

УДК 530.1;536.7;544.2

Г. Ч. Тукембаева, tukembaeva.g@gmail.com

Б. К. Темиров

КНУ им. Ж. Баласагына

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ И СХЕМА ЕГО РЕШЕНИЯ

В статье исследовано метастабильное состояние – одна из актуальных проблем современной физики. В результате получена система алгебраических уравнений, описывающая метастабильное состояние гелия, водорода, неона, ацетилена и бензола, и дана схема решения, аналогичная решению биквадратного уравнения. В основе системы лежит кубическая функция, обобщающая модель Фогельсона-Лихачева (ФЛ) и уравнения Ван-дер-Ваальса, Исакавы-Чанга-Лу, Пэнга-Робинсона и Соаве-Редлиха-Квонга. Иррациональность ФЛ-модели преобразована на линейном отрезке полиномом 3-го порядка. Участок изотермы с положительным наклоном имеет единственную точку, в которой уравнение состояния определяется эллиптической кривой – кубической функцией, обобщающей уравнение Ван-дер-Ваальса. Такая система устойчивая в точке перегиба. По мере увеличения порядка полинома образуется горизонтальная площадка в точке перегиба, служащая точкой покоя. Для кубической функции ей отвечает сингулярность 2-го порядка, соответствующая метастабильному состоянию, которое устанавливается равенством нулю первой и второй производной. Перенос осей координат в точку перегиба разбивает график системы уравнений на квадранты. В III квадранте результат интегрирования уравнения состояния как простейшей дроби второго типа выражается функцией $\arctg$, что отвечает решению в виде солитона.

Ключевые слова: метастабильность, фазовый переход 1-го рода, спинодаль, устойчивость, точка перегиба.

Введение

Исследование метастабильного состояния является актуальной проблемой современной физики [1]-[3]. Иррациональная модель Фогельсона-Лихачева [4] (ФЛ-модель) обобщает уравнения Ван-дер-Ваальса, Бергло, Клаузиуса, Дитеричи, Соаве-Редлиха-Квонга, Пэнга-Робинсона, Исакавы-Чанга-Лу [5]-[6] и применена в практике добычи нефти при нагнетании пара в скважину [7]. ФЛ-модель обобщена в [8], [9] квадратичной и экспоненциальной зависимостью. В [10] выведено алгебраическое уравнение 3-го порядка, когда ФЛ-модель описывает гелий – He, водород – H_2 , неон – Ne, ацетилен – C_2H_2 и бензол – C_6H_6 , в соответствии с теорией уравнений нечетного порядка [11]. Исследование заложено А. Андроновым, где с помощью критерия Гурвица определена область допустимых значений собственных чисел λ_n многочлена n -степени – знакоположительной функции вириального разложения Камерлинг-Оннеса [12] плотности $\rho = m_0/V$ (m_0 – масса, V – объем) в метастабильном состоянии. Полином 3-го порядка в качестве уравнения состояния определяет поведение эллиптической кривой, которая проецируется на плоскость в виде точки самопересечения, но в трехмерном пространстве точка самопересечения разделена кратчайшим расстоянием между двумя прямыми [13]. Поэтому исследование эллиптических 3D- систем обобщает 2D- системы [14].

Цель работы – исследование полинома 3-го порядка в метастабильном состоянии.

Поставленная цель достигается следующим образом. В метастабильном состоянии первая и вторая производные кубической функции равны нулю. Следовательно, критическая точка K на критической изотерме является точкой перегиба, в том числе на субкритических изотермах, лежащих под критической изотермой (см. рис. 1), где P – давление, V – объем, который представляет собой элемент объема в методах конечных разностей или объемов. Кривая $abKcd$ – бинадаль (под ее колоколом область двухфазного равновесия жидкость – пар), eKf – спинодаль (под ее колоколом нереализуемые состояния), bc – коннода (линия конденсации), $abKe$ – область перегретой жидкости и $dcKf$ – переохлажденного пара. Площади закрасенных фигур под и над изобарой bc выбирают так, что они равны друг другу

согласно правилу Максвелла, предложенного в 1885 г. Тем не менее относительно точки перегиба правило может не выполняться. Рассматриваемое на рисунке 1 уравнение состояния имеет вид [10]

$$P = \frac{RT(V + c)^2}{(V - b)[V^2 + 2cV + (c^2 + \gamma R^2)]'}$$

R – универсальная газовая постоянная. Для нахождения точки перегиба вычислим первую и вторую производные выражения в правой части и приравняем их нулю. Поскольку вторая производная найдена дифференцированием первой производной, то полученные выражения являются системой уравнений, в которой необходимо сначала найти критические точки первой производной. Тогда критические точки второй производной содержат критические точки первой производной, но так как обе производные имеют четный порядок, то решение ищем по схеме биквадратного уравнения [15].

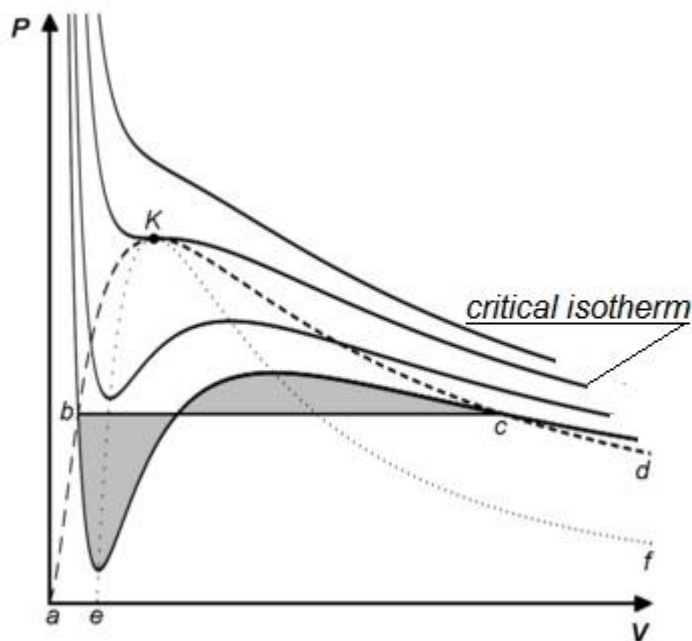


Рисунок 1 – Общий вид изотерм.

Точка K – критическая точка на критической изотерме (critical isotherm)

Четность вызвана кубической функцией в знаменателе, т.е. произведением полиномов 1-го и 2-го порядка, поэтому при дифференцировании дроби полином 1-го порядка равен константе, неравной нулю. Значит, получим уравнение 4-го порядка, точное решение которого дано Декартом-Эйлера и Феррари [16]. Вторая производная представляет собой уравнение 8-го порядка, но так как содержит найденные корни уравнения 4-го порядка, то решение ищем по схеме биквадратного уравнения с той разницей, что из уравнения 8-го порядка получается уравнение 4-го порядка. Таким образом, на возрастающих участках изотерм (под критической изотермой) исследуем устойчивость по критерию Гурвица в точках перегиба. Особенностью изотерм является кажущаяся неустойчивость, вызванная положительным наклоном возрастающего участка. Однако он устойчивый в точке перегиба, так как по мере увеличения порядка уравнения в ее окрестности образуется горизонтальная площадка покоя шара. Вне площадки шар чувствителен к малым возмущениям. Следовательно, точка перегиба – это единственная устойчивая точка на возрастающем участке изотермы. Найденная точка перегиба необходима для вывода решения в виде $\arctg$, т.е. солитона.

Схема решения в метастабильном состоянии

Разные квадранты вызывают перемену знаков P и V , так как точка перегиба – это центр симметрии кубической функции. Кубическое уравнение имеет смысл в I и III квадрантах, а потому начало координат перенесем в точку перегиба на возрастающем участке изотермы.

Она расположена под критической изотермой, далее называемой субкритической изотермой, где изотермический процесс принимает метастабильное состояние. Координаты точки устанавливаются по первой и второй производной dP/dV и d^2P/dV^2 . Равенство их нулю дает систему уравнений метастабильного состояния.

Точку перегиба под критической изотермой ищем численными методами, поэтому используем метод динамического программирования, так как конечная точка перегиба принадлежит критической изотерме. Тогда попятным движением назад, задавая температуры $T < T_c$, построим алгоритм динамического программирования. На шаге n имеем температуру T_n , на конечном шаге N совпадающую с критической температурой: $T_N = T_c$. Далее поиск сводится к поточечному заданию температуры $T_{n-1} < T_n$ и построению кривой, например, в виде сплайна. Тем самым строим огибающую или дискриминантную кривую, т.е. геометрическое место точек, в которых изотермический процесс имеет метастабильное состояние, а потому не подвержен фазовому переходу 1-го рода, который происходит в I квадранте. В динамике такой алгоритм будет ограничен соотношением шагов по времени и расстоянию. Окружение каждой из точек огибающей является элементом объема ΔV ; который граничит с комплексным пространством $\mathbf{C}$, но с другой стороны, с действительным пространством $\mathbf{R}$. Тогда на границе дискриминант равен нулю, следовательно, когда дискриминант меньше нуля, то корни комплексные. Однако когда дискриминант больше нуля, то корни действительные. Поскольку изотермы описываются полиномами, то они исследуются как уравнения, поэтому дискриминант приравниваем нулю на границе, отделяющей комплексные корни от действительных корней, для которых дискриминант меньше или больше нуля, соответственно.

Для уравнения состояния, полученного в [10]

$$P = \frac{RT(V + c)^2}{(V - b)[V^2 + 2cV + (c^2 + \gamma R^2)]},$$

первая производная

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV} \left[\frac{RT(V^2 + 2cV + c^2)}{(V - b)(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)} \right].$$

Ее вычисление как дроби дает

$$\frac{dP}{dV} = \frac{2RT(V + c)(V - b)(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)}{(V - b)^2(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^2} - \frac{RT(V^2 + 2cV + c^2)[(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2) + 2(V - b)(V + c)]}{(V - b)^2(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^2}.$$

После преобразований

$$\frac{dP}{dV} = \frac{-RT[V^4 + 2(A_2 - A_1)V^3 + (B_2 - 2B_1)V^2 + (C_2 - 2C_1)V + (D_2 + 2D_1)]}{(V - b)^2(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^2},$$

где числовые коэффициенты

$$\begin{aligned} A_1 &= 3c - b, \quad B_1 = 3c^2 - 3bc + \gamma R^2, \quad C_1 = c^3 - 3bc^2 + c\gamma R^2 - b\gamma R^2, \quad D_1 = bc^3 + bc\gamma R^2, \\ A_2 &= 5c - b, \quad B_2 = 12c^2 - 6bc + \gamma R^2, \quad C_2 = 6c^3 - 6bc^2 + 2c\gamma R^2, \\ D_2 &= c^4 - 2bc^3 + \gamma c^2 R^2. \end{aligned}$$

Приравнивая первую производную нулю, поскольку R – универсальная газовая постоянная и T – температура не равны нулю, получим уравнение 4-го порядка

$$\begin{aligned} V^4 + 2(A_2 - A_1)V^3 + (B_2 - 2B_1)V^2 + (C_2 - 2C_1)V + D_2 + 2D_1 &= 0, \\ V^4 + 2[5c - b - (3c - b)]V^3 + [12c^2 - 6bc + \gamma R^2 - 2(3c^2 - 3bc + \gamma R^2)]V^2 &+ \\ + [6c^3 - 6bc^2 + 2c\gamma R^2 - 2(c^3 - 3bc^2 + c\gamma R^2 - b\gamma R^2)]V + c^4 - 2bc^3 + \gamma c^2 R^2 &+ \\ + 2(bc^3 + bc\gamma R^2) &= 0. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, имеем уравнение 4-го порядка

$$V^4 + 4cV^3 + (6c^2 - \gamma R^2)V^2 + (4c^3 + 2b\gamma R^2)V + c(c^3 + \gamma cR^2 + 2b\gamma R^2) = 0$$

на возрастающем участке субкритической изотермы $T < T_c$, который в термодинамике считается неустойчивым. Однако полином 4-го порядка, определяющий это уравнение, является устойчивым, если выполняется критерий Гурвица:

$$4c > 0, \quad 6c^2 > \gamma R^2, \quad 4c^3 + 2b\gamma R^2 > 0, \quad c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2) > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ 1 & 6c^2 - \gamma R^2 & c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2) \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix} > 0, \quad c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2)\Delta_3 > 0.$$

Значит, на субкритической изотерме имеет место условно-устойчивое состояние, причем оно в точке перегиба.

Рассматриваемое на субкритической изотерме уравнение

$$V^4 + a_1 V^3 + a_2 V^2 + a_3 V + a_4 = 0,$$

где $a_1 = 4c$, $a_2 = 6c^2 - \gamma R^2$, $a_3 = 4c^3 + 2b\gamma R^2$, $a_4 = c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2)$, исследуем по Гурвицу. В общем, матрица Гурвица $\Delta_n = \Delta_{ij}$ имеет трехдиагональный вид с нулями в последнем столбце Δ_{in} , кроме элемента $a_{nn} = a_n$, поэтому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_{nn} = a_{nn} \Delta_{n-1}.$$

Для данного уравнения $n=1, \dots, 4$, следовательно, согласно критерию Лъенара-Шипара: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. В развернутом виде

$$\Delta_2 \equiv \begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \\ 1 & 6c^2 - \gamma R^2 \end{bmatrix} > 0;$$

$$\Delta_4 \equiv c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2)\Delta_3 > 0,$$

$$\Delta_3 \equiv \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ 1 & 6c^2 - \gamma R^2 & c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2) \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, собственные числа минора Δ_3 определяются из уравнения

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr} \Delta_3 - \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\Delta_3)^2 - \text{tr} \Delta_3] - \det \Delta_3,$$

$$\lambda^3 - [4c^3 + 6c^2 + 4c + \gamma R^2(2b - 1)]\lambda^2 - \frac{1}{2} \{ [4c^3 + 6c^2 + 4c + \gamma R^2(2b - 1)]^2 - 4c^3 + 6c^2 - 4c - \gamma R^2(2b - 1) \} \lambda - \det \begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ 1 & 6c^2 - \gamma R^2 & c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2) \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $[2 \times 2]$ главного диагонального минора

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \\ 1 & 6c^2 - \gamma R^2 \end{bmatrix}.$$

Для нее поворот Гивенса [17] выражается формулами

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \cos \theta = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + a_i^2}}, \quad \sin \theta = \frac{-a_i}{\sqrt{a_k^2 + a_i^2}},$$

что указывает на возможные комплексно-сопряженные корни, образуемые минором Δ_3 . В целом поворот Гивенса указывает, что преобразованию координат сопутствует поворот осей [13]. Элемент a_{22} может быть больше нуля, равен нулю или меньше нуля в зависимости от разности $6c^2 - \gamma R^2$. В $\det \Delta_3$ требуется исключить a_{12} и a_{23} или a_{21} и a_{32} , т.е. привести матрицу Δ_3 к треугольному виду. Тогда собственные числа λ_n расположатся на главной диагонали матрицы Δ_3 . Для аналитического разбора используем след $-\text{tr} \Delta_3$.

Согласно теореме Виета, сумма корней трека матрицы $\text{tr} \Delta_3$ определяется решением кубического уравнения

$$4c^3 + 6c^2 + 4c + \gamma R^2(2b - 1) = 0,$$

которое исследуем по [18]. Заменой $c = \mu - 3/4$ получим уравнение

$$4\mu^3 + 3\mu + \frac{1}{27^2} - 2 + \gamma R^2(2b - 1) = 0,$$

зависящее от разности в свободном члене. Обозначив

$$p = -\frac{3}{\sqrt[3]{4\left[\frac{1}{27^2} - 2 + \gamma R^2(2b - 1)\right]^2}}, \quad z = \mu \left[\frac{4}{\frac{1}{27^2} - 2 + \gamma R^2(2b - 1)} \right]^{1/3},$$

$$p = -\frac{81}{\sqrt[3]{4\left[\frac{1 + 2 \cdot 27^2 b \gamma R^2 - 27^2(2 + \gamma R^2)}{27}\right]^2}}, \quad z = \mu \left[\frac{4}{\frac{1}{27^2} + 2b\gamma R^2 - (2 + \gamma R^2)} \right]^{1/3},$$

$$p = -\frac{243}{\sqrt[3]{4\left[1 + 2 \cdot 27^2 b \gamma R^2 - 27^2(2 + \gamma R^2)\right]^2}}, \quad z = 9\mu \left[\frac{4}{1 + 1458b\gamma R^2 - 729(2 + \gamma R^2)} \right]^{1/3},$$

получим кубическое уравнение

$$z^3 - pz + 1 = 0.$$

Преобразование Гивенса к элементу a_{32} находим по формуле

$$d_{32} = \frac{16c^2}{\sqrt{(6c^2 - \gamma R^2)^2 + c^2(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2)^2}},$$

которая усложнит вычисления, поэтому остановимся на прямой прогонке для

$$V^4 + a_1 V^3 + a_2 V^2 + a_3 V + a_4 = 0$$

с устойчивым полиномом, для которого выполняется критерий Гурвица. Коэффициенты сведены в вектор-столбец $[\beta_i]$ для контроля устойчивости. Запишем дополненную матрицу

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ 1 & 6c^2 - \gamma R^2 & c(c^3 + \gamma c R^2 + 2b\gamma R^2) \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix}.$$

Обнулим $a_{32}=4c$. Тогда останется матрица $[2 \times 2]$ главного диагонального минора Δ_2 , для которого достаточное условие устойчивости сводится к $\Delta_2 > 0$. Однако изменятся элементы дополненной матрицы.

Поменяем первую и вторую строки

$$\begin{bmatrix} 1 & 6c^2 - \gamma R^2 & c^4 + \gamma c^2 R^2 + 2bc\gamma R^2 \\ 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда можно обнулить a_{13} , чтобы образовать нули в третьем столбце Δ_2 . В любом случае получим матрицу $[2 \times 2]$ минора Δ_2 . Умножим вторую строку на $-4c$

$$\begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ -4c & -4c(6c^2 - \gamma R^2) & -4c(c^4 + \gamma c^2 R^2 + 2bc\gamma R^2) \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -4c\beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

и сложим с третьей строкой

$$\begin{bmatrix} 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 & 0 \\ -4c & -4c(6c^2 - \gamma R^2) & -4c(c^4 + \gamma c^2 R^2 + 2bc\gamma R^2) \\ 0 & 4c & 4c^3 + 2b\gamma R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ -4c\beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Элементы вектор-столбца взяты по абсолютной величине

$$\begin{bmatrix} |a_1| \\ |a_2| \\ |a_3| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |4c| \\ |6c^2 - \gamma R^2| \\ |4c^3 + 2b\gamma R^2| \end{bmatrix}.$$

Вторая производная уравнения состояния

$$\frac{d^2 P}{dV^2} = \frac{d}{dV} \left\{ \frac{-RT[V^4 + 2(A_2 - A_1)V^3 + (B_2 - 2B_1)V^2 + (C_2 - 2C_1)V + (D_2 + 2D_1)]}{(V - b)^2(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^2} \right\}.$$

Для ее вычисления используем первую производную в фигурных скобках, поэтому

$$\frac{d^2P}{dV^2} = RT \left\{ \frac{2f(V)(V^4 + 2A_3V^3 + 2B_3V^2 + 2C_3V + D_3)}{(V-b)^4(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^4} - \frac{[4V^3 + 6(A_2 - A_1)V^2 + 2(B_2 - 2B_1)V + (C_2 - 2C_1)]}{(V-b)^4(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^4} \right\}.$$

Здесь

$$f(V) = V^4 + 2(A_2 - A_1)V^3 + (B_2 - 2B_1)V^2 + (C_2 - 2C_1)V + (D_2 + 2D_1),$$

числовые коэффициенты

$$A_3 = 2c + 1, \quad B_3 = 3c^2 + c - 2b + \gamma R^2, \quad C_3 = 2c^3 + 2\gamma R^2c + b^2 - 2bc,$$

$$D_3 = c^4 + 2\gamma R^2c^2 + 2b^2c + \gamma^2 R^4.$$

С их учетом вторая производная

$$\frac{d^2P}{dV^2} = RT \left\{ \frac{2\varphi(V) - [4V^3 + 6(A_2 - A_1)V^2 + 2(B_2 - 2B_1)V + (C_2 - 2C_1)]}{(V-b)^4(V^2 + 2cV + c^2 + \gamma R^2)^4} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} 2\varphi(V) = & 2V^8 + 4A_3V^7 + 4(A_2 - A_1)V^7 + 8A_3(A_2 - A_1)V^6 + 2(2B_3 + B_2 - 2B_1)V^6 \\ & + 8B_3(A_2 - A_1)V^5 + 4A_3(B_2 - 2B_1)V^5 + 2(2C_3 + C_2 - 2C_1)V^5 \\ & + 8C_3(A_2 - A_1)V^4 + 4B_3(B_2 - 2B_1)V^4 + 4A_3(C_2 - 2C_1)V^4 \\ & + 2(D_3 + D_2 + 2D_1)V^4 + 2D_3(A_2 - A_1)V^3 + 4C_3(B_2 - 2B_1)V^3 \\ & + 4B_3(C_2 - 2C_1)V^3 + 4A_3(D_2 + 2D_1)V^3 + 2D_3(B_2 - 2B_1)V^2 + 4C_3(C_2 - 2C_1)V^2 \\ & + 4B_3(D_2 + 2D_1)V^2 + 2D_3(C_2 - 2C_1)V + 4C_3(D_2 + 2D_1)V + 2D_3(D_2 + 2D_1) \end{aligned}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} 2\varphi(V) - [4V^3 + 6(A_2 - A_1)V^2 + 2(B_2 - 2B_1)V + (C_2 - 2C_1)] = & \\ = & 2V^8 + 4(A_3 + A_2 - A_1)V^7 + 2(4A_3A_2 - 4A_3A_1 + 2B_3 + B_2 - 2B_1)V^6 \\ & + 2(2A_3B_2 + 4A_2B_3 - 4A_1B_3 - 4A_3B_1 + 2C_3 + C_2 - 2C_1)V^5 \\ & + 2(4A_2C_3 - 4A_1C_3 + 2B_3B_2 - 4B_3B_1 + 2A_3C_2 - 4A_3C_1 + D_3 + D_2 + 2D_1)V^4 \\ & + 2(D_3A_2 - D_3A_1 + 2B_2C_3 - 4B_1C_3 + 2B_3C_2 - 4B_3C_1 + 2A_3D_2 + 4A_3D_1 - 2)V^3 \\ & + 2[3A_1 - 3A_2 + B_2D_3 - 2B_1D_3 + 2C_3C_2 - 4C_3C_1 + (2B_3D_2 + 4B_3D_1)]V^2 \\ & + 2(2B_1 - B_2 - 2C_1D_3 + C_2D_3 + 2C_3D_2 + 4C_3D_1)V + 2C_1 - C_2 + 4D_1D_3 \\ & + 2D_2D_3. \end{aligned}$$

После сокращения на 2 и приравнивания полиномов 4-го и 8-го порядков нулю, получим систему из 2 уравнений, которую запишем следующим образом:

$$V^4 + 2(A_2 - A_1)V^3 + (B_2 - 2B_1)V^2 + (C_2 - 2C_1)V + D_2 + 2D_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} V^8 + 2(A_3 + A_2 - A_1)V^7 + (4A_3A_2 - 4A_3A_1 + 2B_3 + B_2 - 2B_1)V^6 \\ + (2A_3B_2 + 4A_2B_3 - 4A_1B_3 - 4A_3B_1 + 2C_3 + C_2 - 2C_1)V^5 \\ + (4A_2C_3 - 4A_1C_3 + 2B_3B_2 - 4B_3B_1 + 2A_3C_2 - 4A_3C_1 + D_3 + D_2 + 2D_1)V^4 \\ + (D_3A_2 - D_3A_1 + 2B_2C_3 - 4B_1C_3 + 2B_3C_2 - 4B_3C_1 + 2A_3D_2 + 4A_3D_1 - 2)V^3 \\ + [3A_1 - 3A_2 + B_2D_3 - 2B_1D_3 + 2C_3C_2 - 4C_3C_1 + (2B_3D_2 + 4B_3D_1)]V^2 \\ + (2B_1 - B_2 - 2C_1D_3 + C_2D_3 + 2C_3D_2 + 4C_3D_1)V + C_1 - \frac{1}{2}C_2 + 2D_1D_3 + D_2D_3 \\ = 0. \end{aligned}$$

Поскольку решение уравнения 4-го порядка ранее найдено, то его корни содержит уравнение 8-го порядка. Значит, подстановка корней уравнения 4-го порядка в уравнение 8-го порядка даст уравнение 4-го порядка, решение которого находим по Декарту-Эйлеру или Феррари [16], т.е. по схеме решения биквадратного уравнения [15].

Решение в виде функции $\arctg$

Уравнение состояния, рассмотренное на рисунке 1, в виде произведения двух полиномов принимает вид

$$P(V-b)[V^2 + 2cV + (c^2 + \gamma R^2)] = RT(V^2 + 2cV + c^2),$$

где $V > 0$, $P > 0$. Оно описывает процесс в I квадранте, в том числе в новой системе координат, которую получим переносом осей в точку перегиба 0 субкритической изотермы (см. рис. 2). Коэффициенты b , c и R заданы, $\gamma = 27/64$ [Pa²/K²].

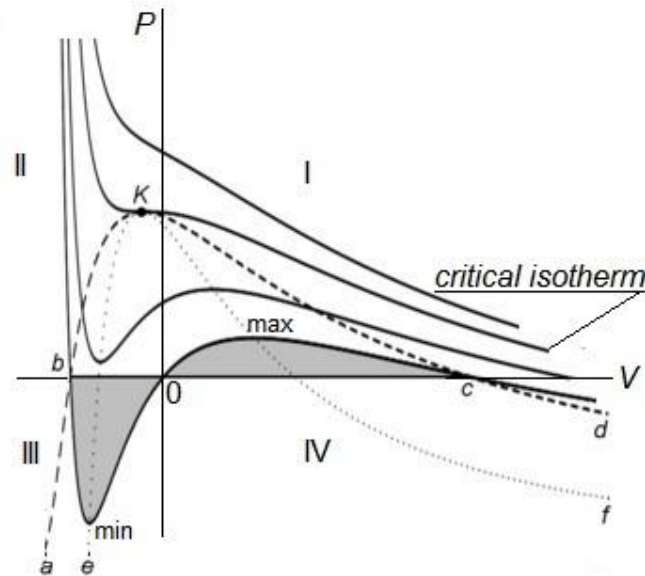


Рисунок 2 – Перенос координат в точку перегиба.
Спинодаль eKf пересекает точки экстремума

В таком случае кубическая функция симметрична относительно центра координат, перенесенного в точку перегиба, т.е. в I и III квадрантах, как положено для нечетной функции. В III квадранте, согласно $V < 0$ и $P < 0$, в уравнении состояния меняются знаки

$$\begin{aligned} -P(V+b)[V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)] &= -RT(V^2 - 2cV + c^2), \\ P(V+b)[V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)] &= RT(V^2 - 2cV + c^2). \end{aligned}$$

Значит, III квадрант наделяет устойчивым полиномом 1-й степени $(V+b)$. Это важно, так как произведение Адамара устойчивое, если имеет устойчивые полиномы в качестве сомножителей [19], что в большей степени зависит от устойчивости полинома 1-й степени. Тогда уравнение состояния в III квадранте имеет следующий вид

$$P = \frac{RT(V+c)^2}{(V+b)[V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)]}$$

Оно интегрируется как простейшая рациональная дробь [12]. Предполагается гладкость P и V , чтобы выполнялось интегрирование по частям, поэтому удовлетворяет методу Остроградского в отличие от иррациональной ФЛ-модели. Важное достоинство нового уравнения состояния в том, что его знаменатель содержит квадратный трехчлен, не разлагающийся на действительные множители 1-й степени, т.е. является простейшей дробью второго типа (см. с. 423 [там же]).

Интегрированием получим внутреннюю энергию для изотермического процесса

$$U = TS - \int \left(\frac{RT(V+c)^2}{(V+b)[V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)]} \right) dV,$$

S – энтропия, $R=8.3145 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ [10]. Разложение дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{RT(V+c)^2}{(V+b)[V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)]} = \frac{A}{V+b} + \frac{MV+N}{V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)},$$

Поэтому дроби интегрируются отдельно. В общем, результат интегрирования дает формула

$$U = TS - A \ln|V+b| - \int \frac{(MV+N)dV}{V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)} + C.$$

Замена $z=V-c$, но $k^2=\gamma R^2$ приводит знаменатель к виду

$$z^2 + k^2.$$

Следовательно, в общем виде результат выражается следующим образом

$$U = TS - A \ln|V + b| - \frac{M}{2} \ln[V^2 - 2cV + (c^2 + \gamma R^2)] - \frac{N - cM}{R\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg} \frac{V + c}{R\sqrt{\gamma}} + C.$$

Заключение

Итак, на участке изотермы с положительным наклоном существует единственная точка, в которой уравнение состояния определяется эллиптической кривой – кубической функцией, обобщающей уравнение Ван-дер-Ваальса. Система устойчивая, так как рассматривается в точке перегиба. По мере увеличения порядка полинома образуется горизонтальная площадка в точке перегиба, служащая точкой покоя. Для кубической функции ей отвечает сингулярность 2-го порядка, соответствующая метастабильному состоянию, которое устанавливается равенством нулю первой и второй производной. Перенос осей координат в точку перегиба разбивает на квадранты. В III квадранте результат интегрирования уравнения состояния как простейшей дроби второго типа выражается в виде функции arctg , что отвечает солитону.

Литература

1. Бойко В.Г., Могель Х.-Й., Сысоев В.М., Чалый А.В. Особенности метастабильных состояний при фазовых переходах жидкость – пар // Успехи физ. наук. –1991. –Т. 161, № 2. – С. 77–111.
2. Виноградов В.Е. Исследование вскипания перегретых и растянутых жидкостей : автореф... дис. докт. физ.-мат. наук / 01.04.14 – Теплофизика и теоретическая теплотехника. – Екатеринбург, 2006. – 43 с.
3. Зудин Ю.Б., Уртенев Д.С. Рост парового пузырька в перегретой жидкости (эффект запаривания давления) // Изв. РАН. Энергетикаю.–2023. – № 6. – С. 61–78.
4. Фогельсон, Р.Л., Лихачев Е.Р. Уравнение состояния реального газа // ЖТФ. – 2004. –Т. 74, вып. 7. – С. 129–130.
5. Дей Е.А., Тюменков Г.Ю. О приведенной форме термодинамических коэффициентов реальных газов // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4(53). – С. 25–29.
6. Дей Е.А., Тюменков Г.Ю. Приведенные термодинамические коэффициенты в теории реальных газов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4(57). – С. 20–24.
7. Шевелёв А.П. Комплексная методология моделирования процессов тепломассопереноса в приложении к задачам подземной гидродинамики : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.03.14 / А.П. Шевелёв. – Тюмень, 2023. – 277 с.
8. Фогельсон, Р.Л., Лихачев Е.Р. Температурная зависимость объема жидкости // Журн. техн. физики. –2009. – Т. 79, вып. 7. – С. 156–158.
9. Лихачев Е. Р. Уравнение состояния жидкости // Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика. – 2014. – № 3. – С. 41–48.
10. Тукембаева Г.Ч., Темиров Б.К. Идентификация параметров модели Фогельсона-Лихачева // Проблемы автоматизации и управления. – 2025. – № 1.
11. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольных нечетных порядков. – Бишкек: Maxprint, 2014. – 178 с.
12. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – 2-е изд. – М.: Госфизматлит., 1959. – 916 с.
13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1976. – 872 с.
14. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
15. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями четного порядка : автореф... дис. канд. физ.-мат. наук / 01.01.02 – Дифференциальные уравнения. – Бишкек, 1995. – 14 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

17. Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей. – Томск: Томский гос. ун-т, 2007. – 208 с.
18. Копаев А.В., Соболев С.К. Графическое и аналитическое исследование комплексных корней кубического уравнения с одним параметром // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 5. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/741.html>
19. Garloff J., Wagner D.G. Hadamard Products of Stable Polynomials Are Stable // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1996. V. 202, Issue 3. P. 797-809. doi:10.1006/jmaa.1996.0348