ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан,
Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Рассматриваются вопросы управляемости и быстродействия процессов, описываемых параболических уравнением с распределенным управлением из заданного множества. Предлагаются методы решения указанных задач путем построения минимизирующих последовательностей.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый внутри области $Q=\{0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ следующим уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\mu(x,t)+v(x,t) \qquad (1)$$

удовлетворяющий на границе Q начальному и граничному условиям

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(t,1)}{\partial x}+\alpha u(t,1)=0, \qquad (2)$$

где $\mu(x,t)\in L_2(Q,R^1)$, $\varphi(x)\in L_2(I_1,R^1)$, $I_1=\{x\in R^1/0\le x\le 1\}$ заданные функции, $\alpha-$ заданное число, $v(x,t)$ – управление, причем

$$v(x,t)\in V=\left\{v(x,t)\in L_2(Q,R^1)/\iint\limits_Q |v(x,t)|^2\,dxdt\le r^2\right\} \qquad (3)$$

Составляются следующие задачи:

Задача 1. (Задача управляемости). Найти управление $v(x,t)\in V$, которое переводит системы (1), (2) из начального состояния $u(0,t)=\varphi(x), x\in I_1$ в заданное конечное состояние $u(x,T)=\psi(x), x\in I_1$ в момент времени T, где $\psi(x)\in L_2(I_1,R^1)$ - заданная функция.

Задача 2. (Задача управляемости с минимальной нормой). Найти управление $v(x,t)\in L_2(Q,R^1)$ с минимальной нормой, которое переводит системы (1), (2) из начального состояния $u(0,x)=\varphi(x)$ в состояние $u(x,T)=\psi(x)$.

Задача 3. (Задача быстродействия). Пусть $v(x,t)\in V$, $u(x,T)=\psi(x)$, момент времени T - не фиксирован. Найти управление $v(x,t)\in V$, которое за кратчайшее время T переводит систему (1), (2) из начального состояния $u(0,x)=\varphi(x)$, $x\in I_1$ в желаемое конечное состояние $u(x,T)=\psi(x), x\in I_1$.

Задача управляемости с учетом ограниченности ресурсов управления (3) является основной задачей. Решения задач 2, 3 могут быть получены из метода решения задачи 1. Задача управляемости для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследована в [1-3]. Задача управляемости с минимальной нормой на основе проблемы моментов решена в работах [4,5]. Задача 1 не может быть решена методами, предложенными в [4,5], в отличие от задачи управляемости с минимальной нормой указанная задача не всегда имеет решение. Представляет интерес поиск нового конструктивного метода решения задачи, ориентированного на применение ЭВМ. Предлагается метод решения задач 1-3 путем построения минимизирующих последовательностей.

Интегральное уравнение. Решение уравнения (1) с условиями (2) через функцию источника можно представить в виде

$$u(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)[\mu(\xi,\tau)+v(\xi,\tau)]d\xi d\tau, \tag{4}$$

где функция

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cdot\frac{\cos\lambda_n x\cos\lambda_n\xi}{\omega_n^2},$$

λ_n - положительные корни уравнения $\lambda\ tg\,\lambda=\alpha$, величины

$$\omega_n^2=\int_0^1\cos^2\lambda_n x dx=\frac{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}{2(\lambda_n^2+\alpha^2)},\quad n=1,2,\dots\ .$$

Из (4) при $t=T$, имеем

$$u(x,T)=\psi(x)=\int_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^1\int_0^T G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^1\int_0^T G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Отсюда следует, что искомое управление $v(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^1)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^1\int_0^T G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau=\psi_1(x),\quad x\in I_1, \tag{5}$$

где

$$\psi_1(x)=\psi(x)-\int_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)d\xi-\int_0^1\int_0^T G(x,\xi,T-\tau)\ \mu(\xi,\tau)d\xi d\tau,\quad x\in I_1$$

- известная функция.

Теперь решение задачи управляемости сводится к поиску решения интегрального уравнения (5), удовлетворяющего условию (3).

Преобразование интегрального уравнения. Пусть функция

$$f(x,\tau)=\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi,\quad (x,\tau)\in Q. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует, что

$$\int_0^T f(x,\tau)d\tau=\psi_1(x),\quad x\in I_1. \tag{7}$$

Следующая теорема позволяет найти общее решение интегрального уравнения (7) относительно неизвестной функции $f(x,\tau)$, $(x,\tau)\in Q$.

Теорема 1. *Общее решение интегрального уравнения* (7) *определяется по формуле*

$$f(x,\tau)=\frac{1}{T}\psi_1(x)+p(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau, \quad (x,\tau)\in Q, \tag{8}$$

где $p(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)$*- произвольная функция.*

Заметим, что:

1. Функция $f(x,\tau)\in R=P$ может быть представлена в виде $f(x,\tau)=f_1(x,\tau)+f_2(x,\tau)$;

где $f_1(x,\tau)=\frac{1}{T}\psi_1(x),\ x\in I_1,$ - частное решение интегрального уравнения (7), $f_2(x,\tau)=p(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau, \quad (x,\tau)\in Q$ - общее решение однородного интегрального уравнения

$$\int_0^T f(x,\tau)d\tau=0.$$

В самом деле,

$$\int_0^T f_1(x,\tau)d\tau=\int_0^T\frac{1}{T}\psi_1(x)d\tau=\psi_1(x), \quad \int_0^T f_2(x,\tau)d\tau=\int_0^T p(x,\tau)d\tau-\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^T p(x,T)d\tau\right)d\tau=0.$$

2. Функции $f_1(x,\tau), f_2(x,\tau)$ ортогональны при любом $x, x\in I_2$. Действительно, при любом фиксированном $x\in I_2$,

$$< f_1(x,\circ),\ f_2(x,\circ)>_{L_2}=\int_0^T f_1(x,\tau)f_2(x,\tau)d\tau=\frac{1}{T}\psi_1(x)\int_0^T f_2(x,\tau)d\tau=0.$$

3. При любом фиксированном $x,\ x\in I_1,$ норма $\|f(x,\circ)\|^2=\|f_1(x,\circ)\|^2+\|f_2(x,\circ)\|^2$.

Отсюда следует, что $\|f(x,\circ)\|\geq\|f_1(x,\circ)\|$.. Если функция $p(x,\tau)\equiv 0$, то $f_2(x,\tau)\equiv 0$. Тогда $\|f(x,\circ)\|=\|f_1(x,\circ)\|$.

Как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (5) в силу соотношений (6), (7) может быть представлено в виде

$$\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi=\frac{1}{T}\psi_1(x)+p(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau,\ (x,\tau)\in Q, \tag{9}$$

где $p(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)$- произвольная функция. Задача управляемости сводится к тому, что: найти решение интегрального уравнения (9) при условии (3).

Оптимизационная задача. Пусть функция

$$w(x,\tau)=p(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)\in L_2(Q,R^1).$$

Введем множество

$$W=\left\{w(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)/\, w(x,\tau)=p(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau, \quad p(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)\right\}$$

Теперь интегральное уравнение

$\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi = \frac{1}{T}\psi_1(x) + p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau,\ (x,\tau)\in Q,$ где $p(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)$- произвольная функция, запишется в виде

$$\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\ v(\xi,\tau)d\tau = \frac{1}{T}\psi_1(x) + w(x,\tau), \quad (x,\tau)\in Q\ , \tag{10}$$

$$v(\xi,\tau)\in V, \qquad w(x,\tau)\in W \tag{11}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$J(v,w) = \int_0^T\int_0^1\left[\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right]^2 dxd\tau \to \inf \tag{12}$$

при условиях

$$v(\xi,\tau)\in V, \quad w(x,\tau)\in W\ , \tag{13}$$

где $v = v(\xi,\tau), \qquad w = w(\xi,\tau).$

Лемма 1. *Для того чтобы пара* $(v_*(\xi,\tau), w_*(\xi,\tau))\in V\times W$ *была решением интегрального уравнения* (10) *при условии* (11)*, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(v_*, w_*) = 0,$ *где* $(v_*(\xi,\tau), w_*(\xi,\tau))\in V\times W$ *- решение оптимизационной задачи* (12), (13).

Таким образом, для решения задачи управляемости, необходимо решение оптимизационной задачи (12), (13).

Градиент функционала. Оптимизационная задача (12), (13) может быть решена путем построения минимизирующих последовательностей $\{v_n(\xi,\tau)\}\subset V,\ \{w_n(x,\tau)\}\subset W$, которые сходятся к элементам $v_*(\xi,\tau)\in V,\ \ w_*(x,\tau)\in W$ при $n\to\infty$. Для этого требуются вычисления градиента функционала (12) в любой точке $v(\xi,\tau)\in V, \quad w(x,\tau)\in W$.

Теорема 2. *Функционал* (12) *при условии* (13) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J'(v,w) = (J_1'(v,w), J_2'(v,w)) \in L_2(Q,R^1)\times L_2(Q,R^1), \tag{14}$$

в любой точке $(v,w)\in V\times W$ *равен*

$$\begin{aligned} J_1'(v,w) &= 2\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\ G(x,\sigma,T-\tau)v(\sigma,\tau)d\sigma\, dx + \\ &+ 2\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\left[-\frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right]dx = J_1'(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^1), \end{aligned} \tag{15}$$

$$J_2'(v,w) = -2\left[\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right] = J_2'(x,\tau)\in L_2(Q,R^1). \tag{16}$$

Теорема 3. *Градиент* функционала $J'(v,w)\in L_2(Q,R^1)\times L_2(Q,R^1)$ *удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$\|J'(v_1,w_1) - J'(v_2,w_2)\| \le L(\|v_1 - v_2\|_{L_2} + \|w_1 - w_2\|_{L_2}).$$

$\forall(v_1,w_1),\ (v_2,w_2)\in V\times W,\ L = const > 0$ **.**

Проекция точки на множество. Заметим, что:

1. Если $w_1(x,\tau)\in W,\ w_2(x,\tau)\in W,$ то для любых чисел α и β, точка $\alpha w_1(x,\tau)+\beta w_2(x,\tau)\in W$. В самом деле, из включения $w_1(x,\tau)\in W, w_2(x,\tau)\in W$ следует

$$w_1(x,\tau)=p_1(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p_1(x,\tau)d\tau,\ \ w_2(x,\tau)=p_2(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p_2(x,\tau)d\tau\ ,$$

тогда

$$\alpha w_1(x,\tau)+\beta w_2(x,\tau)=[\alpha p_1(x,\tau)+\beta p_2(x,\tau)]-\frac{1}{T}\int_0^T[\alpha p_1(x,\tau)+\beta p_2(x,\tau)]d\tau\in W\ .$$

Отсюда следует, что W - линейное многообразие в $L_2(Q,R^1)$;

2. Если $p(x,\tau)\equiv 0,$ то $w(x,\tau)\equiv 0\in W$. Следовательно, линейное многообразие W является подпространством, т.е. выпуклое замкнутое множество.

Теорема 4. *Любой элемент* $f(x,\tau)\in l_2(Q,R^1)$ *имеет единственную проекцию на множество W, причем*

$$P_w[f(x,\tau)]=f(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)d\tau,\quad (x,\tau)\in Q,$$

где $P_w[f(x,\tau)]$ *- проекция точки* $f(x,\tau)$ *на множество W.*

Проекция точки $f_1(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^1)$ на множестве V определяется так

$$P_V[f_1(\xi,\tau)]=\begin{cases} r\cdot\dfrac{f_1(\xi,\tau)}{\left[\iint\limits_Q f_1^2(\xi,\tau)d\xi\, d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}, \text{если} \|f_1\|_{L_2}^2>r^2,\\ f_1(\xi,\tau),\ \ \textit{если}\,\|f_1\|_{L_2}^2=\iint\limits_Q f_1^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\le r^2.\end{cases}$$

Выпуклый функционал. Рассмотрим функционал (12) при условии (13). Как показано выше, множество W – выпукло, множество V является выпуклым, замкнутым шаром. Следовательно, множество $V\times W$ - выпукло и замкнуто.

Лемма 2. *Функционал* $J(v,w)$ *на множестве* $V\times W$ *дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и является выпуклым*.

Далее с помощью построения минимизирующих последовательностей находятся решения задач управляемости (в том числе с минимальной нормой) и оптимального быстродействия для параболического уравнения с ограниченным управлением.

Литература

1. Айсагалиев С.А. Управляемость некоторые системы дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27, №9, с.1476-1486.
2. Айсагалиев С.А. Общие решения одного класса интегральных уравнений. // Математический журнал, 2005, №4, с.7-13.
3. Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С. Методы решения краевых задач. Алматы: Казақ университеті, 2002, 348 с.
4. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
5. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975, 568 с.