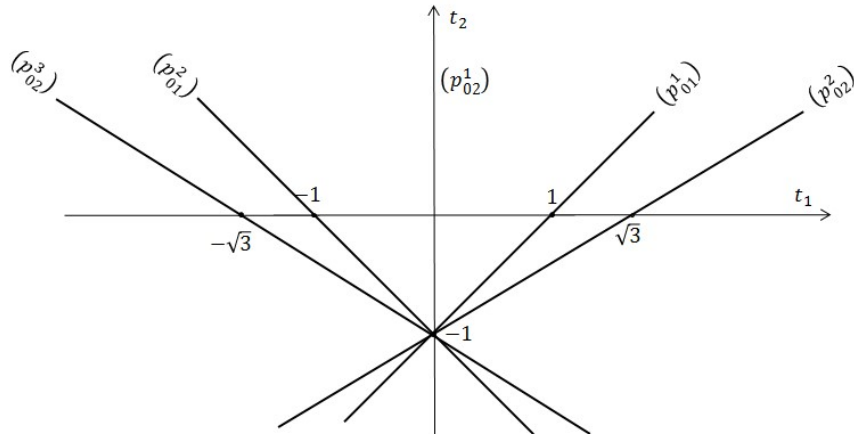


Рисунок 1 – Ветви линий $(p_{01}), (p_{02})$

Ветви $(p_{01}^j), (p_{02}^j)$ область \mathcal{D} разделяют соответственно на секторы $\Omega_{1k} (k = 1, 2, 3, 4), \Omega_{2k} (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (рис. 2, 3).

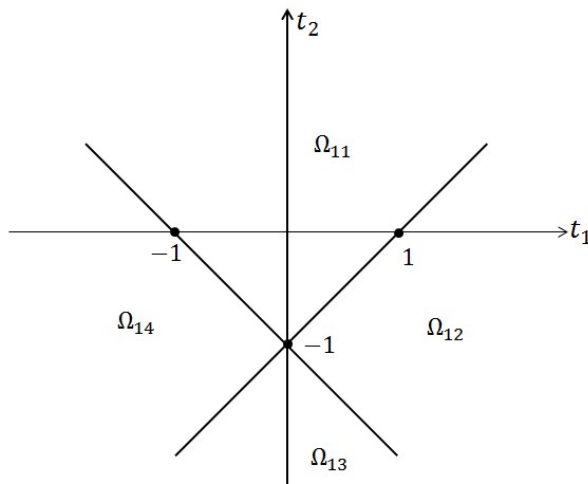


Рисунок 2 – Секторы $\Omega_{1k} (k = 1, \dots, 4)$

Рассматривая линии уровня $(\bar{p}_{01}), (\bar{p}_{02})$ (симметричные к линиям $(p_{01}), (p_{02})$ относительно действительной оси), определим секторы $\bar{\Omega}_{1k} (k = 1, 2, 3, 4), \bar{\Omega}_{2k} (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Далее симметрию будем понимать относительно действительной оси.

Определим область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Для этого возьмем прямую $t_2 + 1 = \frac{1}{t_0} t_1$, где $t_0 < -\sqrt{3}$.

Данная прямая проходит через точки $B_1(t_0; 0)$ и $B_2(0; -1)$. Часть прямой, соединяющей точки B_1 и B_2 , обозначим (K_1) . Часть оси t_2 , соединяющей точки B_2 и $\bar{B}_2(0; 1)$, обозначим (K_2) . Обозначим (\bar{K}_1) , симметричный к (K_1) . Область, ограниченную $(K_1), (K_2) (\bar{K}_1)$, возьмем за область \mathcal{D}_0 .

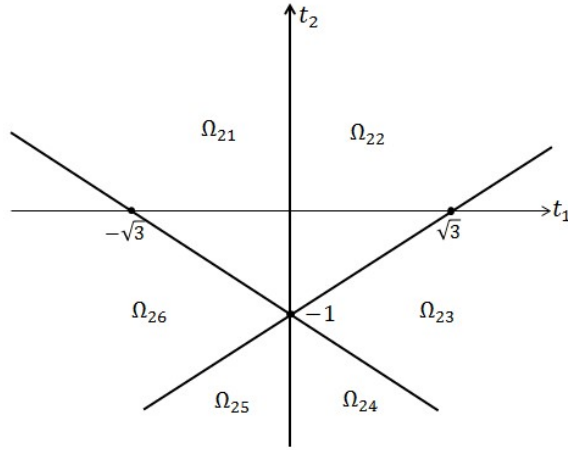


Рисунок 3 – Секторы Ω_{2k} ($k = 1, \dots, 6$)

Как показывают исследования, проведенные в [15], основное влияние на асимптотическое поведение (10) оказывают точки поворота $(\pm i)$. Для выяснения влияния точек поворота, на асимптотическое поведение решения (10), произведем деление области \mathcal{D}_0 . Возьмем прямые $t_1 = -q$ ($0 \ll q \ll -t_0$), $t_1 = -\varepsilon^\lambda$ ($0 < \lambda < 1$), $t_2 = -1 - \frac{\varepsilon^\lambda}{q}$ и точки пересечения с (K_1) обозначим B_3, B_4 , которые имеют координаты $B_3\left(-q, -1 - \frac{q}{t_0}\right)$, $B_4\left(-\varepsilon^\lambda, -1 + \frac{\varepsilon^\lambda}{q}\right)$. Далее возьмем точки $B_5\left(0, -1 + \frac{\varepsilon^\lambda}{q}\right)$, $\bar{B}_5, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4$. Треугольники с вершинами $B_1 B_3 \bar{B}_3, B_2 B_4 B_5, \bar{B}_2 \bar{B}_4 \bar{B}_5$ соответственно обозначим $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4, \bar{\mathcal{D}}_4$; четырехугольники с вершинами $B_3 B_4 \bar{B}_4 \bar{B}_3, B_4 B_5 \bar{B}_5 \bar{B}_4$ обозначим $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ (рис. 4).

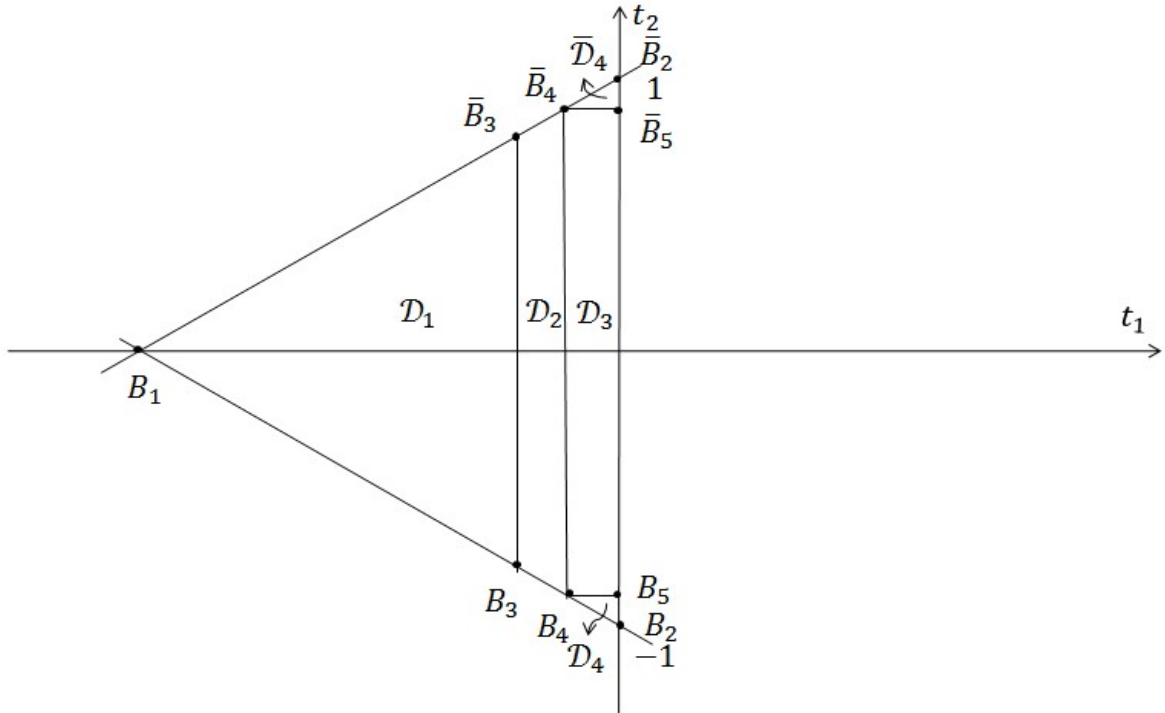


Рисунок 4 – Области $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \bar{\mathcal{D}}_4$

3. Выбор путей интегрирования

Если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_4$, то для z_{1m}, z_{3m} путь состоит из части $(K_1)[B_1, \tilde{t}]$ и отрезка $(K_3)\{(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{D}_0, \tau_1 = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \leq \tau_2 \leq t_2\}[\tilde{t}, t]$ ($\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2, t = \tilde{t}_1 + it_2$); если $t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$, то путь состоит из части $(K_1)[B_1, B_2], (K_2)[B_2, \tilde{t}]$, отрезка $(K_4)\{(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{D}_0, t_1 \leq \tau_1 \leq 0, \tau_2 = \tilde{t}_2 = t_2\}[\tilde{t}, t]$ ($\tilde{t} = i\tilde{t}_2, t = t_1 + i\tilde{t}_2$).

Для z_{2m}, z_{4m} путь интегрирования выбирается симметричным к путям z_{1m}, z_{3m} . Заметим, пути интегрирования выбраны так, чтобы по ним функции $Re(t \pm i)^2, -Re(t \pm i)^3$ не возрастали.

При оценке и доказательстве равномерной сходимости используем свойства аналитических функций [21-22].

4. Оценка и доказательство равномерной сходимости последовательных приближений

Оценку последовательных приближений проведем покомпонентно. Оценим

$$z_{11} = z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (i+t_0)^2}{2\varepsilon} - \int_{B_1(\text{по } (K_1))}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}(\text{по } (K_2))}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau \quad (11)$$

Сначала рассмотрим случай $t \in \mathcal{D}_1$.

Учитывая уравнение (K_1) , первый интеграл в (11), представим в виде $(t_0 = t_{01} + it_{02})$

$$J_1 = \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau = \int_{t_{01}}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{(t+i)^2 - \left(1 + \frac{i}{t_0}\right)^2 \tau_1^2}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{i}{t_0}\right) d\tau_1.$$

Отсюда, переходя к модулю, получим

$$|J_1| = O(1) \int_{t_{01}}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1.$$

По (K_1) функция $Re(t+i)^2$ строго убывает, следовательно $|J_1|$, ограничена. Для получения более точной оценки к интегралу в правой части применим интегрирование по частям и получим

$$|J_1| \leq C_1 \varepsilon, \tilde{t} \in (K_1).$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$J_2 = \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau.$$

Если учесть выбранный путь интегрирования, что

$$J_2 = \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 + 2it_1(t_2+1) + (\tau_2+1)^2 - 2i\tau_1\tau_2}{2\varepsilon} id\tau_2.$$

Отсюда, переходя к модулю, получим

$$|J_2| \leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 - (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon} d\tau_2.$$

К интегралу, применяя интегрирование по частям, получим

$$|J_2| \leq C_1 \varepsilon.$$

Согласно полученным оценкам, имеем

$$|z_{11}| \leq C_2 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_1. \quad (12)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_2$. Для этого случая также справедливо представление (11). Только в этом случае для оценки интеграла $|J_1|$ надо применить метод Лапласа [19-20].

Функция

$$\varphi(\tau_1) = -\left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tau_1^2$$

строго возрастает при $t_0 \leq \tau_1 \leq \tilde{t}_1$ и наибольшее значение принимает при $\tau_1 = \tilde{t}_1$. Тогда

$$|J_1| = O\left(\frac{\varepsilon}{-\left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^2}{2\varepsilon}\right).$$

По выбранным путям функция $Re(t+i)^2$ строго убывает, следовательно

$$\exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^2}{2\varepsilon} \leq 1.$$

Таким образом

$$|J_1| \leq O\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{t}_1}\right).$$

Если учесть $t_0 \leq \tilde{t}_1 \leq -\varepsilon^\lambda$, то

$$|J_1| \leq C_1 \varepsilon^{1-\lambda}, 0 < \lambda < 1.$$

Оценим J_2 . Учтем $-(t_2+1)^2 + (\tau_2+1)^2 \leq 2(\tau_2 - t_2)(\tilde{t}_2+1)$. Получим

$$|J_2| \leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{(\tilde{t}_2+1)(\tau_2 - t_2)}{2\varepsilon} d\tau_2 = \frac{\varepsilon}{\tilde{t}_2+1} \left(1 - e^{-\frac{(\tilde{t}_2+1)(\tilde{t}_2-t_2)}{2\varepsilon}}\right).$$

Отсюда учитывая $\tilde{t}_2+1 \geq \frac{\varepsilon^\lambda}{\sqrt{3}}$ и $\tilde{t}_2 \leq t_2$, имеем

$$|J_2| \leq C_1 \varepsilon^{1-\lambda}.$$

Согласно полученным оценкам для z_{11} , справедлива оценка

$$|z_{11}| \leq C_2 \varepsilon^{1-\lambda}, t \in \mathcal{D}_2. \quad (13)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_4$. Для этого случая z_{11} представим в виде

$$\begin{aligned} z_{11} = & z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (i+t_0)^2}{2\varepsilon} - \int_{B_1}^{B_4} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \\ & - \int_{B_4}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) первый интеграл обозначим J_1 , второй – J_2 , третий – J_3 . Если учесть оценки, проведенные при $t \in \mathcal{D}_2$, то

$$|J_1| \leq C_1 \varepsilon^{1-\lambda}.$$

Учитывая выбранный путь, получим

$$\begin{aligned} J_2 = & \left| O(1) \int_{-\varepsilon^\lambda}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{(t+i)^2 - \left(1 + \frac{i}{t_0}\right)^2 \tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 \right| \\ \leq & O(1) \int_{-\varepsilon^\lambda}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{t_1^2 - (t_2+1)^2 - \left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 = \\ = & O(\tilde{t}_1 + \varepsilon^\lambda) \leq C_1 \varepsilon^\lambda, \\ |J_2| \leq & C_1 \varepsilon^\lambda. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |J_3| \leq & \left| \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 + (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon} d\tau_2 \right| \leq C_1 |t_2 - \tilde{t}_2| \leq C_1 \varepsilon^\lambda. \\ |J_3| \leq & C_1 \varepsilon^\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом

$$|z_{11}| = O(\varepsilon^{1-\lambda}) + O(\varepsilon^\lambda).$$

Если $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, то $|z_{11}| = O(\varepsilon^\lambda)$;

Если $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, то $|z_{11}| = O(\varepsilon^{1-\lambda})$.

Сравнивая полученные оценки, можно утверждать, $\lambda = \frac{1}{2}$ является оптимальным. Учитывая дальнейшие оценки последовательных приближений, возьмем случай $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

Тогда

$$|z_{11}| \leq C_2 \varepsilon^\lambda, \quad t \in \mathcal{D}_4. \quad (14)$$

Объединив оценки (13) и (14), можем написать

$$|z_{11}| \leq C_2 \varepsilon^\lambda, \quad t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_4. \quad (15)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$. Имеем

$$\begin{aligned} z_{11} = z_1^0 \exp \frac{(t+i)^2 - (i-\sqrt{3})^2}{2\varepsilon} - \int_{B_1}^{B_2} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau \\ - \int_{B_2}^{B_5} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \\ - \int_{B_5}^{\tilde{t}} \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{(t+i)^2 - (\tau+i)^2}{2\varepsilon} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Как и в предыдущем случае, интегралы в (16) по порядку следования обозначим $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4$. Учитывая предыдущие оценки, имеем

$$|\mathcal{J}_1| = O(\varepsilon^\lambda),$$

$$|\mathcal{J}_2| = O(\varepsilon^\lambda),$$

$$|\mathcal{J}_3| \leq \left| \int_{-1+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{q}}^{\tilde{t}_2} \exp \frac{-(t_2+1)^2 - (\tau_2+1)^2}{2\varepsilon} d\tau_2 \right| = O\left(\frac{1}{\tilde{t}_2+1}\right) = O(\varepsilon^\lambda),$$

$$|\mathcal{J}_4| \leq \left| \int_0^{t_1} \exp \frac{t_1^2 - \tau_1^2}{2\varepsilon} d\tau_1 \right| \leq |t_1| = O(\varepsilon^\lambda).$$

Итого

$$|z_{11}| \leq C_2 \varepsilon^\lambda, \quad t \in \mathcal{D}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \quad (17)$$

Объединив оценки (12), (15) и (17), можем написать оценку

$$|z_{11}| \leq C_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^\lambda, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (18)$$

Согласно выбранным (симметричным) путям интегрирования, имеем

$$|z_{21}| \leq C_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^\lambda, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (19)$$

Переходим к оценке z_{31} и z_{32} .

Сначала оценим z_{31} . При оценке z_{31} поступим так же, как и при оценке z_{11} .

Пусть $t \in \mathcal{D}_1$. Тогда

$$z_{31} = z_3^0 \exp \frac{-(t+i)^3 - (i+t_0)^3}{3\varepsilon} - \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau. \quad (20)$$

При оценке интегралов в (20) учтем, по выбранным путям функция $(-Re(t+i))^3$ не возрастает. В (20) к первому и второму интегралу, применяя интегрирование по частям, получим

$$|z_{31}| \leq C_3 \varepsilon, \quad t \in \mathcal{D}_1. \quad (21)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_2$. Для этого случая также справедливо представление (20). Сначала проведем асимптотическую оценку первого интеграла

$$\mathcal{J}_1 = \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau.$$

Уравнение пути имеет вид $t_2 + 1 = \frac{1}{t_0} t_1$. Учитывая это, имеем

$$J_1 = \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{-(t+i)^2 + \left(\tau_1 + i \frac{1}{t_0} \tau_1\right)^3}{3\varepsilon} \left(1 + \frac{i}{t_0}\right) d\tau_1.$$

Отсюда, переходя к модулю, получим

$$|J_1| \leq \left|1 + \frac{i}{t_0}\right| \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} \exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2 + 1)^2) + \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tau_1^3}{3\varepsilon} d\tau_1.$$

К полученному интегралу можно применить метод Лапласа.

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau_1) = \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tau_1^3$, которая строго возрастает и наибольшее значение принимает при $\tau_1 = \tilde{t}_1$, причем $\varphi'(\tau_1) > 0$. Тогда справедливо представление

$$|J_1| \leq C_{11} \frac{\varepsilon}{3 \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) t_1^2} \exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2 + 1)^2) + \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^3}{3\varepsilon}.$$

Поскольку по выбранным путям функция $(-Re(t+i)^3)$ не возрастает, тогда

$$\exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2 + 1)^2) + \left(1 - \frac{3}{t_0^2}\right) \tilde{t}_1^3}{3\varepsilon} \leq 1,$$

а также $t_0 \leq \tilde{t}_1 \leq -\varepsilon^\lambda$.

Таким образом

$$|J_1| \leq C_1 \varepsilon^{1-2\lambda}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}.$$

Теперь оценим второй интеграл. Имеем

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{\tilde{t}_1(t_2 + 1)^2 - 3\tilde{t}_1(\tau_2 + 1)^2}{\varepsilon} d\tau_2 \leq \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{2\tilde{t}_1(t_2 - \tau_2)(\tilde{t}_2 + 1)}{\varepsilon} d\tau_2 \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{t}_1(\tilde{t}_2 + 1)} \leq C_1 \varepsilon^{1-2\lambda}, \\ |J_2| &\leq C_1 \varepsilon^{1-2\lambda}. \end{aligned}$$

Теперь можем написать оценку для z_{31} .

$$|z_{31}| \leq C_1 \varepsilon^{1-2\lambda}, \quad t \in \mathcal{D}_2 \quad (22)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_4$. Для этого также воспользуемся представлением (20), но первый интеграл разделим так

$$J_1 = \int_{B_1}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau = \int_{B_1}^{B_4} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau + \int_{B_4}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau. \quad (23)$$

В (23) первый интеграл (J_{11}), согласно проведенной оценке в предыдущем случае, имеет оценку

$$|J_{11}| \leq C_{11} \varepsilon^{1-2\lambda}. \quad (24)$$

Для второго интеграла в (23) справедлива оценка

$$|J_{12}| \leq C_{12} \varepsilon^\lambda. \quad (25)$$

В (20) для второго интеграла имеем оценку

$$|J_2| \leq C_{13} \varepsilon^\lambda.$$

На основе (24), (25) получим

$$|J_1| \leq C_{11} \varepsilon^{1-2\lambda} + C_{12} \varepsilon^\lambda.$$

По условию $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Если $1 - 2\lambda \leq \lambda$ ($\lambda \geq \frac{1}{3}$) должно быть

$$|J_1| \leq C_1 \varepsilon^{1-2\lambda},$$

если $\lambda \leq 1 - 2\lambda$, то

$$|J_1| \leq C_1 \varepsilon^\lambda.$$

Отсюда вытекает, наиболее оптимальным вариантом является $\lambda = \frac{1}{3}$. Тогда

$$|z_{31}| \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad t \in \mathcal{D}_4. \quad (26)$$

Оценки (18), (19), (21) видоизменяются

$$|z_{11}| \leq C_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (27)$$

$$|z_{21}| \leq C_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (28)$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$. z_{31} можем написать выражение

$$z_{31} = z_3^0 \exp \frac{-(t+i)^3 + (t_0+i)^3}{3\varepsilon} - \int_{B_1}^{B_2} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau - \int_{B_2}^{\tilde{t}} \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau - \int_{\tilde{t}}^t \exp \frac{-(t+i)^3 + (\tau+i)^3}{3\varepsilon} d\tau \quad (29)$$

В (29) первый интеграл (J_1) имеет оценку

$$|J_1| \leq C_{11} \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (30)$$

Для второго интеграла (J_2) имеем

$$J_2 = \left| \int_0^{\tilde{t}_2} \exp \frac{-(t+i)^3 - i(\tau_2+1)^3}{3\varepsilon} id\tau_2 \right|.$$

Введем обозначение

$$J_{21} = \int_{-1}^{\tilde{t}_2} \exp \frac{-i(\tau_2+1)^3}{3\varepsilon} d\tau_2.$$

Для асимптотической оценки J_{21} применим метод стационарной фазы [19-20]. Введем в рассмотрение функцию $\varphi_1(\tau_2) = -(\tau_2+1)^3$. $\varphi_1(\tau_2)$ имеет одну стационарную точку при $\tau_2 = -1$, причем $\varphi_1''(-1) = 0$, $\varphi_1'''(-1) = -6 < 0$. При таких условиях J_{21} имеет оценку

$$|J_{21}| \leq C_{21} \varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Таким образом

$$|J_2| \leq C_{21} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \exp \frac{-(t_1^3 - 3t_1(t_2+1)^2)}{3\varepsilon}.$$

Нетрудно проверить

$$\forall t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4 \quad (-(t_1^3 - 3t_1(t_2+1)^2) \leq 0).$$

Тогда

$$|J_2| \leq C_{21} \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (31)$$

В (29) третий интеграл (J_3) имеет оценку

$$|J_3| \leq C_{31} \varepsilon^{\frac{1}{3}}. \quad (32)$$

На основе оценок (30), (31), (32) получим оценку

$$|z_{31}| \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad t \in \mathcal{D}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \quad (33)$$

Объединяя оценки (21), (22), (26), (33), имеем

$$|z_{31}| \leq C_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (34)$$

Аналогичная оценка имеет место для z_{41} , т.е.

$$|z_{41}| \leq C_1 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (35)$$

Как показывают исследования, проведенные в [13-18] на оценку последующих приближений, существенное (определяющее) влияние оказывают оценки первых приближений. Также сходимость последовательных приближений определяется оценкой первых приближений.

В итоге решение (9) существует $\forall t \in \mathcal{D}_0$, и для этого решения справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq C_2 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (36)$$

Если учесть проведенные преобразования неизвестных функций, для решения (1)-(2)-(3) имеем

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq C_3 \begin{cases} \varepsilon, & t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}, & t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_4. \end{cases} \quad (37)$$

Оценку (37), рассматривая на действительной оси, получим, что для решения задачи (1), (3) происходит задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия. На ЗР существенное влияние оказывают точки поворота $(\pm i)$ функций $\lambda_{3,4} = -(y \pm i)^2$. Время задержки решения отрезок $[-1; 0]$. При $y = -1$ устойчивость положения равновесия теряется.

Заключение

Исследована система, состоящая из четырех уравнений быстрых переменных и одного уравнения медленной переменной. Система быстрых переменных имеет положение равновесия. При этом устойчивость положения равновесия теряется при двух значениях медленной переменной. Введено понятие задержки решения вблизи неустойчивого положения равновесия и доказано — для решения системы быстрых переменных происходит задержка решений. Основным моментом исследования являются геометрические построения с использованием линии уровня и свойств гармонических функций.

Литература:

1. Иманалиев, З.К. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с минимальной энергией /З.К.Иманалиев, Б.Ы.Аширбаев// Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2020. – № 3. – С. 89–97.
2. Соболев В.А., Осинцев М.С. Метод интегральных многообразий в задачах оптимального управления сингулярно возмущенными системами // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – ИПУ РАН. 2014. – С. 769–779.
3. Аширбаев, Б.Ы. Асимптотическое решение линейной сингулярно возмущенной задачи оптимального быстрогодействия /Б.Ы.Аширбаев, Г.Ж.Апышова // Наука, новые технологии и инновации. – 2021. – № 7. – С. 3–9.
4. Воропаева, Н.В. Декомпозиция разнотемповых динамических систем со слабой диссипацией / Н.В.Воропаева// Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2013. – Вып. 9/2 (110). – С. 5–10.
5. Шаршеналиев, Ж. О подходах упрощения сложных динамических систем/ Ж.О.Шаршеналиев// Проблемы автоматизации и управления. – 2020. – №1 (38). – С.5–7.
6. Gorelov G.N., Duck-trajectories in a thermal explosion problem / G.N.Gorelov, V.A.Sobolev // Appl. Math. Lett. – 1992. – V. 5. – № 6. – P. 3–6.
7. Gorelov, G.N. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory / G.N.Gorelov, V.A. Sobolev // Combust. Flame. – 1991. – V. 87. – P. 203–210.

8. Голодова, Е.С. Оценка затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах с траекториями-утками / Голодова Е.С., Щепакина Е.А. // Вестник СамГУ – Естественная серия. – 2013. – № 3 (104). – С. 12–24.
9. Понтрягин, Л.С. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром / Л.С.Понтрягин, Мищенко Е.Ф. // Труды МИАН. – 1985. – Т. 169. – С. 99–118.
10. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – Москва: Наука, 1975. – 247 с.
11. Шишкова, М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных/М.А.Шишкова // Докл.АН СССР. 1973. – Т.209. –№3. – С. 576–579.
12. Нейштадт, А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II / А.И.Нейштадт // Дифференц. уравн. – 1988. – Т. 24. – №2. – С.226–233.
13. Алыбаев, К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости / К.С.Алыбаев //Вестник КГНУ. – Серия 3. – Вып 6. – Бишкек, 2001. – С.190–200.
14. Турсунов, Д. А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» /Д.А.Турсунов //Вестник Томск. госунивер. Матем. и механика. – 2018. – №54. – С.46–57.
15. Алыбаев, К.С. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений / К.С.Алыбаев, М.Н.Нурматова //Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – №12. – С. 12–19.
16. Алыбаев, К.С. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений / К.С.Алыбаев, Н.К.Мусакулова//Вестник ОшГУ. – 2022. – № 4. – С. 206–217.
17. Алыбаев, К.С. Рекуррентное представление решений сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота в комплексной области/К.С.Алыбаев, М.Н.Нурматова // Вестник ЖАГУ. – 2021. –№1(46). – С.14–19.
18. Алыбаев, К.С. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях /К.С.Алыбаев, М.Н.Нурматова, Н.К.Мусакулова //Бюллетень науки и практики. – 2024. – Т. 10. –№3. – С. 14–27.
19. Копсон Э. Асимптотические разложения. – Москва: Мир.1966. –156 с.
20. Федорюк М.В. Метод перевала. – Москва: Наука,1977. – 352с.
21. Лаврентьев М.А., ШабатБ.Ф. Методы теории функции комплексного переменного. – Москва: Наука. 1973. – 739с.
22. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1967. – 444с.