

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

УДК 517.97

С. Б. Доулбекова, doulbekova25@mail.ruА. Керимбеков, akl7@rambler.ru

КРСУ им. первого президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

**О НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ
ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЯ**

В статье исследована разрешимость задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма. Исследования проводятся, когда функция внешних сил нелинейна и зависит от управляющих функций, на которые налагаются ограничения. Оценкой качества управления выбран интегральный функционал общего вида.

Установлено, что искомое оптимальное управление следует искать среди решений бесконечной системы нелинейных уравнений Фредгольма 1-го рода, разрешимость которых исследована операторными методами. Доказано, что операторное уравнение имеет бесконечно много решений. Найдены достаточные условия существования решения задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача, обобщенное решение, интеграл энергии, функционал, граничное управление, оптимальное управление.

Введение

В данной статье рассматривается задача нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма. Особенность задачи заключается в наличии ограничений на управления, а также в немонотонной зависимости функции источника от управляющих воздействий.

С использованием операторных методов исследуется существование и структура решений возникающих интегральных уравнений, формулируются достаточные условия разрешимости задачи оптимального управления и предложен подход к построению оптимального управления.

Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации колебательных процессов, целью которой является найти распределенное управление $u^0(t, x) \in H(Q)$, минимизирующее интегральный функционал вида

$$J[u, t, x] = \int_0^T \int_0^1 p[t, x, u, t, x] dx dt, \quad (1)$$

из множества решений следующей краевой задачи

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + f[t, x, u, t, x], \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

при условии, что обобщенное решение

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) q_n(s) ds + q_n(t) \right] z_n(x), \quad (5)$$

$$q_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) f_n(\tau, u) d\tau, \quad (6)$$

удовлетворяет соотношению

$$V(t, x) = \xi(x), \quad (7)$$

которое является дополнительным ограничением на управление.

Здесь функции $\psi_1(x) \in H_1(0,1)$, $\psi_2(x) \in H(0,1)$, $\xi(x) \in H(0,1)$, $p[t, x, u(t, x)] \in H(Q)$ и $f[t, x, u(t, x)] \in H(Q)$ заданы, и известные функции $f[t, x, u(t, x)]$ и $p[t, x, u(t, x)]$ нелинейны по отношению управляющих функций.

В связи с тем, что на практике сталкиваются с процессами описываемых функций, имеющих разрыв, часто пользуются обобщенным решением [1,3].

Определение. Обобщенное решение краевой задачи (2)-(4) есть функция $V(t, x) \in H_1(Q)$, удовлетворяющая почти всюду уравнению (2) и условиям (3) в слабом смысле, т.е. $\forall \Phi_0(x) \in H(Q), \Phi_1(x) \in H(Q)$ выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 V(t, x) \Phi_0(x) dx = \int_0^1 \psi_1(x) \Phi_0(x) dx, \\ \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 V_t(t, x) \Phi_1(x) dx = \int_0^1 \psi_2(x) \Phi_1(x) dx,$$

а коэффициенты Фурье

$$V_n(t) = \int_0^1 V(t, x) z_n(x) dx \quad (8)$$

удовлетворяют интегральному уравнению

$$V_n(t) = \lambda \int_0^t K_n(t, s) V_n(s) ds + q_n(t), \quad (9)$$

где функция

$$K_n(t, s) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) K(\tau, s) d\tau, \quad K_n(0, s) = 0 \quad (10)$$

является ядром, а функция

$$q_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) f_n(\tau, u) d\tau \quad (11)$$

является свободным членом линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Решение задачи оптимизации

Предположим, что для управления $u^0(t, x) \in H(Q)$ выполнено равенство (7). Тогда согласно (5), из равенства

$$V(T, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) q_n(s) ds + q_n(T) \right] z_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n(x) = \xi(x), \quad \xi_n = \int_0^1 \xi(x) z_n(x) dx,$$

учитывая линейную независимость системы собственных функций $z_n(x)$,

относительно искомого управления $u^0(t, x) \in H(Q)$, получим систему равенств

$$\lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) q_n(s) ds + q_n(T) = \xi_n, \quad (12)$$

$$\lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \left(\psi_{1n} \cos \lambda_n s + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n s + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^s \sin \lambda_n(s - \tau) f_n(\tau, x, u) d\tau \right) ds +$$

$$+ \left(\psi_{1n} \cos \lambda_n T + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n T + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \sin \lambda_n(T - \tau) f_n(\tau, x, u) d\tau \right) = \xi_n. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$f_n(t, x, u) = \int_0^1 f(t, x, u(t, x)) z_n(x) dx,$$

имеем систему из нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{z_n(x)}{\lambda_n} \left\{ \sin \lambda_n(T - \tau) + \lambda \int_{\tau}^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n(s - \tau) ds \right\} f(\tau, x, u(\tau, x)) dx d\tau =$$

$$= \xi_n - \psi_{1n} \left\{ \cos \lambda_n T + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right\} -$$

$$- \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left\{ \sin \lambda_n T + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

которые, введя обозначения

$$G_n(\tau, x, \lambda) = \frac{z_n(x)}{\lambda_n} \left\{ \sin \lambda_n(T - \tau) + \lambda \int_{\tau}^T R_n(T, s, \lambda) \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(s - \tau) ds \right\}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

$$h_n(\lambda) = \xi_n - \psi_{1n} \left\{ \cos \lambda_n T + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right\} -$$

$$- \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left\{ \sin \lambda_n T + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right\}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

перепишем в виде

$$\int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) f(t, x, u(t, x)) dx dt = h(\lambda), \quad (17)$$

где

$$G(t, x, \lambda) = G_1(t, x, \lambda), \dots, G_n(t, x, \lambda), \dots, h(\lambda) = h_1(\lambda), \dots, h_n(\lambda), \dots. \quad (18)$$

Полагая

$$f(t, x, u(t, x)) = v(t, x), \quad (19)$$

уравнение (17) примет вид

$$\int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) v(t, x) dx dt = h(\lambda), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Доказательство следующих лемм производится непосредственными вычислениями.

Лемма 1. Вектор $h(\lambda)$ является элементом пространства ℓ_2 .

Лемма 2. Оператор $G(u) : H(Q) \rightarrow \ell_2$, где

$$G(u) = \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) v(t, x) dx dt.$$

На основе доказанных утверждений операторное уравнение (20) будем рассматривать в пространстве ℓ_2 . Его решение ищем в виде

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x, \lambda) \alpha_n + \gamma = G^*(t, x, \lambda) \alpha + \gamma, \quad (21)$$

где $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ – неизвестный вектор пространства ℓ_2 , γ – произвольная постоянная, (21), подставив в (20), имеем соотношение

$$\int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) [G^*(t, x) \alpha + \gamma] dx dt = h(\lambda),$$

или

$$\int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) G^*(t, x, \lambda) dx dt \cdot \alpha = h(\lambda) - \gamma \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) dx dt. \quad (22)$$

Введя обозначение

$$M = \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) G^*(t, x, \lambda) dx dt, \quad (23)$$

$$h(\lambda, \gamma) = h(\lambda) - \gamma \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) dx dt,$$

уравнение (22) перепишем в виде

$$M(\lambda) \cdot \alpha = h(\lambda, \gamma). \quad (24)$$

Это равенство есть бесконечномерная линейная неоднородная система алгебраических уравнений. Для исследования ее разрешимости используем операторный метод.

Лемма 3. Вектор $h(\lambda, \gamma)$ является элементом пространства ℓ_2 .

Лемма 4. Оператор $M : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $M \alpha = M(\lambda) \alpha$, т.е. $\forall \alpha \in \ell_2 \Rightarrow M \alpha \in \ell_2$.

Лемма 5. Оператор $M \alpha$ является положительно - определенным.

Таким образом, линейный оператор $M \alpha$ является положительно - определенным. Тогда, согласно теореме из функционального анализа [2], существует линейный ограниченный оператор $N : \ell_2 \rightarrow \ell_2$. Поэтому из системы (24) вектор α при каждом фиксированном значении произвольной постоянной γ имеет единственное решение

$$\alpha = Nh(\lambda, \gamma) = N \left(h \lambda - \gamma \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) dx dt \right). \quad (25)$$

Это решение, подставив в (21), получим функцию

$$v(t, x) = G^*(t, x, \lambda) N \left(h \lambda - \gamma \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) dx dt \right) + \gamma, \quad (26)$$

которая является решением системы состоящих из интегральных уравнений (20). Тогда из формул (17) и (19) можем получить решение системы из нелинейных интегральных уравнений (17) по формуле

$$f(t, x, u(t, x)) = G^*(t, x, \lambda) N \left(h \lambda - \gamma \int_0^T \int_0^1 G(t, x, \lambda) dx dt \right) + \gamma. \quad (27)$$

Пусть функция $f[t, x, u(t, x)] \in H(Q)$ не является монотонной по функциональной переменной $u(t, x)$, т.е. условие

$$f_u[t, x, u(t, x)] \neq 0 \quad (28)$$

не выполняется. Заметим, что при этом могут быть и управления $u(t, x)$, для которых выполняется условие

$$f_u[t, x, u(t, x)] = 0. \quad (29)$$

В этом случае алгебраическое уравнение (27) при каждом фиксированном γ^* может иметь несколько решений

$$u_k(t, x) = u_k(t, x, \gamma^*) \quad k = 1, 2, 3, \dots, r_{\gamma^*}, \quad (30)$$

где r_{γ^*} может быть конечным и бесконечным счетным числом. Отметим, что множество, состоящее из элементов вида (30), образует фактор-множество

$$u_{\gamma^*}(t, x) = u_1(t, x, \gamma^*), \dots, u_{r_{\gamma^*}}(t, x, \gamma^*). \quad (31)$$

Таким образом, установлено, что существует бесконечное множество управлений $u(t, x)$, при которых выполняется условие (5). Теперь из элементов этого множества выделим управление $u^0(t, x)$, такое, что функционал (1) будет принимать минимальное возможное значение.

О разрешимости задачи минимизации функционала в случае, когда $f(t, x, u(t, x))$ не является монотонной функцией. В этом случае искомое управление $u^0(t)$ следует искать среди элементов фактор-множеств (31), где γ^* – произвольная постоянная.

Сначала берем функцию

$$u_1(t, x) = u_1(t, x, \gamma). \quad (32)$$

Ее подставим в функционал (3.2.1) и получим функцию

$$\Phi_1(\gamma) = J[u_1(t, x)] = \int_0^T p[t, x, u_1(t, x)] dt = \int_0^T p[t, x, u_1(t, x, \gamma)] dt, \quad (33)$$

которую исследуем на экстремум. Точки минимума функции $\Phi_1(\gamma)$ находим из условий:

$$\begin{aligned}\Phi'_1(\gamma) &= \beta \int_0^T \int_0^1 p_u \left[t, x, u_1 \quad t, x, \gamma \right] u_{1\gamma} \quad t, x, \gamma \quad dx dt = 0, \\ \Phi''(\gamma) &= \beta \int_0^T \int_0^1 p_{uu} \left[t, x, u_1 \quad t, x, \gamma \right] u_{1\gamma} \quad t, x, \gamma^2 + \\ &+ p_u \left[t, x, u \quad t, x, \gamma \right] u_{1\gamma\gamma} \quad t, x, \gamma \quad dx dt \geq 0.\end{aligned}\tag{34}$$

Пусть $\gamma = \gamma^0$ является единственным решением задачи (34). Это значение подставим в (32), получим оптимальное управление

$$u_1^0(t, x) = u_1 \quad t, x, \gamma^0,$$

для которого имеет место соотношение

$$J \left[u_1^0 \quad t, x \right] = J \left[u_1 \quad t, x, \gamma^0 \right] \leq J \left[u_1 \quad t, x, \gamma \right].\tag{35}$$

Предположим теперь, что задача (34) имеет несколько решений $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. В этом случае, согласно (32), имеем управление

$$u_{11}(t, x) = u_1 \quad t, x, \gamma_1, \dots, u_m \quad t, x, \gamma_m,$$

для каждого из которых, решая задачу вида (34), находим управления $u_{11}^0(t, x), \dots, u_{1m}^0(t, x)$, которые удовлетворяют условиям

$$J \left[u_{11}^0(t, x) \right] = J \left[u_1 \quad t, x, \gamma_1 \right] \leq J \left[u_1 \quad t, x, \gamma \right],$$

$$J \left[u_{1m}^0 \quad t \right] = J \left[u_1 \quad t, x, \gamma_m \right] \leq J \left[u_1 \quad t, x, \gamma \right].$$

Далее из соотношения

$$J \left[\bar{u}_{10}^0 \quad t, x \right] = \min J \left[u_{11}^0(t, x) \right], \dots, J \left[u_{1m}^0(t, x) \right],\tag{37}$$

находим «оптимальное» управление $\bar{u}_{10}^0 \quad t, x$, которое будет единственным, если функционалы (36) принимают различные значения, в противном случае «оптимальными» будут несколько управлений.

Поступая аналогичным образом с управлениями

$$u_i(t, x) = u_i(t, x, \gamma), \quad i = 2, \dots, r_\gamma,$$

фактор множества (31) находим, что в случае, когда γ^0 является единственным решением соответствующей задачи $\Phi \rightarrow \min$ «оптимальным» управлением будет функция

$$u_i^0(t, x) = u_i(t, x, \gamma^0),\tag{38}$$

которая удовлетворяет соотношению (аналогично формуле (35))

$$J \left[u_i^0(t, x) \right] = J \left[u_i(t, x, \gamma^0) \right] \leq J \left[u_i(t, x, \gamma) \right], \quad i = 2, \dots, r_\gamma,\tag{39}$$

а в случае, когда задача $\Phi \rightarrow \min$ имеет решения $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ «оптимальным управлением» будет функция $\bar{u}_{i0}^0(t, x)$, которая определяется из соотношения

$$J \left[\bar{u}_{i0}^0 \quad t, x \right] = \min J \left[u_{i1}^0 \quad t, x \right], \dots, J \left[u_{im}^0 \quad t, x \right], \quad i = 2, \dots, r_\gamma,\tag{40}$$

где функционалы $J \left[\bar{u}_{ij}^0 \quad t \right]$, $i = 2, \dots, r_\gamma$, $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условиям:

$$J[u_{ij}^0, t] = J[u_i(t, x, \gamma_j)] \leq J[u_i(t, x, \gamma)] , \quad i = 2, \dots, r_\gamma, \quad j = 1, \dots, m. \quad (41)$$

Теперь рассмотрим вопросы определения глобального (истинного) оптимального управления $u^0(t, x)$.

Глобальное оптимальное управление $u^0(t)$ определяется соотношением (33) (если задача $\Phi \gamma \rightarrow \min$ имеет единственное решение γ^0) и соотношением (40) (если задача $\Phi \gamma \rightarrow \min$ имеет много решение $\gamma_1, \dots, \gamma_m$).

Заключение

В данной работе рассмотрена задача нелинейной оптимизации колебательных процессов с ограничениями на состояния управляемой системы, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма. Установлено, что задача сводится к исследованию бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений первого рода, разрешимость которых исследована операторными методами.

Доказано, что соответствующее операторное уравнение допускает бесконечно много решений, образующих фактор-множество, из которого выделяются управляющие функции, минимизирующие заданный интегральный функционал. Предложен метод нахождения глобального оптимального управления как в случае единственности, так и множественности решений задачи минимизации.

Полученные результаты расширяют возможности анализа и синтеза систем управления с распределенными параметрами и нелинейными характеристиками, а также служат основой для дальнейших исследований в области оптимизации сложных динамических систем с ограничениями.

Литература.

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 500 с.
2. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
3. Плотников В. И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – №4. – С. 743–755.