ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ГРУБОСТИ И БИФУРКАЦИЙ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Оморов Р.О.
Институт теоретической и прикладной математики НАН КР,
Кыргызская Республика, E-mail: romano_ ip@list. ru

В современной науке все больше внимания уделяется междисциплинарным научным направлениям, к которым относится и сравнительно новая перспективная наука-синергетика [1-7] .

Синергетика, как наука о самоорганизации и самоорганизующихся системах и явлениях за последние десятилетия вторгается во все новые области науки, начиная с естественных наук – физики, химии, биологии, геологии, геофизики,- и кончая гуманитарными областями наук, такими как экономика, социология, психология, история, философия, а также в области техники и технологий [1-16].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит метод «топологической грубости», теоретические основы которого заложены в работах [17-18] , на основе понятия грубости по Андронову- Понтрягину[19-21] .

Важной характеристикой метода является возможность единообразной непрерывной оценки грубости (негрубости) как для грубых, так и негрубых явлений и систем, в частности, для динамического хаоса. При этом метод позволяет управлять грубостью синергетических систем[9,17,18,22] .

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового направления математики великим французским математиком и физиком А. Пуанкаре [23] в частности, термин «бифуркация» впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии, близких по виду уравнений систем.

В современном понимании «бифуркация» означает любое скачкообразное изменение, происходящее при плавном изменении параметров систем. Иначе бифуркация это переход между пространствами грубых систем, происходящий через негрубые области (пространства).

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркаций получены А.А.Андроновым и его школой [19-21].

В работе [19] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерий грубости, которое в настоящее время носит название грубости по Андронову-Понтрягину [21].

В многомерной постановке рассматривается динамической системе (ДС) n-го порядка

$$\dot{z}(t) = F(z(t)), \qquad (1)$$

где ($z(t) \in R^n$ – вектор фазовых координат, F – n –мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову – Понтрягину в некоторой области G если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \qquad (2)$$

где $f(\tilde{z})$ – дифференцируемая малая по какой либо норме $\|\cdot\|$ n-мерная вектор-функция, являются ε – тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n – мерном фазовом пространстве такие, что $\tilde{D}' \subset D \subset \tilde{G} \subset G$

$$\exists\ \varepsilon, \delta > 0:$$

$$\text{если} \quad \|f(\tilde{z})\| < \delta, \qquad (3)$$

$$|df_i(\tilde{z}) / d\tilde{z}_j| < \delta, \qquad \overline{i, j=1}, n,$$

$$\text{то} \quad |\|z\| - \|\tilde{z}\|| < \varepsilon, \qquad (4)$$

$$\text{или} \quad (\tilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \qquad (5)$$

иначе, разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε). Если (5) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов) различных размерностей.

В работе [17] на основе понятия грубости по Андронову- Понтрягину предложены основы метода «топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности C{M} нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональном (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Также впервые введено понятие максимальной грубости систем на отношениях пары δ и ε.

Теоремой 1, доказанной в работе [17], установлено, что условием достижения максимальной грубости в окрестности гиперболических особых точек и минимальной негрубости в окрестности негиперболических особых точек является условие

$$M^* = \text{argmin}\ C\{M\}. \qquad (6)$$

В работе [24] - предложены обобщения использования меры C{M} для кусочно-гладких DC а также негладких систем с применением обобщенных производных из негладкого анализа. Здесь же предложены меры грубости в окрестностях предельных циклов через числа обусловленности матриц монодромии C{M(T)} этих циклов

$$C\{M(T)\}: M(T)\,\Lambda(T) = X(T)\,M(T), \qquad (7)$$

где $\Lambda(T)$ =diag{μ, i=1,n}, μ – мультипликаторы (собственные значения) матрицы X(T), T – период колебаний цикла. Заметим, что аналогичную меру грубости можно ввести и для приводимых не стационарных линейных систем, рассматривая в качестве X(T) матрицуP приведенной системы.

Результаты метода «топологической грубости», позволяют управлять грубостью синергетических систем.

Рассматривается система

$$\acute{Z} = Q\ (z,u), \qquad (8)$$

где $z \varepsilon R^n$, $u \epsilon R^r$ - соответственно вектора фазовых координат и управлений системы Q () – n-мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Возможности управления грубостью определяются условиями теоремы 2, доказанной в работах [17,18] и решаемыми уравнением Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \qquad (9)$$
$$K = HM^{-1}$$

где К – матрица обратных связей, определяющая управление $u= - Kz$, A,B- соответственно матрица состояния и управления в особой точке

$$F(z(t))=0,$$

$$\dot{z} = Az + Bu, \qquad (10)$$

Метод «топологической грубости», также позволяет определять бифуркации синергетических систем на основе критериев, разработанных в работах [9,24]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций [18]. При этом показано, что в точках бифуркаций q^* имеет место, либо

$$C\{M(q^*)\} = \min \sum C_i \{M(q)\}, \qquad (11)$$

либо

$$C\{M(q^*)\} = \infty. \qquad (12)$$

В заключительной части данной работы возможности рассматриваемого метода проиллюстрированы на примерах синергетических систем Лоренца, Белоусова-Жаботинского и «хищник-жертва».

Литература

1. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. / Пер. с англ.- М.: Мир, 1985. – 423 с.
2. Синергетика: Сб. статей. Пер. с англ. / Сост. А.И.Рязанов, А.Д.Суханов. Под ред. Б.Б.Кадомцева. – М.: Мир, 1984.- 248 с.
3. Николис Г. Пригожин И. Познание сложного: Введение / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 342 с.
4. Странные аттракторы. Сб. пер. с англ. / под ред. Я.Г.Синая, Л.П.Шильникова - М.: Мир, 1981 – 253 с.

5. Haken H. Synergetics: Introcluction and advanced Topics. Springer.2004. – 356 p.
6. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Синергетика: Нелинейность времени и ландшафты коэволюции. – М.: КомКнига, 2007. – 272 с.
7. Малинецкий Г.Г. Математически основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – Изд. 6-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 312 с.
8. Пригожин И.,Кондепуди Д. Современная термодинамика: От тепловых двигателей до диссипативных структур/Пер. с англ. – М.: 2002. – 461 с.
9. Оморов Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии, 1997, №2. с. 26-36.
10. Feder H.J.S., Feder J. Self – organized criticality in a stick – slip process // Phys.Lett. – 1991/ - № 66.
11. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. / Пер. с англ.- М.: Мир, 1999. –335с.
12. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.:Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
13. Бакиров А.Б. Ноосферология. – Бишкек, 2006.- 412 с.
14. Колесников А.А. Синергетическая теория управления.– Таганрог: ТРТУ; – М.: Энергоатомиздат, 1994. -344 с.
15. Красовский А.А. Некоторые актуальные проблемы науки управления // Автоматика и телемеханика. – 1996.- №6 – С. 8-16.
16. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Аи Т.2003.№5. с. 3-45.
17. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // А иТ.-1991. №8 с. 36-45.
18. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления. Докторская диссертация. – Санкт-Петербург: СПбИТМО, 1992. – 188 с.
19. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл.АН СССР. 1937. Т.14.
20. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981.- 915 с.
21. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обз. статей к 50-летию института (Тр.МИАН СССР.Т.169). – М.: Наука, 1985. – С. 59-93.
22. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными управлениями. Пер.с франц.под ред. А.А.Андронова. – М. –Л.: Гостехиздат.1947. – 392 с.
23. Оморов Р.О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв.НАН КР. № 3 , 2009. – С. 144-148
24. Оморов Р.О. Мера грубости динамических систем и критерии возникновения хаотических колебаний и бифуркаций в синергетических системах // Синтез алгоритмов стабилизации систем: Межведомствен. сб. – Вып.8. Таганрог, ТРТИ,1992. – С.128 – 134.