УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

Доулбекова Салтанат Байызбековна, к.ф.-м.н., доцент,
doulbekova25@mail.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина
Бишкек, Кыргызстан
Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина,
Бишкек, Кыргызстан
Баетов Авалкан Куканович к.ф.-м.н., доцент,
carterbek@mail.ru
Институт новых информационных технологий,
Кыргызского Государственного университета имени И. Арабаева
Бишкек, Кыргызстан

В статье исследованы вопросы разрешимости задачи оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма, при минимизации интеграла энергии управляющей силы. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого колебательного процесса. В задаче оптимизации требуется найти управление, которое переводит колебательный процесс из одного состояния в другое заданное состояние. В процессе исследования установлено, что искомое оптимальное управление определяется, как решение бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода и найдены достаточные условия существования решения этой некорректной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, обобщенное решение, интеграл энергии, функционал, граничное управление, оптимальное управление.

Постановка задачи оптимизации и ее разрешимость. Рассмотрим задачу граничного управления колебательными процессами, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)]=\int_0^T u^2(t)dt, \tag{1}$$

энергии управления (управляющих сил) при переводе управляемого процесса, описываемого краевой задачей

$$V_{tt}=V_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau, \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T \tag{2}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x), \qquad V_t(0,x)=\psi_2(x), \quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0)=0, \quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=u(t) \tag{4}$$

из начального состояния $V(0,x)=\varphi_1(x)$ в заданное другое положение

$$V(T,x)=\xi(x) \tag{5}$$

за заданное время T. $K\ t,\tau$ –заданная функция, определенная в области $D=\{0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\ \ t,\tau\ \ d\tau dt=K_0<\infty,$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D),$; $\xi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ заданные функции из пространства $H(0,1)$, причем функция $\psi_1(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка; λ - параметр, T - фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$,

$H(Y)$ - гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Обобщенное решение краевой задачи. Известно [1,2], что краевая задача (2)-(4) при заданных условиях имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x) \tag{6}$$

где система функций $z_n(x)=\sqrt{\dfrac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$, опеделяется как решение краевой задачи

$$z_n''(x)+\lambda_n^2 z_n(x)=0,\ \ z_n'(0)=0,\ \ z_n'(1)+\alpha z_n(1)=0,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяют следующим условиям

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\forall n=1,2,3,\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.\quad (n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n=1,2,3,\dots;$$

А коэффициенты Фурье $V_n(t)$ определяются соотношениями

$$V_n(t)=\psi_n(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T D_n(t,\tau,\lambda)z_n(1)u(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_n\left[\cos\lambda_n s+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)cos\lambda_n sds\right]+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right], \tag{8}$$

$$D_n(t,s,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t-\tau)+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & 0\le\tau\le t,\\ \int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & t\le\tau\le T,\end{cases} \tag{9}$$

$$B_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,\dots \tag{10}$$

- резольвента ядра

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ \ K_n(0,s)=0,$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$, определяются по формулам

$$\begin{aligned}&K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau,\quad i=1,2,3,\dots,\\ &K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s).\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно равенствам (10) - (11) имеет место следующая оценка

$$\left|B_n(t,s,\lambda)\right| \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0 T^2}} \cdot \sqrt{\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}, \tag{12}$$

которая выполняется для значений λ удовлетворяющих следующего неравенства

$$|\lambda| \frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0} < 1, \quad n = 1,2,3,.... \tag{13}$$

Используя неравенства (12) получаем оценку:

$$\int_0^T \left|B_n(t,s,\lambda)\right|^2 ds \le \frac{K_0 T}{\left(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0}\right)^2}, \tag{14}$$

Ряд Неймана (10) абсолютно сходится при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$ для значений параметра λ удовлетворяющих условию

$$\lambda < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}. \tag{15}$$

Заметим. что радиус сходимости $|\lambda| < \dfrac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}$. ряда Неймана увеличивается с ростом n и резольвента $B_n(t,s,\lambda)$ является непрерывной функцией, как сумма абсолютно сходящегося ряда. Отметим, что при значениях параметра $|\lambda| < \dfrac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}$. ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции для любого (!) $n = 1,2,3,...$.

Доказано, что построенная функция $V(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$ и обобщенным решением краевой задачи (2) - (4).

Решение задачи оптимизации. Обобщенное решение (6) подставляем в (5) после не сложных вычислений получим уравнение

$$\int_0^T a_n(\eta)u(\eta)d\eta = h_n, \qquad n = 1,2,3,... .$$

где

$$a_n(\eta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(T-\eta) + \lambda\int_\eta^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds\right) z_n(1); \tag{16}$$

$$h_n = \xi_n - \varphi_{1n}\left[\cos\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] - \frac{\varphi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]. \tag{17}$$

Таким образом, искомое управление следует находить как решение системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эту систему, введя обозначения

$$a(t) = (a_1(t),..., a_n(t) ...),$$

$$h = (h_1,..., h_n,...)$$

перепишем в матричной форме

$$\int_0^T a(t)u(t)dt = h. \tag{18}$$

Теперь исследуем разрешимость интегрального уравнения (18).

Решение ищем в виде:

$$u(t) = a^*(t)\cdot\alpha + \beta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\alpha_k + \beta; \tag{19}$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$ - неизвестный вектор, а β - произвольне постоянное , символ * - знак транспонирования.

Подставляя (19) в (18) получим бесконечномерную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений вида :

$$\int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot (a_1(t)\ldots a_n(t)\ldots) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \ldots \end{pmatrix} dt + \int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot \beta\, dt = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_2 \\ \ldots \end{pmatrix} \tag{20}$$

Введем бесконечномерную квадратную матрицу

$$A = \int_0^T a(t)\cdot a^*(t)dt = \int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot (a_1(t)\ldots a_n(t)\ldots)dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^T (a_1(t)\cdot a_1(t))dt & \ldots & \int_0^T (a_1(t)\cdot a_n(t))dt & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_0^T (a_n(t)\cdot a_1(t))dt & \ldots & \int_0^T (a_n(t)\cdot a_n(t))dt & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \tag{21}$$

и

$$q = \int_0^T a(t)dt = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (20) перепишем в матричной форме

$$A\alpha = H, \quad H(\beta) = h - \beta q, \tag{22}$$

Поскольку в системе (22) матрица A бесконечномерная, то при исследовании разрешимости системы (22) будем пользоваться вариационными методами, т.к. в этом случае методы решения конечномерных систем не пригодны. В этой связи ниже будем доказывать несколько утверждений:

Лемма 1. Вектор H является элементом пространства l_2.

Лемма 2. При любом $\alpha \in l_2$ вектор $A\alpha$ является элементом пространства l_2.

Доказательства лемм проводится непосредственно вычислением и не представляет труда.

Лемма 3. Бесконечномерная матрица A является положительно определенной.

Доказательство. Пусть $\gamma \in l_2$- произвольный элемент. Тогда для скалярного произведения в l_2 имеет место неравенство

$$\langle A\gamma,\gamma\rangle=\gamma^*A\gamma=\gamma^*\int_0^T a(t)dt\cdot\gamma \;=\int_0^T\gamma^*a(t)a^*(t)\gamma dt=\int_0^T\left\|a^*(t)\gamma\right\|^2dt\ge 0,$$

Откуда следует положительность матрицы A. Далее из равенства

$$\left\|a^*(t)\gamma\right\|^2=0,\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\; a_k(t)\gamma_k\;^2=0,$$

С учетом того, что функции $a_n(t),\;\; n=1,2,3,...$ являются линейно независимыми на отрезке $[0,T]$, равенства $a_k(t)\gamma_k=0,$ выполняются тогда и только тогда когда все $\gamma_k=0,\;\; k=1,2,3,...$. Следовательно, матрица A - является положительно определенной.

Теорема. Алгебраическая система (22) при каждом фиксированном β имеет единственное решение в простанстве l_2.

Доказательство. В пространстве l_2 определим оператор $D[\alpha]=A\alpha,\; D:l_2\to l_2$. Тогда оператор $D[\alpha]$ является положительно - определенным, что следует из Леммы 3, т.е.

$$\langle\alpha,D(\alpha)\rangle_{l_2}=\langle\alpha,A\alpha\rangle=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_{ik}\alpha_i\alpha_k\ge 0.$$

Оператор $D[\cdot]$ является линейным, т.е. для любых произвольных поятоянных C_1 и C_2 и произвольных векторов $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ пространства l_2 имеет равенства

$$D\left[C_1\alpha^{(1)}+C_2\alpha^{(2)}\right]=C_1D[\alpha^{(1)}]+C_2D[\alpha^{(2)}].$$

Из линейности следует, что оператор $D[\alpha]$ является взаимно - однозначным оператором. Следовательно, существует обратный оператор $D^{-1}[\alpha]$, который согласно теороеме из функционального анадлиза [3] является ограниченным оператором, т.е. оценка

$$\left\|D^{-1}[\alpha]\right\|_{l_2}\le D_0\left\|\alpha\right\|_{l_2},\quad D_0>0 \text{ - постоянная} \tag{23}$$

имеет место для любого вектора $\alpha\in l_2$.

Таким образом, решение уравнения (22) определяется по формуле

$$\alpha=D^{-1}[H]=D^{-1}[h+\beta q]$$

Это решение подставляя в (19) получим решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (18) в виде

$$u(t)=a^*(t)\cdot\alpha+\beta=a^*(t)D^{-1}[h+\beta q]+\beta, \tag{24}$$

где β - произвольная постоянная.

Таким образом, устанолено, что интегральное уравнение (18) имеет бесконечно много решений вида (24), среди которых может быть искомое управление $u^0(t)$, минимизирующее функционал (1).

Далее, для определения управления $u^0(t)$ рассмотрим функционал

$$J[u(t,\beta)]=\int_0^T u^2(t,\beta)dt=\int_0^T\; a^*(t)D^{-1}[h+\beta q]+\beta\;^2\,dt, \tag{25}$$

И параметр β находим как решение экстремальной задачи вида

$$\Phi\;\beta\;=J[u(t,\beta)]\to\min,\quad \beta\in R, \tag{26}$$

Поскольку решается задача на безусловный экстремум, то для функции

$$\Phi(\beta)=\int_0^T u^2(t,\beta)dt=\int_0^T\left[a^*(t)D^{-1}(h)+\beta(1+a^*(t)D^{-1}[q])\right]^2dt;$$

применяя классический метод решения, находим сначала критическую точку из условия

$$\Phi'(\beta)=2\int_0^T\left[a^*(t)D^{-1}(h)+\beta(1+a^*(t)D^{-1}(q))\right](1+a^*(t)D^{-1}[q])dt=$$

$$=2\int_0^T a^*(t)D^{-1}(h)(1+a^*(t)D^{-1}[q])dt+2\beta\int_0^T(1+a^*(t)D^{-1}[q])^2dt=0;$$

Т.е. критической точкой является

$$\beta^0=-\frac{\int_0^T a^*(t)D^{-1}(h)(1+a^*(t)D^{-1}[q])dt}{\int_0^T(1+a^*(t)D^{-1}[q])^2dt} \tag{27}$$

Далее, из неравенства

$$\Phi''(\beta)=2\int_0^T\left[a^*(t)D^{-1}(h)+\beta(1+a^*(t)D^{-1}(q))\right](1+a^*(t)D^{-1}[q])dt=$$

$$=2\int_0^T(1+a^*(t)D^{-1}[q])^2dt>0;$$

Следует, что значение β^0 является точкой минимума функции $\Phi(\beta)$,

Тогда для любого управления имеет место неравенство

$$J[u(t,\beta^0)]\le J[u(t,\beta)].$$

Причем, равенсто имеет место лишь при $\beta=\beta^0$. Таким образом, искомое управление $u^0(t)$ на котором функционал (1) принимает наименьшее возможное значение определяется по формуле

$$u^0(t)=a^*(t)D^{-1}(h)+\beta^0(1+a^*(t)D^{-1}(q)). \tag{28}$$

Теперь проверим, что найденное оптимальное управление $u^0(t)$ является элементом гильбертового пространства $H(0,T)$ квадратично суммируемых функций, т.е. является допустимум управлением. Это следует из неавенства

$$\left\|u^0(t)\right\|^2_{H[0,T]}=\int_0^T(u^0(t))^2dt=\int_0^T(a^*(t)D^{-1}(h)+\beta^0(1+a^*(t)D^{-1}(q)))^2dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\left(\left|\left\langle a(t),D^{-1}(h)\right\rangle\right|^2+2\beta^{02}\left(1+\left|\left\langle a(t),D^{-1}(q)\right\rangle\right|^2\right)\right)dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\left(\|a(t)\|^2_{l_2},D_0^2\|h\|^2_{l_2}+2\beta^{02}\left(1+\|a(t)\|^2_{l_2}D_0^2\|q\|^2_{l_2}\right)\right)dt<\infty,$$

которое имеет место в силу следующих соотношений:

Заключение.

В заключение отметим, что полученные результаты может быть использованы на производстве, а также при разработке новых методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Рассматриваемая задача оптимизации является не корректной, что следует из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, поэтому полученные результаты в частности разработанный алгоритм построения решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода представляет практический и теоретический интерес.

Литература

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами - М.: Наука, 1978.-500с.
2. Керимбеков А., Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, -2020, Т.132, №3. –С. 6-16.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.- М.: Наука, 1965.-520с.