УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

Доулбекова Салтанат Байызбековна, к.ф.-м.н., доцент,
doulbekova25@mail.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина
Бишкек, Кыргызстан
Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина,
Бишкек, Кыргызстан
Баетов Авалкан Куканович к.ф.-м.н., доцент,
carterbek@mail.ru
Институт новых информационных технологий,
Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева
Бишкек, Кыргызстан

В статье исследованы вопросы разрешимости задачи оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма, при минимизации интеграла энергии управляющей силы. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого колебательного процесса. В задаче оптимизации требуется найти управление, которое переводит колебательный процесс из одного состояния в другое заданное состояние. В процессе исследования установлено, что искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода и найдены достаточные условия существования решения этой некорректной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, обобщенное решение, интеграл энергии, функционал, граничное управление, оптимальное управление.

Постановка задачи оптимизации и ее разрешимость. Рассмотрим задачу граничного управления колебательными процессами, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^T u^2(t)dt, \tag{1}$$

энергии управления (управляющих сил) при переводе управляемого процесса, описываемого краевой задачей

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \tag{2}$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), \qquad V_t(0,x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = u(t) \tag{4}$$

из начального состояния $V(0,x) = \varphi_1(x)$ в заданное другое положение

$$V(T,x) = \xi(x) \tag{5}$$

за заданное время T. $K\; t,\tau$ – заданная функция, определенная в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$, и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau dt = K_0 < \infty,$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D)$, ; $\xi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные функции из пространства $H(0,1)$, причем функция $\psi_1(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка; λ – параметр, T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$, $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y .

Обобщенное решение краевой задачи. Известно [1,2], что краевая задача (2)-(4) при заданных условиях имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \quad , \tag{6}$$

где система функций $z_n(x) = \sqrt{\dfrac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\dots$, опеделяется как решение краевой задачи

$$z_n''(x) + \lambda_n^2 z_n(x) = 0,\ z_n'(0) = 0,\ z_n'(1) + \alpha z_n(1) = 0,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$ и удовлетворяют следующим условиям

$$\lambda_n \le \lambda_{n+1}, \forall n = 1,2,3,...,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty.\quad (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n = 1,2,3,...;$$

А коэффициенты Фурье $V_n(t)$ определяются соотношениями

$$V_n(t) = \psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T D_n(t,\tau,\lambda) z_n(1) u(\tau) d\tau, \tag{7}$$

$$\psi_n(t,\lambda) = \psi_n\left[\cos\lambda_n s + \lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)cos\lambda_n s ds\right] + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\left[\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right], \tag{8}$$

$$D_n(t,s,\lambda) = \begin{cases} \sin\lambda_n(t-\tau) + \lambda\displaystyle\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & 0\le\tau\le t,\\ \displaystyle\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & t\le\tau\le T, \end{cases} \tag{9}$$

$$B_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n = 1,2,3,... \tag{10}$$

– резольвента ядра

$$K_n(t,s) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ \ K_n(0,s) = 0,$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\dots$, определяются по формулам

$$\begin{aligned} &K_{n,i+1}(t,s) = \int_0^T K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau,\quad i = 1,2,3,...,\\ &K_{n,1}(t,s) \equiv K_n(t,s). \end{aligned} \tag{11}$$

Согласно равенствам (10) - (11), имеет место следующая оценка

$$\left|B_n(t,s,\lambda)\right| \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0 T^2}} \cdot \sqrt{\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}, \tag{12}$$

которая выполняется для значений λ, удовлетворяющих следующее неравенство

$$|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0} < 1, \quad n = 1,2,3,.... \tag{13}$$

Используя неравенства (12), получаем оценку:

$$\int_0^T \left|B_n(t,s,\lambda)\right|^2 ds \le \frac{K_0 T}{\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0}^{\;2}}, \tag{14}$$

Ряд Неймана (10) абсолютно сходится при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$ для значений параметра λ, удовлетворяющего условию

$$\lambda < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}. \tag{15}$$

Заметим, что радиус сходимости $|\lambda| < \dfrac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}.$ ряда Неймана увеличивается с ростом n, и резольвента $B_n(t, s,\lambda)$ является непрерывной функцией как сумма абсолютно сходящегося ряда. Отметим, что при значениях параметра $|\lambda| < \dfrac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}.$ ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции для любого (!) $n = 1,2,3,...$

Доказано, что построенная функция $V(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$ и обобщенным решением краевой задачи (2) - (4).

Решение задачи оптимизации. Обобщенное решение (6) подставляем в (5), после несложных вычислений получим уравнение:

$$\int_0^T a_n(\eta)u(\eta)d\eta = h_n, \qquad n = 1,2,3,...$$

где

$$a_n(\eta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(T-\eta) + \lambda\int_\eta^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds\right)z_n(1); \tag{16}$$

$$h_n = \xi_n - \varphi_{1n}\left[\cos\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] - \frac{\varphi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]. \tag{17}$$

Таким образом, искомое управление следует находить как решение системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эту систему, введя обозначения

$$a(t) = (a_1(t),..., a_n(t)\,...),$$
$$h = (h_1,...,h_n,...)$$

перепишем в матричной форме

$$\int_0^T a(t)u(t)dt = h. \tag{18}$$

Теперь исследуем разрешимость интегрального уравнения (18).

Решение ищем в виде:

$$u(t) = a^*(t)\cdot\alpha + \beta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\alpha_k + \beta; \tag{19}$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ – неизвестный вектор, а β – произвольне постоянное , символ * – знак транспонирования.

Подставляя (19) в (18), получим бесконечномерную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений вида :

$$\int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot (a_1(t) \dots a_n(t) \dots) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix} dt + \int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \beta\, dt = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_2 \\ \dots \end{pmatrix} \tag{20}$$

Введем бесконечномерную квадратную матрицу

$$A = \int_0^T a(t) \cdot a^*(t) dt = \int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot (a_1(t) \dots a_n(t) \dots) dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^T (a_1(t) \cdot a_1(t)) dt & \dots & \int_0^T (a_1(t) \cdot a_n(t)) dt & \dots \\ \dots\dots\dots & & & \\ \int_0^T (a_n(t) \cdot a_1(t)) dt & \dots & \int_0^T (a_n(t) \cdot a_n(t)) dt & \dots \\ \dots\dots\dots & & & \end{pmatrix} \tag{21}$$

и

$$q = \int_0^T a(t) dt = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (20) перепишем в матричной форме

$$A\alpha = H, \quad H(\beta) = h - \beta q, \tag{22}$$

Поскольку в системе (22) матрица A бесконечномерная, то при исследовании разрешимости системы (22) будем пользоваться вариационными методами, т.к. в этом случае методы решения конечномерных систем не пригодны. В этой связи ниже будем доказывать несколько утверждений:

Лемма 1. Вектор H является элементом пространства l_2.

Лемма 2. При любом $\alpha \in l_2$ вектор $A\alpha$ является элементом пространства l_2.

Доказательства лемм проводится непосредственно вычислением и не представляет труда.

Лемма 3. Бесконечномерная матрица A является положительно определенной.

Доказательство. Пусть $\gamma \in l_2$ – произвольный элемент. Тогда для скалярного произведения в l_2 имеет место неравенство

$$\langle A\gamma,\gamma\rangle=\gamma^{*}A\gamma=\gamma^{*}\int_{0}^{T}a(t)dt\cdot\gamma\ \ =\int_{0}^{T}\gamma^{*}a(t)a^{*}(t)\gamma dt=\int_{0}^{T}\left\|a^{*}(t)\gamma\right\|^{2}dt\geq 0,$$

Откуда следует положительность матрицы A. Далее из равенства

$$\left\|a^{*}(t)\gamma\right\|^{2}=0,\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\ a_{k}(t)\gamma_{k}\ ^{2}=0,$$

С учетом того, что функции $a_n(t),\ \ n=1,2,3,...$ являются линейно независимыми на отрезке $[0,T]$, равенства $a_k(t)\gamma_k=0,$ выполняются тогда и только тогда, когда все $\gamma_k=0,\ \ \ k=1,2,3,...$ Следовательно, матрица A является положительно определенной.

Теорема. Алгебраическая система (22) при каждом фиксированном β имеет единственное решение в простанстве l_2.

Доказательство. В пространстве l_2 определим оператор $D[\alpha]=A\alpha,\ D:l_2\to l_2$. Тогда оператор $D[\alpha]$ является положительно-определенным, что следует из Леммы 3, т.е.

$$\langle\alpha,D(\alpha)\rangle_{l_2}=\langle\alpha,A\alpha\rangle=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_{ik}\alpha_i\alpha_k\geq 0.$$

Оператор $D[\cdot]$ является линейным, т.е. для любых произвольных постоянных C_1 и C_2 и произвольных векторов $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ пространства l_2 имеет равенства

$$D\left[C_1\alpha^{(1)}+C_2\alpha^{(2)}\right]=C_1D[\alpha^{(1)}]+C_2D[\alpha^{(2)}].$$

Из линейности следует, что оператор $D[\alpha]$ является взаимно однозначным оператором. Следовательно, существует обратный оператор $D^{-1}[\alpha]$, который, согласно теореме, из функционального анализа [3] является ограниченным оператором, т.е. оценка

$$\left\|D^{-1}[\alpha]\right\|_{l_2}\leq D_0\left\|\alpha\right\|_{l_2},\quad D_0>0\ \text{– постоянная,}\tag{23}$$

имеет место для любого вектора $\alpha\in l_2$.

Таким образом, решение уравнения (22) определяется по формуле

$$\alpha=D^{-1}[H]=D^{-1}[h+\beta q].$$

Это решение подставляя в (19), получим решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (18) в виде

$$u(t)=a^{*}(t)\cdot\alpha+\beta=a^{*}(t)D^{-1}[h+\beta q]+\beta,\tag{24}$$

где β – произвольная постоянная.

Таким образом, установлено, что интегральное уравнение (18) имеет бесконечно много решений вида (24), среди которых может быть искомое управление $u^0(t)$, минимизирующее функционал (1).

Далее, для определения управления $u^0(t)$ рассмотрим функционал

$$J[u(t,\beta)]=\int_{0}^{T}u^{2}(t,\beta)dt=\int_{0}^{T}\ a^{*}(t)D^{-1}[h+\beta q]+\beta\ ^{2}dt,\tag{25}$$

И параметр β находим как решение экстремальной задачи вида

$$\Phi\ \ \beta\ \ =J[u(t,\beta)]\to\min,\quad\beta\in R,\tag{26}$$

Поскольку решается задача на безусловный экстремум, то для функции

$$\Phi\ \ \beta\ \ =\int_0^T u^2(t,\beta)dt=\int_0^T\left[a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ +\beta(1+a^*(t)D^{-1}[q])\right]^2 dt;$$

применяя классический метод решения, находим сначала критическую точку из условия

$$\Phi'\ \ \beta\ \ =2\int_0^T\left[a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ +\beta(1+a^*(t)D^{-1}\ \ q\ \ )\right]\ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ dt=$$

$$=2\int_0^T a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ dt+2\beta\int_0^T\ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ ^2 dt=0;$$

Т.е. критической точкой является

$$\beta^0=-\frac{\int_0^T a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ dt}{\int_0^T\ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ ^2 dt} \tag{27}$$

Далее, из неравенства

$$\Phi''\ \ \beta\ \ =2\int_0^T\left[a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ +\beta(1+a^*(t)D^{-1}\ \ q\ \ )\right]\ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ dt=$$

$$=2\int_0^T\ \ 1+a^*(t)D^{-1}[q]\ \ ^2 dt>0;$$

Следует, что значение β^0 является точкой минимума функции $\Phi\ \ \beta$.

Тогда для любого управления имеет место неравенство

$$J[u(t,\beta^0)]\le J[u(t,\beta)].$$

Причем равенство имеет место лишь при $\beta=\beta^0$. Таким образом, искомое управление $u^0(t)$, на котором функционал (1) принимает наименьшее возможное значение, определяется по формуле

$$u^0(t)=a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ +\beta^0(1+a^*(t)D^{-1}\ \ q\ \ ). \tag{28}$$

Теперь проверим, что найденное оптимальное управление $u^0(t)$ является элементом гильбертового пространства $H(0,T)$ квадратично суммируемых функций, т.е. является допустимым управлением. Это следует из неравенства

$$\left\|u^0(t)\right\|^2_{H[0,T]}=\int_0^T\ \ u^0(t)\ \ ^2 dt=\int_0^T\ \ a^*(t)D^{-1}\ \ h\ \ +\beta^0(1+a^*(t)D^{-1}\ \ q\ \ )\ \ ^2 dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\left(\left|\left\langle a(t),D^{-1}\ \ h\ \ \right\rangle\right|^2+2\beta^{02}\ \ 1+\left|\left\langle a(t),D^{-1}\ \ q\ \ \right\rangle\right|^2\ \ \right)dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\ \ \left\|a(t)\right\|^2_{l_2},D_0^2\left\|h\right\|^2_{l_2}+2\beta^{02}\ \ 1+\left\|a(t)\right\|^2_{l_2}D_0^2\left\|q\right\|^2_{l_2}\ \ \ \ dt<\infty,$$

которое имеет место в силу следующих соотношений.

Заключение

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть использованы на производстве, а также при разработке новых методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Рассматриваемая задача оптимизации является не корректной, что следует из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, поэтому полученные результаты, в частности, разработанный алгоритм построения решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, представляет практический и теоретический интерес.

Литература

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 500 с.
2. Керимбеков А., Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. – 2020. – Т.132, №3. – С. 6–16.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520с.