МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

УДК 517.927+681.5

А. Керимбеков, akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б.Н.Ельцина

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В статье исследованы вопросы построения частных решений уравнения Риккати. Приведены ранее неизвестные свойства уравнения Риккати и разработан алгоритм построения частного решения.

Ключевые слова: уравнение Риккати, интегральное тождество, коэффициентно-сопряженные уравнения, дробно-линейное преобразование, определитель Якоби, алгоритм построения частного решения.

Введение

Уравнение Риккати с момента его появления (1724 г) привлекает внимание математиков тем, что, несмотря на обилие исследований (см. библиографию [1]), до настоящего времени не разработана методика построения его частного решения.

С появлением теории оптимального уравнения, т.е. начиная с 60-х годов 20-столетия, интерес к уравнению Риккати еще более возрос, ибо вопросы разрешимости многих задач оптимизации, особенно при решении задачи синтеза оптимального уравнения, сводятся к разрешимости уравнения Риккати.

С другой стороны, уравнение Риккати тесно связано с линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка и линейными системами второго порядка дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, для которых также не разработаны методы построения их частных решений.

В данной статье приведены результаты исследований уравнения Риккати, в частности, обнаружен класс уравнений Риккати, коэффициенты которых обладают специфическими свойствами и разработан алгоритм построения их частных решений. Далее рассмотрены вопросы о приведении (преобразовании) произвольного уравнения Риккати к уравнению этого класса.

1. Коэффициентно-сопряженные (КС) уравнения Риккати

Рассмотрим уравнение Риккати вида

$$z'(x) = k_0(x) + k_1(x)z(x) + k_2(x)z^2(x), \qquad (1)$$

где коэффициенты $k_0(x), k_1(x)$ и $k_2(x)$ − непрерывные функции.

Теорема 1 (свойство 1). Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int k_0(x)e^{-\int k_0(x)dx}dx * \int k_2(x)e^{-\int k_1(x)dx}dx = 2, \qquad (2)$$

и $y_0(x)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'_0(x) - k_1(x)y_0(x) = k_0(x)\ , \qquad (3)$$

полученного при нулевом значении произвольной постоянной. Тогда функция

$$z(x) = -y_0(x) \qquad (4)$$

является частным решением уравнения (1).

Доказательство утверждения теоремы несложное и может быть доказано несколькими способами, в частности по методике, изложенной в [2].

Утверждения теоремы мы проиллюстрируем на примере простейшего уравнения

$$z'(x) = e^{2x} + z(\mathrm{x}) - 2e^{-2x}z^2(\mathrm{x}) \; , \qquad (5)$$

где $k_0(x) = e^{2x}$, $k_1(x) = 1$, $k_2(x) = -2e^{-2x}$.

Поскольку

$$\int k_0(x)e^{-\int k_1(x)dx}dx = \int e^{2x} * e^{-x}dx = e^x$$

и

$$\int k_2(x)e^{\int k_1(x)dx}dx = -2\int e^{-2x} * e^{x}dx = 2e^{-x},$$

то интегральное соотношение (2) имеет место. Теперь находим функцию $y_0(\mathrm{x})$ как решение уравнения

$$y'_0(x) - y_0(x) = e^{2x},$$

т.е. в виде

$$y_0(x) = e^x(\mathrm{c} + y^x)|_{c=0} = e^{2x}.$$

Далее образуем функцию

$$z(x) = -y_0(x) = -e^{2x}. \qquad (6)$$

и непосредственной проверкой убеждаемся, что она является частным решением уравнения Риккати

$$z'(x) = e^{2x} + z(x) - 2e^{-2x}z^2(x). \qquad (7)$$

Заметим, что коэффициенты уравнения

$$z'(x) = k_2(x) - k_1(x)z(x) + k_0(x)z^2(x) \qquad (8)$$

также удовлетворяют интегральному тождеству (2). Поэтому и для уравнения (8) справедлив аналогичный результат (свойство 2), т.е. если $y_0(x)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'_0(x) + k_1(x)y_0(x) = k_2(x) \; ,$$

то функция

$$z(x) = -y_0(x)$$

является частным решением уравнения (8).

На примере уравнения (5) легко проверить, что функция $y_0(x) = 2e^{-2x,}$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'_0(x) + y_0(x) = -2e^{-2x} \ ,$$

а функция

$$z(x) = -2e^{-2x}$$

частным решением уравнения Риккати вида

$$z'(x) = -2e^{-2x} - z(x) + e^{2x}z^2(x).$$

Определение 1. Уравнения (1) и (8), коэффициенты которых удовлетворяют интегральному тождеству (2), назовем коэффициентно-сопряженными (КС) уравнениями Риккати.

Множество коэффициентно-сопряженных уравнений образует класс уравнений Риккати, для каждого из которых удается найти частное решение.

Класс коэффициентно-сопряженных (КС) уравнений Риккати является основным звеном при определении частного решения произвольного уравнения Риккати.

2. О преобразовании уравнения Риккати

Рассмотрим вопрос о преобразовании уравнения Риккати с произвольными коэффициентами в уравнение класса коэффициентно-сопряженных (КС) уравнений Риккати.

Рассмотрим уравнение Риккати

$$y'(x) = p(x) + q(x)y + z(x)y^2 \ , \tag{9}$$

где коэффициенты *p(x), q(x), z(x)* – произвольные непрерывные функции.

Общеизвестно, что уравнение (9) при дробно-линейной замене искомой функции *y(x)* на новую искомую функцию *z*(x) по формуле

$$y(x) = \frac{a(x)z(x)+b(x)}{(c(x)z(x)+h(x)}, \tag{10}$$

где *a(x), b(x), c(x), h(x)* – непрерывные и непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{Q}(x) = a(x)h(x) - c(x)b(x) \neq 0, \tag{11}$$

может быть преобразовано в уравнение Риккати вида

$$z'(x) = k_0(x) + k_1(x)z(x) + k_2(x)z^2(x), \tag{12}$$

где

$$k_0(x) = \frac{1}{Q(x)}\left[\, p(x)h^2(x) + q(x)b(x)h(x) + r(x)b^2(x) - \big(b'(x)h(x) - - b(x)h'(x)\big)\right] =$$

$$\varphi_1[x, a(x), b(x), c(x), h(x), p(x), q(x), r(x)] \ ; \tag{13}$$

$$k_1(x) = \frac{1}{Q(x)}\left[2p(x)c(x)h(x) + q(x)c(x)b(x) + a(x)h(x) + 2r(x)a(x)b(x) - \left(a'(x)h(x) - a(x)h'(x) + b(x)c(x) - b(x)c'(x)\right)\right] =$$

$$= \varphi_2[x, a(x), b(x), c(x), h(x), p(x), q(x), r(x),]; \qquad (14)$$

$$k_2(x) = \frac{1}{Q(x)}\left[p(x)c^2(x) + q(x)a(x)c(x) + r(x)a^2(x) - \left(a'(x)c(x) - a(x)c'(x)\right)\right] =$$

$$= \varphi_3[x, a(x), b(x), c(x), h(x), p(x), q(x), r(x)]. \qquad (15)$$

Лемма 1. Пусть (12) является уравнением класса (КС). Тогда при любых заданных коэффициентах $k_0(x), k_1(x), k_2(x)$ существует хотя бы одно уравнение Риккати с коэффицентами *p(x),q(x),r(x)*, которые при дробно-линейном преобразовании (10) переходят в уравнение (12).

Доказательство. При дробно-линейном преобразовании (10) коэффициенты уравнений (9) и (12) будут связаны соотношениями (13)-(15). Для доказательства утверждения теоремы достаточно проверить разрешимости системы (13)-(15) относительно коэффициентов *p(x), q(x), r(x)* при заданных коэффициентах $k_0(x), k_1(x), k_2(x)$. Поскольку определитель Якоби для функции $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \varphi_3(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$D\left(\frac{\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \varphi_3(\cdot)}{p, q, r}\right) = \frac{1}{[a(x)h(x) - c(x)b(x)]^3}\begin{bmatrix} h^2(x) & b(x)h(x) & b^2(x) \\ c^2(x) & a(x)c(x) & a^2(x) \\ 2c(x)h(x) & c(x)b(x) + q(x)h(x) & 2a(x)b(x) \end{bmatrix} = -1,$$

то, как общеизвестно, система (13)-(15) всегда разрешима относительно функции *p(x),q(x),r(x)*, то есть имеет место соотношения

$$p(x) = \Psi_1\big(x, q(x), b(x), c(x), h(x)\big),$$
$$q(x) = \Psi_2\big(x, q(x), b(x), c(x), h(x)\big),$$
$$r(x) = \Psi_3\big(x, q(x), b(x), c(x), h(x)\big),$$

где *a(x), b(x),c(x),h(x)* – произвольные функции, удовлетворяющие ограничению (11).

Заметим, что условие выбора функций *a(x), b(x), c(x), h(x)* позволяет их использовать и для определения коэффициентов $k_0(x), k_1(x), k_2(x)$ уравнения (12) при заданных коэффициентах *p(x),q(x),r(x)* уравнения (9). В самом деле, согласно системе равенств (13)-(15), интегральное тождество (2) можно переписать в виде

$$\left(\int \varphi_1\,[x, a(x), b(x), c(x), h(x)]e^{-\int \varphi_2[x,a(x),b(x),c(x),h(x)]dx}dx\right) * \\ * \left(\int \varphi_3\,[x, a(x), b(x), c(x), h(x)]e^{\int \varphi_3[x,a(x),b(x),c(x),h(x)]dx}dx\right) \equiv 2,$$

которое может быть выполнено за счет выборов функций *a(x), b(x), c(x) и h(x)*, удовлетворяющих ограничению (11).

Теперь теоретические выводы проиллюстрируем на примере уравнения (5), где $k_0(x) = e^{2x}, k_1(x) = 1, k_2(x) = -2e^{-2x}$. В дробно-линейном преобразовании (10) положим

$a(x) = e^{x}$, $b(x) = -e^{-x}$, $c(x) = e^{x}$, $h(x) = e^{-x}$

и с учетом ограничения (11)

$$a(x)h(x) - c(x)b(x) = e^{x}e^{-x} + e^{x}e^{-x} = 2$$

выписываем систему равенств (13)-(15) относительно коэффициентов уравнения (9), т.е. получим систему

$$\begin{cases} p(x) - q(x) + r(x) = 2e^{4x}, \\ p(x) - r(x) = 3, \\ p(x) + q(x) + r(x) = -4e^{-4x}. \end{cases}$$

Решением этой системы являются функции

$$p(x) = \frac{1}{2}(3 + e^{4x} - 2e^{-4x}),$$
$$q(x) = -(e^{4x} + 2e^{-4x}),$$
$$r(x) = -\frac{1}{2}(3 - e^{4x} + 2e^{-4x}),$$

и уравнение (9) имеет вид

$$y'(x) = \frac{1}{2}(3 + e^{4x} - 2e^{-4x}) - (e^{4x} + 2e^{-4x})y(x) - \frac{1}{2}(3 - e^{4x} + 2e^{-4x})y^2(x)\ . \quad (16)$$

Это уравнение при дробно-линейном преобразовании вида

$$y(x) = \frac{e^{x}z(x) - e^{-x}}{e^{x}z(x) + e^{-x}} = \frac{e^{2x}z(x) - 1}{e^{2x}z(x) + 1} \quad (17)$$

переходит в уравнение (5), коэффициенты которого удовлетворяют интегральному тождеству (2). Решение уравнения (5) $z(x) = -e^{2x}$ подставим в (17) и получим функцию

$$y(x) = \frac{e^{4x} + 1}{e^{4x} - 1},$$

которая является частным решением уравнения (16).

Заключение

В заключение отметим, что разработанная методика решения уравнения Риккати создает предпосылку для развития новых научных направлений и может быть полезной при разработке новых конструктивных методов решения прикладных задач естествознания, техники и оптимизации.

Литература

1. Егоров А.И. Уравнения Риккати. – М.: Изд-во «Солон-пресс», 2017. – 448 с.
2. Kerimbekov A. On a Class of Solutions of the Nonlinear Integral Fredholm Equation //Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation. Proceedings of the 11th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden) 2017). Switzerland, Birkhauser. –2019. – P. 191–197.